ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 517.958:532.5

С.Л. ТОНКОНОГ, Л.Д. ЭСКИН

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ И ИХ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ. II

Данная работа является второй частью работы [1], в которой изучались условия точной инвариантности уравнений, описывающих динамику поверхности неньютоновской жидкости с реологическим законом Оствальда-де Виля. Здесь с помощью методов качественной теории динамических систем [2] изучаются инвариантные решения этих уравнений, продемонстрировано и применение полученных результатов качественного анализа для решения краевых задач с инвариантными решениями. Сохранены все обозначения из [1], нумерация разделов и формул продолжает принятую там нумерацию.

4. Применим методику качественного исследования динамических систем на плоскости (см. [2], где также приведено много примеров; другие примеры имеются, напр., в [3] и [4]) к уравнению (2.17). С этой целью необходимо исследовать его особые точки, изоклину нуля и бесконечности, асимптотику интегральных кривых в окрестности особых точек и на бесконечности. Обозначим $V = d_2 - pd_1$. Если $(d_1, d_2) \notin V = 0$, то имеем две конечные особые точки: $O(0,0)$ и $T(z_1, 0)$, $z_1^{2n+1} = -rp^{-n}d_2$. С помощью стандартной методики исследования особых точек [2] находим $O(0,0)$ — сложный седло-узел с неустойчивым узловым сектором, интегральные кривые выходят из точки O в направлении с угловым коэффициентом $k = -d_2/d_1$. В случае $(d_1, d_2) \in V = 0$ особая точка исчезает, а уравнение (2.17) принимает вид

$$\frac{dy}{dz} = \frac{P_1(z,y)}{Q_1(z,y)},$$
$$P_1 = y[(n+2)z^{n+1}w^{n-1} + npz^{n+2}w^{n-2}] + r^{-1}z^{n+2}w^{n-1} + d_1,$$
$$Q_1 = -nyz^{n+2}w^{n-2}, \quad w = y + pz.$$

Обозначим
$$a_n = \frac{(7n^2+10n+4)r}{p(2n+1)^2}, \quad b_n = \frac{nrq}{p}, \quad \lambda_{1,2} = (a_n \pm 2\sqrt{b_n})q^{-1} > 0.$$

Будем иметь T — простой узел, если $\frac{d_1}{d_2} < \lambda_2$ или $\frac{d_1}{d_2} > \lambda_1$, T — простой фокус при $\lambda_2 < \frac{d_1}{d_2} < \lambda_1$. Траектории входят (выходят) в узел в направлениях с угловыми коэффициентами

$$K_{1,2} = (2b_n)^{-1}\left(\frac{d_1}{d_2}q - a_n \pm \sqrt{(a_n - \tfrac{d_1}{d_2}q)^2 - 4b_n}\right), \quad 0 > K_1 > K_2.$$

На бесконечности имеем простое седло в направлении с угловым коэффициентом $K_3 = -\frac{1}{2(n+1)r}$ и сложные узлы в направлении прямой $z = 0$ и $w = 0$. При исследовании ветвей изоклины нуля (алгебраическая кривая $P(z,y) = 0$) необходимо учитывать, что она пересекает координатные оси (в случае $(d_1, d_2) \notin V = 0$) лишь в точках O и T и не пересекает в точках, отличных от O, прямую $w = 0$. Ветви изоклины бесконечности — прямые $z = 0$, $y = 0$, $w = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00128).

Необходимо отметить, что параметрическая плоскость d_1, d_2 разбивается на ряд областей, ограниченных бифуркационными кривыми, причем для точек (d_1, d_2), принадлежащих одной и той же области, качественное поведение интегральных кривых одно и то же, а для точек (d_1, d_2) из разных областей различно. Для уравнения (2.17) бифуркационными кривыми являются прямые $V = 0$, $d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_1 - \lambda_1 d_2 = 0$, $d_1 - \lambda_2 d_2 = 0$.

