Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по информатике

Казань, 4-6 февраля 2017 г.

Задача «Размещение данных». Постановка задачи

- Задан неориентированный граф из n вершин и m рёбер. Требуется пометить такое *минимальное* число вершин k, что при удалении любого ребра существует путь от каждой вершины до одной из помеченных.
- Требуется также определить число способов пометить таким образом k вершин $(1 \leqslant n, m \leqslant 200\,000)$.

Решение. Подзадача 1

- В подзадаче 1 рассматриваются графы с небольшим числом вершин и рёбер: $1 \leqslant n \leqslant 10, 1 \leqslant m \leqslant 45$.
- Для ее решения сделаем полный перебор всех множеств и для каждого из них проверим, подходит ли оно.

Решение. Подзадача 1

- В подзадаче 1 рассматриваются графы с небольшим числом вершин и рёбер: $1 \leqslant n \leqslant 10, 1 \leqslant m \leqslant 45$.
- Для ее решения сделаем полный перебор всех множеств и для каждого из них проверим, подходит ли оно.

Решение. Подзадача 2

- В подзадаче 2 входные данные связаны условием $m = n - 1$. Связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, является **деревом**.
- Оптимальный способ пометить вершины только один: пометить все листья дерева — вершины степени 1.

Доказательство

Не пометить лист нельзя, после удаления ребра, соединяющего этот лист с деревом, из него нельзя будет достичь никакой другой вершины.

С другой стороны, после удаления любого ребра в обеих получившихся компонентах связности остается хотя бы один из листьев исходного дерева, поэтому всех отмеченных листьев достаточно.

Решение. Подзадача 2

- В подзадаче 2 входные данные связаны условием $m = n - 1$. Связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, является **деревом**.
- Оптимальный способ пометить вершины только один: пометить все листья дерева — вершины степени 1.

Доказательство

Не пометить лист нельзя, после удаления ребра, соединяющего этот лист с деревом, из него нельзя будет достичь никакой другой вершины.

С другой стороны, после удаления любого ребра в обеих получившихся компонентах связности остается хотя бы один из листьев исходного дерева, поэтому всех отмеченных листьев достаточно.

Решение. Подзадача 2

- В подзадаче 2 входные данные связаны условием $m = n - 1$. Связный граф, у которого число рёбер на единицу меньше числа вершин, является **деревом**.
- Оптимальный способ пометить вершины только один: пометить все листья дерева — вершины степени 1.

Доказательство

Не пометить лист нельзя, после удаления ребра, соединяющего этот лист с деревом, из него нельзя будет достичь никакой другой вершины.

С другой стороны, после удаления любого ребра в обеих получившихся компонентах связности остается хотя бы один из листьев исходного дерева, поэтому всех отмеченных листьев достаточно.

Полное решение

Мост

Мост — это ребро, после удаления которого граф теряет связность.

- При удалении любого ребра, не являющегося мостом, граф остается связным. Поэтому если отмечена хотя бы одна вершина, она будет достижима из любой другой. Значит, помеченные вершины только **мосты**.
- Удалим все мосты и сожмём в одну вершину каждую компоненту связности. После этого вернем мосты. Получившийся граф — **дерево**, а для него помеченными вершинами должны быть все листья.

Полное решение

- Листья дерева соответствуют компонентам связности, полученным после удаления мостов. Поэтому для решения задачи нужно выбрать любую вершину в каждой такой компоненте связности и пометить её.
- Итак, количество помеченных вершин k равно числу компонент связности, которые получаются после удаления мостов.
- Число способов выбрать k вершин равно произведению размеров этих компонент связности.

Решение. Подзадачи 3 и 4

- Для решения подзадачи 3 достаточно найти мосты перебором всех рёбер графа и соответствующей проверкой на связность компонент после удаления.
- Для решения подзадачи 4 применим эффективный алгоритм поиска мостов в графе за время $O(n+m)$. (Кормен Т., Лейзерсон Ч. и др. *Алгоритмы. Построение и анализ*, 2005, гл. 22.)

Вопросы?