ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 6 (493)

УДК 517.956

К.Б. САБИТОВ, С.Л. ХАСАНОВА

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПРОИЗВОДНОЙ ПО НОРМАЛИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{1.1}$$

где λ — комплексный параметр, в области D, ограниченной кусочно-гладкой кривой Γ, расположенной в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(1,0)$ и $B(0,1)$, и характеристиками AC $(x + y = 0)$ и CB $(x - y = 1)$ уравнения (1.1) при $y < 0$.

Обозначим $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$. В области D для уравнения (1.1) поставим следующую задачу.

Спектральная задача (задача TN_λ). *Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{1.2}$$

$$Lu(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0, \ (x,y) \in \Gamma, \tag{1.4}$$

$$u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in AC, \tag{1.5}$$

где $\frac{\partial}{\partial N}$ — производная по нормали к границе Γ области D_+.

В [1], [2] обнаружены важные приложения краевой задачи с производной по нормали в граничном условии (задача TN) в трансзвуковой газодинамике. А.В. Бицадзе [3] исследовал задачу TN для уравнения (1.1) при $\lambda = 0$. В [4] изучена задача TN для уравнения (1.1) при $\lambda = -1$. В ([5], гл. II, § 6) доказана корректность этой задачи для уравнения

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > 0.$$

В данной работе в области D специального вида найдены собственные значения задачи TN_λ и построена соответствующая система собственных функций. Найденная система собственных функций исследована на полноту в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом в смешанной области. Затем на основании системы собственных функций задачи TN_λ построены в виде суммы ряда решения задачи TN для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева–Бицадзе. Ранее аналогичные исследования по задаче Трикоми, Геллерстедта были проведены в [6]–[8].

2. Построение системы собственных функций задачи TN_λ и исследование на полноту

Решение задачи Дарбу для уравнения (1.1) с условиями (1.5) и

$$u_y(x,0)=\nu(x),\quad 0<x<1,$$

в области D_- определяется формулой [9]

$$u(x,y)=\int_0^{x+y}\nu(t)J_0\big[\sqrt{\lambda(x+y-t)(x-y-t)}\,\big]dt, \tag{2.1}$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя, $\sqrt{\lambda}>0$ *при* $\lambda>0$.

Полагая в формуле (2.1) $y=0$, имеем

$$u(x,0)=\int_0^{x}u_y(t,0)J_0\big[\sqrt{\lambda}(x-t)\big]dt,\quad 0\le x\le 1. \tag{2.2}$$

Таким образом, задача TN_λ сведена к новой нелокальной эллиптической задаче на собственные значения в области D_+: найти значения параметра λ и соответствующие им собственные функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям (1.2)–(1.4) и (2.2).

В общем случае, т. е. когда кривая Γ является произвольной, не удается пока найти решение указанной нелокальной задачи, поэтому рассмотрим случай, когда область D_+ является сектором с центром в точке A и радиусом $r=1$: $0<\varphi<\varphi_0\le\pi$, $0<r<1$.

В области D_+ введем полярные координаты $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $0<\varphi<\varphi_0$, $0<r<1$. В полярных координатах (r,φ), разделяя переменные $u(x,y)=v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{r^2}\right)R(r)=0,\quad 0<r<1, \tag{2.3}$$

$$R(0)=0,\quad R'(1)=0, \tag{2.4}$$

$$\Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\quad 0<\varphi<\varphi_0, \tag{2.5}$$

$$\Phi'(\varphi_0)=0, \tag{2.6}$$

$$R(x)\Phi(0)=\Phi'(0)\int_0^x t^{-1}R(t)J_0\big[\sqrt{\lambda}(x-t)\big]dt,\quad 0\le x\le 1. \tag{2.7}$$

Известно, что решением уравнения (2.3), удовлетворяющим первому условию из (2.4), является функция Бесселя

$$R(r)=J_\mu(\sqrt{\lambda}r),\quad \operatorname{Re}\mu>0. \tag{2.8}$$

Подставляя функцию (2.8) в равенство (2.7) и вычисляя интеграл по формуле [10]

$$\int_0^a\frac{1}{x}J_\varkappa(ca-cx)J_\nu(cx)dx=\frac{1}{\nu}J_{\varkappa+\nu}(ac),\quad a,\operatorname{Re}\nu>0,\quad \operatorname{Re}\varkappa>-1,$$