Приведем результаты качественного анализа интегральных кривых уравнения (2.17) в случае

$$(d_1, d_2) \in A_1 = \{(d_1, d_2) : V > 0,\ d_1 > 0,\ d_2 > 0,\ d_1 - \lambda_1 d_2 > 0\}.$$

Асимптотика ветвей изоклины нуля имеет вид

$$y_1 \sim -\frac{d_2 z}{d_1}, \quad z \to 0, \quad y_2 \sim -\left(\frac{d_1}{n+2}\right)^{1/n} z^{-\frac{n+1}{n}}, \quad z \to 0,$$

$$w(y_3, z) \sim \pm\left(\frac{V}{nq^2}\right)^{\frac{1}{n-1}} z^{-\frac{n+2}{n-1}}, \quad z \to +\infty,$$

$$y_{4,5} \sim m_{1,2} z, \quad z \to \pm\infty, \quad m_{1,2} = -\frac{2n^2 + 11n + 8 \mp \sqrt{4n^4 + 24n^3 + 57n^2 + 32n}}{2p} q^2,$$

$$m_2 < -p < m_1 < 0.$$

С помощью этих асимптотик и сделанного выше замечания о точках пересечения изоклины нуля с координатными осями и прямой $w = 0$ нетрудно заключить, что в данном случае $(d_1, d_2) \in A_1$ возможны лишь три случая расположения ветвей изоклины нуля, изображенных соответственно на рис. 1–3. Производная $\frac{dy}{dz}$ в силу уравнения (2.17) меняет знак, лишь когда интегральная кривая пересекает ветвь изоклины нуля или бесконечности (кроме прямой $w = 0$, т. к. n нечетно). На рис. 1–3 указаны знаки $\frac{dy}{dz}$ в каждой из областей, на которые эти ветви разбивают плоскость z, y.

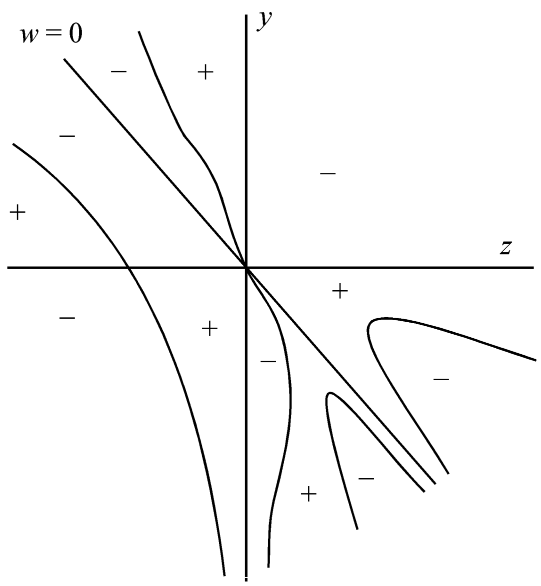

Рис. 1

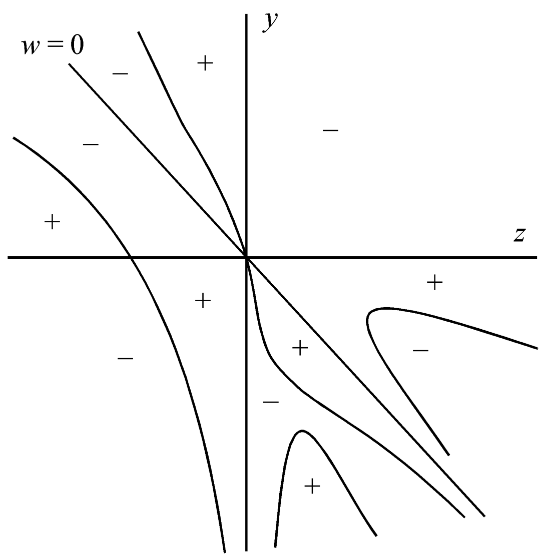

Рис. 2

Отметим асимптотику интегральных кривых при $z \to 0$ и $z \to \infty$:

1) пучок с асимптотикой $y \sim Az^{-\frac{n+2}{n}}$, $z \to 0$, A любое;

2) интегральная кривая с асимптотикой $y \sim -d_1^{1/n} z^{-\frac{n+1}{n}}$, $z \to 0$;

3) пучок с асимптотикой $w(y, z) \sim Bz^{-\frac{n-1}{n+2}}$, $z \to \pm\infty$, B любое;

4) интегральная кривая с асимптотикой $w(y, z) \sim -(\frac{V}{2})^{1/n} z^{-\frac{n+1}{n}}$, $z \to \pm\infty$.

