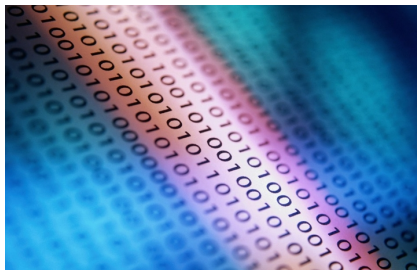


Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по информатике

Казань, 4-6 февраля 2017 г.

Задача «Гипертроичность»



- Идея задачи — Михаил Киндер
- Решение задачи — Михаил Киндер, Михаил Балакирев

Постановка задачи

- *Гипертроичное* представление числа n — представление n в виде суммы степеней 3, каждая степень 3^k появляется не более *трёх* раз.
- Для заданного числа n вычислить количество гипертроичных представлений ($1 \leq n \leq 2 \cdot 10^{18}$).

Решение

Пусть $T(n)$ — количество гипертроичных представлений числа n . Рассмотрим нескольких первых значений этой функции и убедимся, что.

$$T(3m + 1) = T(m), \quad T(3m + 2) = T(m).$$

Другими словами, если $n \not\equiv 3$, то $T(n) = T(n \operatorname{div} 3)$.

Действительно, гипертроичная запись числа n заканчивается одной или двумя единицами. Отбросив их, получим число, кратное 3. Разделив его на 3, получим гипертроичную запись числа $n \operatorname{div} 3$. Например, из равенства $20 = 9 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1$ получаем гипертроичную запись числа $6 = 3 + 1 + 1 + 1$.

Решение

Если же число $n \div 3$, $n = 3m + 3$, то его гипертроичная запись заканчивается 3 или суммой трёх единиц.

Если запись n оканчивается тройкой, разделим все слагаемые на 3, получим гипертроичную запись числа $n \operatorname{div} 3 = m + 1$.

Если же запись числа n заканчивается суммой трёх единиц, то, отбросив одну единицу, мы получим гипертроичное представление числа $3m + 2$, причем $T(3m + 2) = T(m)$.

Итак, для числа $n = 3m + 3$ получаем

$$T(3m + 3) = T(m + 1) + T(m).$$

Решение. Подзадача 1

- Для вычисления $T(n)$ воспользуемся рекурсивной функцией.
- Это решение будет проходить по времени все тесты первой группы: $1 \leq n \leq 10^{16}$.

Решение. Подзадача 2

- Для ускорения вычисления функции $T(n)$ проведем нехитрую оптимизацию. Воспользуемся идеей динамического программирования — будем запоминать ранее вычисленные значения $T(n)$ для всех $n \leq 10^6$.
- Для рекурсивного вычисления $T(n)$ при $n > 10^6$ будем использовать ранее сохранённые значения функции T .
- Это решение будет проходить по времени все тесты первой и второй группы, $1 \leq n \leq 2 \cdot 10^{18}$.

Вопросы?