ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 515.124

Е.Н. СОСОВ

О НАИЛУЧШИХ N-СЕТЯХ ОГРАНИЧЕННЫХ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ В СПЕЦИАЛЬНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В специальном метрическом пространстве получены обобщения некоторых результатов П.К. Белоброва [1], [2] и А.Л. Гаркави [3] о наилучших N-сетях непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств в гильбертовом и в специальном банаховом пространствах.

1. Необходимые определения и теоремы

Введем следующие обозначения и определения:

$B(X)$ — множество всех непустых ограниченных множеств метрического пространства (X, ρ);

$[x, y]$ — сегмент с концами x, y (т. е. образ непрерывной кривой, длина которой равна расстоянию между ее концами ([4], с. 42));

$\rho[x, W] = \inf\limits_{y \in W} \rho[x, y]$;

$B[x, r]$ — замкнутый шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r \geq 0$;

$\beta[M, W] = \sup\limits_{x \in M} \rho[x, W]$ — полуотклонение множества $M \in B(X)$ от множества $W \subset X$ [5];

$\alpha : B(X) \times B(X) \to R$, $\alpha[M, W] = \max\{\beta[M, W]; \beta[W, M]\}$ — псевдометрика Хаусдорфа на множестве $B(X)$ ([6], с. 223);

$\Sigma_N(X)$ — множество всех непустых N-сетей, состоящих не более чем из N точек пространства X [7].

Если $M \cap B[x, \rho[x, M]] \neq \emptyset$ для каждого $x \in X$, то $P_M : X \to B(X)$, $P_M[x] = M \cap B[x, \rho[x, M]]$ называется оператором метрического проектирования [5]. В дальнейшем вместо $\bigcup\limits_{x \in W} P_M[x]$ будем писать $P_M[W]$, где $W \subset X$.

Пусть Σ — семейство непустых подмножеств в X. Множество $S^* \in \Sigma$ называется наилучшим аппроксимирующим множеством из семейства Σ для множества $M \in B(X)$, если $\beta[M, S^*] = R_\Sigma[M]$, где $R_\Sigma[M] = \inf\{\beta[M, S] : S \in \Sigma\}$ ([8], с. 15).

Радиусом покрытия множества $M \in B(X)$ N-сетью $S_N \in \Sigma_N$ называется число $\beta[M, S_N]$ [7]. N-сеть S^*_N называется наилучшей N-сетью множества $M \in B(X)$, если $\beta[M, S^*_N] = R_N[M]$, где $R_N[M] = \inf\{\beta[M, S_N] : S_N \in \Sigma_N\}$ [7]. В частности, наилучшая 1-сеть называется чебышевским центром, а число $R_1[M]$ — чебышевским радиусом множества $M \in B(X)$ [7].

В дальнейшем на метрическое пространство X будем налагать некоторые из следующих условий.

Условие 1. Для любых двух различных точек из X найдется единственная прямая (образ множества всех вещественных чисел со стандартной метрикой при изометрическом отображении в пространство (X, ρ) ([4], с. 52)), содержащая эти точки.

Условие 2. Для любых x, y, p из X выполняется неравенство $2\rho[\omega[p, x], \omega[p, y]] \leq \rho[x, y]$, где $\omega[p, x]$ — середина сегмента $[p, x]$ ([4], с. 304).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00308.

Условие 3. Для каждого $r > 0$ и для любых ограниченных последовательностей (p_n), (x_n), (y_n) пространства X, удовлетворяющих соотношениям $\rho[p_n, x_n] \le r$, $\rho[p_n, y_n] \le r$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho[p_n, \omega[x_n, y_n]] = r$ для каждого натурального n, выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \rho[x_n, y_n] = 0$.

Условие 4. Для каждого $p \in X$, для каждой прямой $L \subset X$, содержащей точку $p \in X$, для каждого $x \in X$ имеем $\rho[p, P_L[x]] \le \rho[p, x]$.

Простыми примерами метрических пространств, удовлетворяющих условиям 1–4, являются вещественное гильбертово пространство и пространство Лобачевского (возможно, бесконечномерное).

Пусть метрическое пространство X удовлетворяет условию 1. Множество M в таком пространстве называется выпуклым, если $[x, y] \subset M$ для любых различных $x, y \in M$.

$\mathrm{co}[M]$ — выпуклая оболочка множества M (т. е. пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество M).

Сформулируем полученные результаты.

Лемма 1. *Для всех $M, W \in B(X)$ имеет место неравенство $|R_\Sigma(M) - R_\Sigma(W)| \le \alpha[M, W]$ (при $\Sigma = \{X\}$ неравенство известно* [1]).