Объединив все полученные результаты, теперь нетрудно описать качественное поведение интегральных кривых уравнения (2.17) в случае $(d_1, d_2) \in A_1$. Оказывается, что это поведение одно и то же независимо от возможного различия в расположении ветвей изоклины нуля (рис. 1–3). Оно приведено на рис. 4.

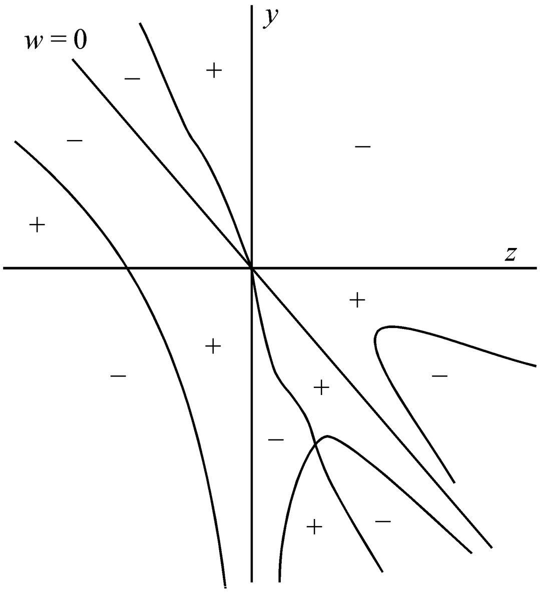

Рис. 3

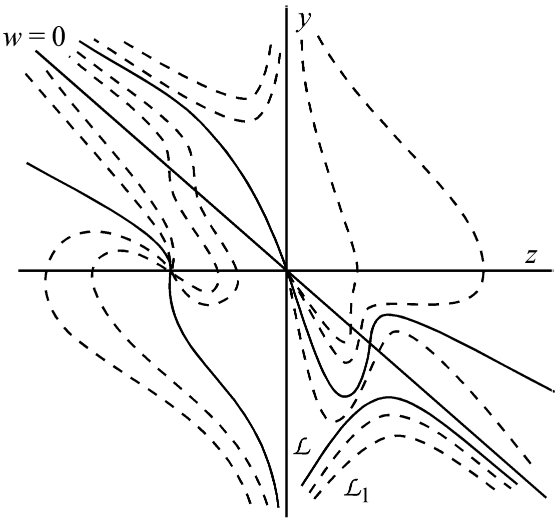

Рис. 4

Приведем пример применения результатов качественного исследования. Рассмотрим область

$$D = \{(x,t) : x_1(t) < x < x_0(t)\},$$
$$x_1 = C_2^{-1}\zeta_3(\varepsilon^{-1}\theta_1 - \varphi\theta_2'), \quad x_0 = \zeta_3(J_0 + C_2^{-1}(\varepsilon^{-1}\theta_1 - \varphi\theta_2')). \tag{4.1}$$

Будем искать в области D решение уравнения (2.1) с функцией ψ (2.12), удовлетворяющее граничным условиям

$$u\big|_{x=x_1(t)} = \zeta_4, \quad u\big|_{x=x_0(t)} = 0, \quad u^2\sigma^n\big|_{x=x_0(t)} = 0 \tag{4.2}$$

($x_0(t)$ — линия фронта решения). Линию фронта будем считать неизвестной (следовательно, неизвестно значение $J_0 > 0$, оно должно быть определено в процессе решения поставленной задачи, которая типична для динамики неньютоновской жидкости). Решение будем искать в виде (2.4), (2.5) (именно с этой целью выбрали границу D в виде (4.1)). Для функции χ_1 получим уравнение (2.13) и граничные условия

$$\chi_1\big|_{J=0} = 1, \quad \chi_1\big|_{J=J_0} = 0, \quad \chi_1^{n+2}\chi_1'^{\,n}\big|_{J=J_0} = 0. \tag{4.3}$$

Построим монотонно убывающее по J решение χ_1 этой задачи (т. е. монотонно убывающее по x решение $u(x,t)$ граничной задачи (2.1), (4.2)). С этой целью рассмотрим однопараметрическое семейство $\chi_1(J, J_0)$ (параметр семейства обозначим через $J_0 > 0$), порожденное интегральной кривой $\mathcal{L}$ уравнения (2.17) с асимптотикой

$$y \sim -d_1^{1/n} z^{-\frac{n+1}{n}}, \quad z \to 0, \quad w(y,z) \sim -\left(\frac{V}{2}\right)^{1/n} z^{-\frac{n+1}{n}}, \quad z \to \infty. \tag{4.4}$$