получим второе граничное условие для определения функции $\Phi(\varphi)$

$$\Phi'(0)-\mu\Phi(0)=0. \tag{2.9}$$

Решая краевую задачу (2.5), (2.6), (2.9), находим

$$\Phi_n(\varphi)=C_n(\cos\mu_n\varphi+\sin\mu_n\varphi), \tag{2.10}$$

где $C_n=\mathrm{const}\ne 0$, $n=1,2,\dots$,

$$\mu_n=\frac{\pi}{\varphi_0}\left(n-\frac{3}{4}\right),\quad n=1,2,\dots \tag{2.11}$$

Так как функция (2.8) удовлетворяет второму условию из (2.4), то

$$\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\sqrt{\lambda}) = 0. \tag{2.12}$$

Из теории бесселевых функций ([11], с. 530) известно, что функция Бесселя $\sqrt{\lambda}J'_{\mu_n}(\lambda)$ при $\mu_n > -1$ имеет только вещественные нули. Тогда, обозначая m-й корень уравнения (2.12) через $\alpha_{n,m}$, получим собственные значения задачи TN_λ

$$\lambda_{n,m} = \alpha^2_{n,m}, \quad n, m = 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

На основании формул (2.8), (2.10), (2.13) найдем собственные функции задачи TN_λ в области D_+

$$u_{n,m}(x, y) = v_{n,m}(r, \varphi) = c_{n,m}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}r)(\cos\mu_n\varphi + \sin\mu_n\varphi). \tag{2.14}$$

Для построения собственных функций в области D_- можно воспользоваться формулой (2.1), но из-за громоздкости такого подхода воспользуемся методом, предложенным в [12]. Для этого в области D_- введем новые переменные

$$\sigma = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad \theta = -\frac{y^2}{x^2 - y^2}.$$

Тогда в координатах (σ, θ) уравнение (1.1) примет вид

$$4\theta(1-\theta)u_{\theta\theta} + 4\left(\frac{1}{2} - \theta\right)u_\theta + \sigma^2 u_{\sigma\sigma} + \sigma u_\sigma + \lambda\sigma^2 u = 0.$$

Разделяя переменные $u(\sigma, \theta) = Q(\theta)P(\sigma)$, получим

$$P''(\sigma) + \frac{1}{\sigma}P'(\sigma) + \left(\lambda - \frac{\rho^2}{\sigma^2}\right)P(\sigma) = 0, \quad 0 < \sigma < 1, \tag{2.15}$$

$$\theta(1-\theta)Q''(\theta) + \left(\frac{1}{2} - \theta\right)Q'(\theta) + \rho^2 Q(\theta) = 0. \tag{2.16}$$

Решением уравнения (2.15) является функция

$$P(\sigma) = J_\rho(\sqrt{\lambda}\sigma), \quad \operatorname{Re}\rho > 0. \tag{2.17}$$

Уравнение (2.16) является гипергеометрическим уравнением ([13], с. 69). Его общее решение определяется формулой

$$Q(\theta) = k_1(1-\theta)^{\rho/2}\left[\mathrm{F}\left(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\theta}{\theta-1}\right) + k_2\mathrm{F}\left(\frac{\rho}{2}, \frac{1+\rho}{2}, 1+\rho; \frac{1}{1-\theta}\right)\right]. \tag{2.18}$$

На основании известных формул ([13], с. 110) равенству (2.18) придадим более простой вид

$$Q(\theta) = k_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2} + k_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}. \tag{2.19}$$

Тогда в силу (2.17) и (2.19) найдем семейство решений уравнения (1.1) в области D_-

$$u(x, y) = Q(\sigma)P(\theta) = \left[k_1\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2} + k_2\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}\right]J_\rho\big[\sqrt{\lambda(x^2 - y^2)}\,\big], \tag{2.20}$$

где $\operatorname{Re}\rho \geq 0$, k_1 и k_2 — произвольные постоянные.