Лемма 2. *Пусть метрическое пространство X удовлетворяет условиям 1–4, W — непустое подмножество в X, M — непустое замкнутое ограниченное выпуклое множество в X. Тогда имеют место неравенства*

(i) $\rho[x, P_M[W]] \le \rho[x, W]$ *для каждого* $x \in M$;

(ii) $\beta[M, P_M[W]] \le \beta[M, W]$.

Следствие 1. Пусть метрическое пространство X удовлетворяет условиям 1–4, Z — наилучшее аппроксимирующее множество из семейства Σ для непустого замкнутого ограниченного выпуклого множества $M \subset X$ и $P_M[Z] \in \Sigma$. Тогда $P_M[Z]$ — наилучшее аппроксимирующее множество для множества M.

Теорему 2 из [3], теоремы 1, 2 из [2] обобщает

Лемма 3. *Пусть метрическое пространство X удовлетворяет условиям 1–4, $M \in B(X)$. Тогда существует единственный чебышевский центр множества M, принадлежащий замыканию выпуклой оболочки множества M, совпадающий с чебышевскими центрами замыкания выпуклой оболочки множества M и выпуклой оболочки множества M.*

Лемма 4. *Пусть метрическое пространство X удовлетворяет условиям 1–4, M — непустое ограниченное замкнутое выпуклое множество пространства X, (W_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых множеств пространства X, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторому компакту $W \subset X$. Тогда $\alpha[P_M[W_n], P_M[W]] \to 0$ $(n \to \infty)$.*

Лемма 5. *Пусть метрическое пространство X удовлетворяет условиям 1–3, $B = B[p, r]$. Тогда отображение P_B является липшицевым отображением с липшицевой константой* $\mathrm{Lip}[P] \le 2$. *Если, кроме того, выполняется условие 4, то* $\mathrm{Lip}[P] = 1$.

Теорема. *Пусть метрическое пространство X удовлетворяет условиям 1–4, (M_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых множеств пространства X. Тогда*

A. *если $M \in \Sigma$, $\alpha[M_n, M] \to 0$ $(n \to \infty)$, $(K_n) \subset \Sigma$ — последовательность наилучших аппроксимирующих множеств для последовательности (M_n) такая, что $K_n \subset M_n$ для каждого натурального n, то $\alpha[K_n, M] \to 0$ $(n \to \infty)$;*

B. *если M — компакт в X, $\alpha[M_n, M] \to 0$ $(n \to \infty)$, (S_N^n) — последовательность наилучших N-сетей для последовательности (M_n) такая, что для каждого натурального n $S_N^n \subset M_n$, то найдется подпоследовательность последовательности (S_N^n), сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторой наилучшей N-сети множества M.*

Из следствия 1 и теоремы вытекает обобщающее теорему 3 из [1]

Следствие 2. Пусть метрическое пространство X удовлетворяет условиям 1–4, (M_n) — последовательность непустых ограниченных замкнутых выпуклых множеств пространства X, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторому компакту $M \subset X$. Тогда

A. если (K_n) — последовательность наилучших аппроксимирующих компактов для последовательности (M_n), то найдется подпоследовательность $(M_m) \subset (M_n)$, для которой найдется последовательность $(\hat{K}_m)$ наилучших аппроксимирующих компактов, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к множеству M;

B. если (S_N^n) — последовательность наилучших N-сетей для последовательности (M_n), то найдется подпоследовательность $(M_m) \subset (M_n)$, для которой найдется последовательность $(\widehat{S}_N^m)$ наилучших N-сетей, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к некоторой наилучшей N-сети множества M.

2. Доказательства полученных результатов

Доказательство леммы 1. Пусть $x \in M$ и $\tau > 0$. Тогда найдется точка $z \in W$ такая, что $\rho[x,z] \le \rho[x,W] + \tau$. Кроме того, получим неравенства $\rho[x,S] \le \rho[x,z] + \rho[z,S] \le \rho[x,W] + \rho[z,S] + \tau \le \sup\limits_{x\in M} \rho[x,W] + \sup\limits_{z\in W} \rho[z,S] + \tau \le \alpha[M,W] + \sup\limits_{z\in W} \rho[z,S] + \tau$ для $S \in \Sigma$. Отсюда следует $\inf\limits_{S\in\Sigma} \sup\limits_{x\in M} \rho[x,S] \le \alpha[M,W] + \sup\limits_{z\in W} \rho[z,S] + \tau$. Переходя к точной нижней грани в правой части и используя произвольность выбора $\tau > 0$, имеем $R_\Sigma[M] = \inf\limits_{S\in\Sigma} \sup\limits_{x\in M} \rho[x,S] \le \alpha[M,W] + \inf\limits_{S\in\Sigma} \sup\limits_{z\in W} \rho[z,S] = \alpha[M,W] + R_\Sigma[W]$. Неравенство $R_\Sigma[W] \le \alpha[M,W] + R_\Sigma[M]$ получается аналогично. □

Доказательство леммы 2. Из условий 1–3 и теоремы 1 в [9] следует, что оператор P_M является однозначным и непрерывным в пространстве X. Докажем лемму 2 методом от противного.

