

Задача 2. Калькулятор

Всероссийская олимпиада школьников по
информатике, 2017 г.

Региональный этап, 1-й тур, 04.02.2017

Университет г. Иннополис

Республика Татарстан

Задача 2. Калькулятор

С данным целым числом n выполняется последовательность операций по кнопкам: **A**, **B** и **C**.

По кнопке A число n делится на 2 и если число нечетное, то остаток отбрасывается.

Так, **результат операции A** для $n=80$ будет 40, а для $n=239$ равен 119.

По кнопке B к числу прибавляется 1, и результат делится на 2. Остаток от деления отбрасывается.

Например, **результат операции B** для $n=80$ равен 40, а для $n=239$ равен 120.

По кнопке C если число положительное, то из него вычитается 1 и результат делится на 2, остаток отбрасывается, а число 0 остается неизменным.

Например, **результат операции C** для $n=80$ равен 39, а для $n=239$ равен 119.

Пользователь ввел число n и собирается нажать суммарно в некотором порядке: на кнопку **A** a раз, на кнопку **B** – b раз, на кнопку **C** – c раз.

По введенным числам: n, a, b, c программа должна определить минимальный результат работы калькулятора R .

Входной файл – 4 разделенных одним пробелом целых числа: n, a, b, c ($1 \leq n \leq 1018, 0 \leq a, b, c \leq 60$).

Выходной файл — минимальное число R , которое может получиться в результате работы калькулятора.

Пример calc.in: 72 2 1 1

calc.out: 4

Пояснение к примеру – оптимальные действия пользователя: из числа 72 кнопкой **C** получить число 36, кнопкой **A** получить число 18, кнопкой **B** получить число 8, второй раз нажать на кнопку **A** и получить число 4.

Описание подзадач и системы оценивания

За подзадачу начисляются баллы, если успешно пройдены все тесты этой подзадачи и необходимых подзадач.

Подзадача	Баллы	Дополнительные ограничения	Необходимые подзадачи
-----------	-------	----------------------------	-----------------------

n		Дополнительные условия на a, b, c	
1	26	$1 \leq n \leq 10^9$	$0 \leq (a + b + c) \leq 7$
2	23	$1 \leq n \leq 10^{18}$, $c = 0$,	
3	24	$1 \leq n \leq 10^{18}$, $b = 0$,	
4	27	$1 \leq n \leq 10^{18}$,	1, 2, 3

По запросу сообщается результат окончательной проверки на каждом тесте.

Решение

- Самое простое в реализации решение этой задачи основано на идее динамического программирования.

Заметим, что все три описанные в условии операции являются монотонными (не убывают): для большего значения n результат не меньше (а для меньшего n – не больше).

- Рассмотрим значения $dp[i][j][k]$ – минимальное число, которое можно получить из числа n , нажав на кнопку A i раз, на кнопку B j раз и на кнопку C k раз. Тогда $dp[0][0][0] = n$, а ответ на задачу находится в значении $dp[a][b][c]$.
- Для всех значений i, j, k значение $dp[i][j][k]$ позволяет получить числа, которыми можно потенциально улучшить значения $dp[i+1][j][k]$, $dp[i][j+1][k]$ и $dp[i][j][k+1]$, рассмотрев результат действия операций A, B и C, соответственно.
- Приведем фрагмент кода на C++ для заполнения массива dp .

фрагмент кода на C++ для заполнения массива dp

```
dp[0][0][0] = n;
for (int i = 0; i <= a; i++) {
    for (int j = 0; j <= b; j++) {
        for (int k = 0; k <= c; k++) {
            if (i < a)
                dp[i+1][j][k] = min(dp[i+1][j][k], dp[i][j][k] / 2);
            if (j < b)
                dp[i][j+1][k] = min(dp[i][j+1][k], (dp[i][j][k]+1) / 2);
            if (k < c)
                dp[i][j][k+1] = min(dp[i][j][k+1], (dp[i][j][k]-1) / 2);
        }
    }
}
```

Альтернативным подходом может быть аккуратное рассмотрение действия описанных операций на битовое представление числа. При этом возможно построение жадных алгоритмов, ряд из которых работает лишь для $b = 0$ или $c = 0$ и позволяет решить подзадачи 2 и 3.

Для решения подзадачи 1 можно использовать полный перебор вариантов.

Альтернативным подходом может быть аккуратное рассмотрение действия описанных операций на битовое представление числа. При этом возможно построение жадных алгоритмов, ряд из которых работает лишь для $b = 0$ или $c = 0$ и позволяет решить подзадачи 2 и 3.

Для решения подзадачи 1:

n	Баллы	Дополнительные условия	на a, b, c
1	26	$1 \leq n \leq 109,$	$0 \leq (a + b + c) \leq 7$

можно использовать полный перебор вариантов.

Спасибо за внимание!