Из формулы (2.14) вычислим

$$\tau_{n,m}(x) = u_{n,m}(x, 0) = c_{n,m}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}x), \tag{2.21}$$

$$\nu_{n,m}(x) = \frac{\partial}{\partial y}u_{n,m}(x, 0) = c_{n,m}\mu_n x^{-1}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}x). \tag{2.22}$$

Если в формуле (2.20) положить $\rho=\mu_n$, $\lambda=\alpha^2_{n,m}$, $k_1=0$, $k_2=c_{n,m}$, то определится решение задачи Коши для уравнения (1.1) в области D_- с краевыми условиями (2.21) и (2.22). Следовательно, система собственных функций задачи TN_λ в области D_- имеет вид

$$u_{n,m}(x,y)=c_{n,m}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}J_{\mu_n}\big[\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}\,\big]. \tag{2.23}$$

Таким образом, объединяя формулы (2.14) и (2.23), получим систему собственных функций задачи T_λ в области D

$$u_{n,m}(x,y)=\begin{cases}c_{n,m}J_{\mu_n}\big(\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2+y^2)}\big)(\cos\mu_n\varphi+\sin\mu_n\varphi), & (x,y)\in D_+;\\ c_{n,m}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}J_{\mu_n}\big(\sqrt{\lambda_{n,m}(x^2-y^2)}\,\big), & (x,y)\in D_-.\end{cases} \tag{2.24}$$

Теорема 1. *Система собственных функций (2.24) задачи TN_λ полна в $\mathrm{L}_2(D_+)$.*

Доказательство. Допустим, что в $\mathrm{L}_2(D_+)$ существует функция $F(x,y)$ такая, что

$$\iint\limits_{D_+}F(x,y)u_{n,m}(x,y)dx\,dy=0 \tag{2.25}$$

для всех $n,m=1,2,\ldots$ Покажем, что $F(x,y)=0$ почти всюду в D_+. В интеграле (2.25) перейдем в полярную систему координат $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда с учетом (2.24) получим

$$0=\int_0^1\int_0^{\varphi_0}f(r,\varphi)J_{\mu_n}\big(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\big)(\cos\mu_n\varphi+\sin\mu_n\varphi)r\,d\varphi\,dr=$$
$$=\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{\varphi_0}f(r,\varphi)J_{\mu_n}\big(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\big)\sin\left(\mu_n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)r\,d\varphi\,dr.$$

Произведем замену $\varphi=\frac{\varphi_0}{\pi}\theta$, тогда, полагая $f(r,\varphi)=f(r,\varphi_0\theta/\pi)=g(r,\theta)$, $\lambda_n=n-3/4$, получим

$$\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{\varphi_0}f(r,\varphi)J_{\mu_n}\big(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\big)\sin\left(\mu_n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)r\,d\varphi\,dr=$$
$$=\frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi}\int_0^1\int_0^{\pi}g(r,\theta)J_{\mu_n}\big(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\big)\sin\left(\lambda_n\theta+\frac{\pi}{4}\right)r\,d\theta\,dr=$$
$$=\frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi}\int_0^1F_n(r)J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda_{n,m}}r\right)r\,dr=0, \tag{2.26}$$

где

$$F_n(r)=\int_0^{\pi}g(r,\theta)\sin\left(\lambda_n\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta.$$

Из (2.26) имеем, что для функции $F_n(r)$ все коэффициенты ряда Фурье–Бесселя равны нулю, поэтому из теоремы Юнга [11] следует, что $F_n(r)\equiv0$ $(n=1,2,\ldots)$, если интеграл $\int\limits_0^1\sqrt{r}|F_n(r)|dr$ существует и абсолютно сходится. В самом деле, из неравенства Коши–Буняковского

$$\int_0^1\sqrt{r}|F_n(r)|dr\le\left(\int_0^1r\,dr\int_0^1\left|\int_0^{\pi}g(r,\theta)\sin(\lambda_n\theta+\pi/4)d\theta\right|^2dr\right)^{1/2}\le$$
$$\le\frac{\pi}{\sqrt{2}\varphi_0}\sqrt{\int_0^{\pi}\sin^2(\lambda_n\theta+\frac{\pi}{4})d\theta}\sqrt{\int_0^1\int_0^{\pi}g^2(r,\theta)d\theta\,dr}=C\|F\|_{\mathrm{L}_2(D_+)}<+\infty,\quad C=\mathrm{const}>0,$$