Для доказательства неравенства (i) положим $\rho[x,W] < \rho[x, P_M[W]]$ для некоторого $x \in M$. Тогда найдется точка $y \in W$ такая, что $\rho[x,y] < \rho[x, P_M[y]]$. Если $y \in P_M[W]$, то получаем противоречие. Пусть $y \in W \setminus M$, l — луч с началом в точке x, содержащий элемент $P_M[y]$, и $z = z[t]$ – параметризация этого луча длиной дуги. В силу выпуклости функции $f = \rho[y, z[t]]$ (доказательство выпуклости нетрудно получить, используя доказательства теорем (36.4)–(36.6) из ([4], с. 304–307)) метрическая проекция точки y на луч l лежит вне ориентированного сегмента $[x, P_M[y]]$. Следовательно, в силу условия 4 $\rho[x, P_M[y]] \le \rho[x, P_l[y]] \le \rho[x,y]$. Но $\rho[x,y] < \rho[x, P_M[y]]$. Получили противоречие.

Неравенство (ii) доказывается переходом к точной верхней грани по всем $x \in M$ сначала в правой части неравенства (i), а затем в левой части полученного неравенства. □

Доказательство леммы 3. Существование и единственность чебышевского центра $\mathrm{Cheb}[M]$ непустого ограниченного множества M доказаны для более общего случая в [10]. Из условий 1, 2 следует, что замкнутые шары пространства X выпуклые. Тогда $M \subset \mathrm{co}[M] \subset \overline{\mathrm{co}[M]} \subset B[\mathrm{Cheb}[M], R_1[M]] \Rightarrow R_1[M] = R_1[\mathrm{co}[M]] = R_1[\overline{co[M]}]$. Из следствия 1 и единственности чебышевского центра получим $\mathrm{Cheb}[M] \subset \overline{\mathrm{co}[M]}$, $\mathrm{Cheb}[M] = \mathrm{Cheb}[\mathrm{co}[M]] = \mathrm{Cheb}[\overline{\mathrm{co}[M]}]$. □

Доказательство леммы 4. Из теоремы 1 в [9] следует, что оператор P_M является однозначным и непрерывным в пространстве X. Кроме того, в силу леммы 1 из [5] этот оператор является β-непрерывным на компакте $W \subset X$, поэтому $\beta[P_M[W_n], P_M[W]] \to 0$ $(n \to \infty)$. Докажем, что $\beta[P_M[W], P_M[W_n]] \to 0$ $(n \to \infty)$ методом от противного. Пусть это утверждение неверно, тогда найдутся константа $c > 0$ и подпоследовательность $(W_m) \subset (W_n)$ такие, что $\beta[P_M[W], P_M[W_m]] > c$ для каждого натурального m. Следовательно, найдется последовательность $(z_m) \subset W$ такая, что $\rho[P_M[z_m], P_M[W_m]] > c$ для каждого m. Кроме того, найдется подпоследовательность $(z_k) \subset (z_m)$, сходящаяся к некоторой точке $z \in W$, т.к. W

компактно. Но оператор P_M является непрерывным, поэтому найдется такое натуральное число k_0, что $\rho[P_M[z], P_M[W_k]] > c$ для каждого $k > k_0$. Из условия $\alpha[W_k, W] \to 0$ $(k \to \infty)$ следует, что найдется последовательность (y_k), $y_k \in W_k$, сходящаяся к точке z. Но тогда $\rho[P_M[z], P_M[W_k]] \le \rho[P_M[z], P_M[y_k]] \to 0$ $(m \to \infty)$. Получили противоречие. $\square$

Доказательство леммы 5. Пусть для $0 \le \lambda \le 1$ точка $\omega_\lambda[p,x] \in [p,x]$ такая, что $\rho[\omega_\lambda[p,x], p] = \lambda\rho[p,x]$. Тогда из условий 1, 2 нетрудно получить неравенство $\rho[\omega_\lambda[p,x], \omega_\lambda[p,y]] \le \lambda\rho[x,y]$ для любых $0 \le \lambda \le 1$, x, y, p из X.