С учетом уравнения $J^{-1}dJ = y^{-1}dz$, соотношений $\chi_1 = J^p z$, $\chi_1' = J^{-(n-1)q}w$ и асимптотики (4.4) при $z \to 0$ получим

$$\chi_1 \sim C_n(J_0 - J)^{nq}, \quad \chi_1' \sim -nqC_n(J_0 - J)^{-(n+1)q}, \tag{4.5}$$
$$C_n = \left(\frac{1}{nq}(d_1 J_0^2)^{1/n}\right)^{nq}, \quad J \to J_0 - 0.$$

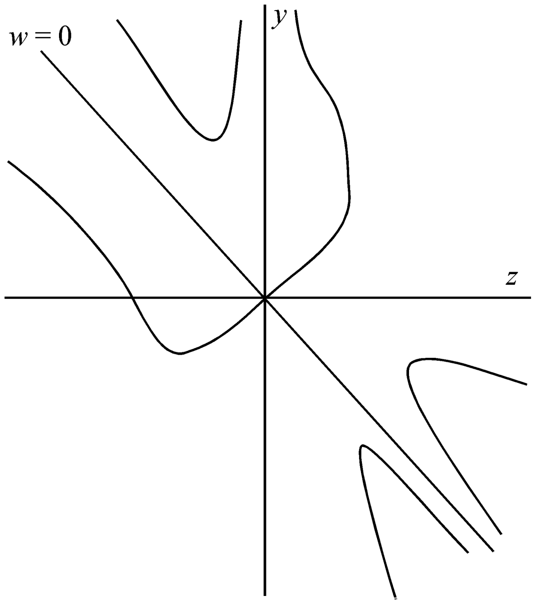

Рис. 5

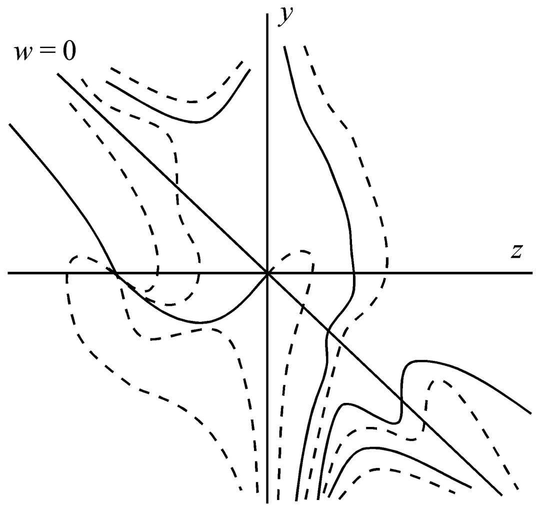

Рис. 6

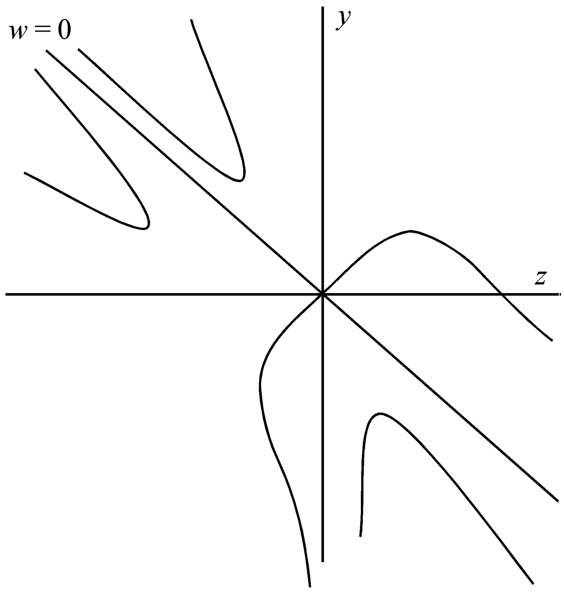

Рис. 7

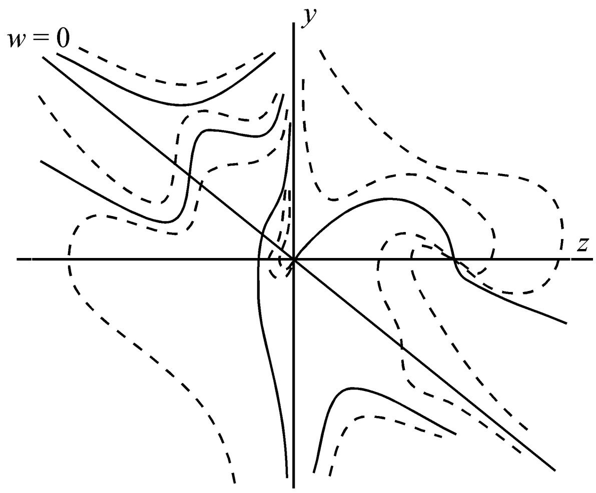

Рис. 8

Из (4.5) следует, что функция χ_1 удовлетворяет граничным условиям при $J = J_0$. Аналогично, с помощью асимптотики (4.4) для w при $z \to \infty$ без труда находим, что $z \sim (\frac{J}{J_1})^{-p}$, $J \to 0$, где $J_1 = J_1(J_0) > 0$ является однозначной функцией параметра J_0 и может быть при каждом заданном значении $J_0 > 0$ определено численно. Получаем $\chi_1(0) = J_1^p$. Граничное условие (4.3) в точке $J = 0$ будет выполнено, если теперь J_0 определить из уравнения $J_1(J_0) = 1$. Построенное решение χ_1 монотонно убывает по J, т. к. кривая $\mathcal{L}$ принадлежит сектору, в котором w, а вместе с ним χ_1', отрицательны. Вместе с χ_1 монотонно убывает по x и решение $u(x,t)$ граничной задачи (4.2) для уравнения (2.1). Отметим, что граничное условие (4.2) на фронте можно заменить условием $u(\infty,t)=0$, $u^2\sigma^n\big|_{x=\infty}=0$, тогда следует при $x \geq x_0(t)$ положить $u=0$.

Замечание 1. Для потока $u^2\sigma^n$ получаем $u^2\sigma^n\big|_{x=x_1}=0$.

Замечание 2. Примеры решения граничной задачи (2.1), (4.2) с отличным от нуля потоком $u^2\sigma^n$ при $x=x_0(t)$ (на фронте) можно получить с помощью решений уравнения (2.1), порожденных интегральными кривыми уравнения (2.17), принадлежащими семейству $\mathcal{L}_1$ (см. рис. 4).