поэтому

$$\int_0^{\pi}g(r,\theta)\sin(\lambda_n\theta+\pi/4)d\theta=0 \tag{2.27}$$

для всех $n = 1, 2, \dots$ при любом $r \in (0, 1)$. Из результатов [14] следует, что система синусов $\{\sin(\lambda_n\theta + \pi/4)\}$ образует базис в $L_2(0, \pi)$. Тогда система функций $\{\sin(\lambda_n\theta + \pi/4)\}$ полна в $L_2(0, \pi)$. Поэтому при каждом r в силу (2.27) множество тех θ, для которых $g(r, \theta) \neq 0$, имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что $g(r, \theta) = 0$ почти всюду в D_+.

Теорема 2. *Если $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$, то система собственных функций* (2.24) *задачи TN_λ полна в $L_2(D_-)$. Если $\varphi_0 \in [\pi/2, \pi]$, то подсистема системы собственных функций* (2.24) *задачи TN_λ, начиная с номера $n = 2, 3, \dots$, полна в $L_2(D_-)$.*

Доказательство. Допустим, что существует функция $F(x, y) \in L_2(D_-)$ такая, что

$$\iint\limits_{D} F(x, y) u_{n,m}(x, y) dx\, dy = 0 \tag{2.28}$$

для всех $n, m = 1, 2, \dots$ Покажем, что $F(x, y) = 0$ почти всюду в D_-. Проведем в (2.28) замену переменных $2x = \xi + \eta$, $2y = \xi - \eta$. Тогда область D_- перейдет в область $\Delta = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \xi < \eta < 1\}$, а интеграл (2.28) запишется в виде

$$\iint\limits_{\Delta} f(\xi, \eta) v_{n,m}(\xi, \eta) d\xi\, d\eta = 0, \tag{2.29}$$

где $f(\xi, \eta) = F(x, y)$, $v_{n,m}(\xi, \eta) = u_{n,m}(x, y)$. Учитывая (2.24), преобразуем интеграл (2.29)

$$0 = \int_0^1 d\eta \int_0^\eta f(\xi, \eta) \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{\mu_n/2} J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}\xi\eta}) d\xi.$$

Полагая во внутреннем интеграле $\xi = \eta t$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$0 = \int_0^1 t^{\mu_n/2} dt \int_0^1 f(\eta t, \eta) J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}\eta^2 t}) \eta d\eta.$$

Затем, заменяя $\eta\sqrt{t} = r$, $t = s^2$ и меняя порядок интегрирования, имеем

$$0 = \int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}} r) r\, dr \int_r^1 s^{\mu_n - 1} f(rs, r/s) ds.$$

Из последнего равенства для функции

$$F_n(r) = \int_r^1 f(rs, r/s) s^{\mu_n - 1} ds, \quad 0 \le r \le 1, \quad n \in \mathrm{N},$$

видно, что все коэффициенты ряда Фурье–Бесселя равны нулю, поэтому из теоремы Юнга следует

$$\int_r^1 f(rs, r/s) s^{\mu_n - 1} ds = 0$$

для всех $n \in \mathrm{N}$ при каждом $r \in [0, 1]$.