Очевидно, $\rho[P_B[x], P_B[y]] = \rho[x,y]$ для всех $x, y \in B$. Докажем, что $\rho[P_B[x], P_B[y]] \le 2\rho[x,y]$ для всех $x, y \in X$. Пусть для определенности $\rho[p,y] > r$ и $0 < \rho[p,x] \le \rho[p,y]$.

Если $\rho[p,x] \le r$, то $\rho[P_B[x], P_B[y]] \le \rho[x,y] + \rho[y, P_B[y]] \le 2\rho[x,y]$. Если $\rho[p,x] > r$, то $\rho[P_B[x], P_B[y]] = \rho[\omega_\lambda[p,x], \omega_\lambda[p,z]]$, где точка $z \in [p,y]$ такая, что $\rho[p,z] = \rho[p,x]$ и $\lambda = \frac{r}{\rho[p,x]} < 1$. Тогда $\rho[\omega_\lambda[p,x], \omega_\lambda[p,z]] \le \lambda\rho[x,z] \le \rho[x,y] + \rho[y,z] \le 2\rho[x,y]$.

Докажем второе утверждение. Пусть для определенности $\rho[p,y] > r$ и $0 < \rho[p,x] \le \rho[p,y]$.

Если $\rho[p,x] \le r$, то необходимое неравенство следует из неравенства (i) леммы 2. Если $\rho[p,x] > r$, то $\rho[\omega_\lambda[p,x], \omega_\lambda[p,y]] \le \lambda\rho[x,y] < \rho[x,y]$, где $\lambda = \frac{r}{\rho[p,x]} < 1$. Но $\omega_\lambda[p,x] = P_B[x]$ и $\rho[p, \omega_\lambda[p,y]] \ge r$. Следовательно, из неравенства (i) леммы 2 получим $\rho[P_B[x], P_B[y]] \le \rho[\omega_\lambda[p,x], \omega_\lambda[p,y]]$. $\square$

Доказательство теоремы. A. Из условий теоремы получим $\beta[K_n, M] \le \beta[M_n, M] \le \alpha[M_n, M]$, $\beta[M, K_n] \le \beta[M, M_n] + \beta[M_n, K_n] = \beta[M, M_n] + R_\Sigma[M_n] \le 2\alpha[M, M_n]$ для каждого натурального n. Следовательно, $\alpha[K_n, M] \to 0$ $(n \to \infty)$.

B. Из условий теоремы следует, что найдется подпоследовательность $(S_N^m = \{y_1^m, \ldots, y_N^m\}) \subset (S_N^n)$, для которой существуют пределы $y_i^* = \lim\limits_{m\to\infty} y_i^m$ $(1 \le i \le N)$. Пусть $S_N^* = \{y_1^*, \ldots, y_N^*\}$. Тогда для каждого натурального m $\beta[M, S_N^*] \le \beta[M, M_m] + \beta[M_m, S_N^m] + \beta[S_N^m, S_N^*] \le \alpha[M, M_m] + R_N[M_m] + \beta[S_N^m, S_N^*]$. Из условия теоремы, леммы 1 и определения N-сети S_N^* вытекает, что правая часть полученного неравенства стремится к $R_N[M]$ при $m \to \infty$. Следовательно, S_N^* является наилучшей N-сетью для множества M. $\square$

Литература

1. Белобров П.К. *О чебышевской точке системы множеств* // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 6. – С. 18–24.
2. Белобров П.К. *К вопросу о чебышевском центре множества* // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 1. – С. 3–9.
3. Гаркави А.Л. *О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества* // УМН. – 1964. – Т. 19. – Вып. 6. – С. 139–145.
4. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
5. Лисковец О.А. *Некорректные задачи и устойчивость квазирешений* // Сиб. матем. журн. – 1969. – Т. 10. – № 2. – С. 373–385.
6. Куратовский К. *Топология.* – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
7. Гаркави А.Л. *О наилучшей сети и наилучшем сечении множества в нормированном пространстве* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1962. – Т. 26. – № 1. – С. 87–106.
8. Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений.* – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 304 с.
9. Сосов Е.Н. *Об аппроксимативных свойствах множеств в специальных метрических пространствах* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 6. – С. 81–84.
10. Sosov E.N. *On existence and uniqueness of Chebyshev center of bounded set in a special geodesic space* // Lobachevskii J. Math. – 2000. – V. 7. – P. 43–46.

Казанский государственный университет

Поступила 25.04.2002