В случае $(d_1,d_2) \in A_2 = \{(d_1,d_2) : V>0,\ d_1>0,\ d_2>0,\ d_1-\lambda_2 d_2<0\}$ качественное поведение интегральных кривых сохраняется, а если $(d_1,d_2) \in A_3 = \{(d_1,d_2) : V>0,\ d_1>0,\ d_2>0,\ d_1-\lambda_1 d_2<0,\ d_1-\lambda_2 d_2>0\}$, то узел T превращается в фокус и интегральные кривые закручиваются вокруг него, в остальном все остается без изменений. Рассмотрим теперь случай $(d_1,d_2) \in B_1 = \{(d_1,d_2) : d_1<0,\ d_2>0\}$. Результаты исследования ветвей изоклины нуля для этого случая представлены на рис. 5, а качественного поведения интегральных кривых — на рис. 6.

На рис. 7, 8 представлены результаты исследования ветвей изоклины нуля и интегральных кривых в случае $(d_1,d_2) \in B_2 = \{(d_1,d_2) : d_1>0,\ d_2<0\}$.

Аналогично можно рассмотреть и остальные случаи (в том числе и те, когда точка (d_1,d_2) принадлежит одной из бифуркационных прямых).

Литература

1. Тонконог С.Л., Эскин Л.Д. *О точности приближенных симметрий уравнений динамики неньютоновской жидкости и их инвариантных решениях.* I // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 8. – С. 53–62.
2. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* – М.: Наука, 1990. – 488 с.
3. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.* – М.: Наука, 1987. – 477 с.
4. Эскин Л.Д. *О некоторых решениях задачи о распаде разрыва в динамике неньютоновской жидкости* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 4. – С. 71–79.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 15.03.1996
окончательный вариант 27.03.2003