Рассмотрим систему функций $\{s^{\mu_n - 1}\}$. По теореме Мюнца ([15], с. 53) условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} = \infty, \quad -\frac{1}{p} < m_1 < m_2 < \cdots,$$

необходимо и достаточно для полноты $\{x^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_p[a, b]$, $a \ge 0$, $p > 1$. В нашем случае при $p = 2$, $m_k = \mu_k - 1$ необходимым и достаточным условием полноты системы функций $\{s^{\mu_n - 1}\}_{n=1}^{\infty}$ является условие $\mu_1 - 1 > -1/2$. Поскольку $\mu_n = \frac{\pi}{\varphi_0}(n - 3/4)$, то система $\{s^{\mu_n - 1}\}_{n=1}^{\infty}$ полна в L_2 при $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$. Если же $\varphi_0 \in [\pi/2, \pi]$, то подсистема системы $\{s^{\mu_n - 1}\}_{n=2}^{\infty}$ полна в L_2. Тогда в силу этой полноты имеем, что при каждом r множество тех s, для которых $f(rs, r/s) \neq 0$, имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что $f(rs, r/s) = 0$ почти всюду в $D_-^* = \{(s, r) : r < s < 1,\ 0 < r < 1\}$ и в области D_-. $\square$

Теорема 3. *Система собственных функций (2.24) задачи TN_λ не полна в* $\mathrm{L}_2(D)$.

Доказательство. В области D рассмотрим функцию

$$F(x,y)=\begin{cases}F_1(x,y), & (x,y)\in D_+;\\ F_2(x,y), & (x,y)\in D_-\end{cases}$$

из $\mathrm{L}_2(D)$ и интеграл

$$J=\iint\limits_D F(x,y)u_{n,m}(x,y)dx\,dy=$$
$$=\iint\limits_{D_+} F_1(x,y)u_{n,m}(x,y)dx\,dy+\iint\limits_{D_-} F_2(x,y)u_{n,m}(x,y)dx\,dy=i_1+i_2. \quad (2.30)$$

В интеграле i_1, переходя к полярным координатам $(r,\frac{\varphi_0}{\pi}\theta)$, получим

$$i_1=\frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi}c_{n,m}\int_0^1\int_0^\pi f_1\left(r,\frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right)J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}r}\,)\sin\left(\lambda_n\theta+\frac{\pi}{4}\right)r\,d\theta\,dr=$$
$$=\frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi}c_{n,m}\int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}r)r\,dr\int_0^\pi f_1\left(r,\frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right)\sin(\lambda_n\theta+\pi/4)d\theta, \quad (2.31)$$

где $\lambda_n=n-\frac{3}{4}$, $n=1,2,\ldots$, $f_1(r,\frac{\varphi_0}{\pi}\theta)=F_1(x,y)$. Интеграл i_2 преобразуем к виду

$$i_2=c_{n,m}\int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}r)r\,dr\int_r^1 s^{\mu_n-1}f_2(rs,r/s)ds, \quad (2.32)$$

где $f_2(\xi,\eta)=F_2(x,y)$. Теперь, подставляя (2.31) и (2.32) в (2.30), получим

$$J=c_{n,m}\int_0^1 J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}r)r\times$$
$$\times\left[\frac{\sqrt{2}\varphi_0}{\pi}\int_0^\pi f_1\left(r,\frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right)\sin(\lambda_n\theta+\pi/4)d\theta+\int_r^1 s^{\mu_n-1}f_2(rs,r/s)ds\right]dr. \quad (2.33)$$

Следуя [12], рассмотрим функции

$$f_1\left(r,\frac{\varphi_0}{\pi}\theta\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}\varphi_0}\sum_{k=1}^\infty\left[\frac{r^{\mu_k}}{\mu_k}-\frac{r^{\mu_k+1}}{\mu_k+1}-\frac{1}{\mu_k(\mu_k+1)}\right]h_k(\varphi), \quad (2.34)$$
$$f_2(rs,r/s)=1-s, \quad (2.35)$$

где $h_k(\varphi)$ — биортогональная система относительно системы синусов $\sin(\lambda_n\theta+\pi/4)$, $n=1,2,\ldots$, имеющая вид [14]

$$h_k(\theta)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos\theta/2)^{-1}}{(\operatorname{tg}\theta/2)^{1/2}}\sum_{n=1}^k(\sin n\theta)\mathrm{B}_{k-n}, \quad (2.36)$$
$$\mathrm{B}_l=\sum_{m=0}^l C_{1/2}^{l-m}C_{1/2}^m(-1)^{l-m},\quad C_l^n=\frac{l(l-1)\cdots(l-n+1)}{n!}.$$

Поскольку $h_k(\varphi)$ равномерно ограничена по k [14], ряд (2.34) при любом $r\le 1$ сходится равномерно. Подставляя функции (2.34), (2.35) в (2.33), получим, что существует функция $F(x,y)\in\mathrm{L}_2(D)$ и $F(x,y)\ne 0$ в D такая, что интеграл $J=0$. $\square$

3. Построение решения краевой задачи TN для уравнения Лаврентьева–Бицадзе

Рассмотрим уравнение

$$Bu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0 \tag{3.1}$$

в области D, когда область D_+ есть сектор единичного радиуса с центром в начале координат: $0 < \varphi < \varphi_0 \le \pi$, $0 < r < 1$.

Задача TN**.** *Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma_0 \cup AK) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{3.2}$$

$$Bu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3.3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{AK} = 0, \tag{3.4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma_0} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\varphi), \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{3.5}$$

$$u\big|_{AC} = 0,$$

где f — заданная достаточно гладкая функция.

Решая задачу Дарбу для уравнения (3.1) в области D_- с условиями

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1], \quad u(x, -x) = 0, \quad x \in [0, 1/2], \tag{3.6}$$

можно получить соотношение на отрезке AB оси $y = 0$

$$u_x(x, 0) - u_y(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1). \tag{3.7}$$

Теперь решим в области D_+ следующую смешанную задачу для уравнения Лапласа: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (3.2)–(3.5) и (3.7).

Переходя к полярным координатам (r, φ) и разделяя переменные $u(x, y) = v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\mu^2}{r^2}R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{3.8}$$

$$R(0) = 0, \tag{3.9}$$

$$\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \tag{3.10}$$

$$\Phi'(\varphi_0) = 0, \tag{3.11}$$

$$R'(x)\Phi(0) - \frac{R(x)}{x}\Phi'(0) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{3.12}$$

где $\mu \ne 0$ — постоянная разделения.

Решением уравнения (3.8), удовлетворяющего условию (3.9), является функция

$$R(r) = r^{\mu}, \quad \mu > 0. \tag{3.13}$$

Подставляя функцию (3.13) в условие (3.12), получим

$$\mu\Phi(0) - \Phi'(0) = 0. \tag{3.14}$$

Решая краевую задачу (3.10), (3.11), (3.14), находим

$$\Phi_n(\varphi) = C_n \sin\left(\mu_n\varphi + \pi/4\right),$$

где μ_n определяется по формуле (2.11).

Следовательно, функции вида

$$v_n(r,\varphi) = C_n r^{\mu_n} \sin(\mu_n\varphi + \pi/4)$$

удовлетворяют в области D_+ условиям (3.2)–(3.4) и (3.7).

Решение задачи (3.2)–(3.5) и (3.7) в области D_+ будем искать в виде суммы ряда

$$u(x,y) = v(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n r^{\mu_n} \sin(\mu_n\varphi + \pi/4)\,. \tag{3.15}$$

При любом $r \le r_0 < 1$ ряд (3.15) сходится равномерно и допускает почленное дифференцирование по переменным r и φ любое число раз, за исключением точки $(0,0)$.

Предположим, что ряд (3.15) допускает почленное дифференцирование по переменной r на множестве $0 < r \le 1$, $0 \le \varphi \le \varphi_0$. Так как ряд (3.15) удовлетворяет граничному условию (3.5), то

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n f_n \sin(\mu_n\varphi + \pi/4)\,, \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0. \tag{3.16}$$

В ряде (3.16) произведем замену $\varphi = \frac{\varphi_0}{\pi}\theta$. Тогда, полагая $f(\varphi) = f(\varphi_0\theta/\pi) = g(\theta)$, получим

$$g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n f_n \sin(\lambda_n\theta + \pi/4)\,, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad \lambda_n = n - 3/4. \tag{3.17}$$

Если функция $g(\theta) \in C^{\alpha}[0,\pi]$, $\alpha \in (0,1]$, то в силу результатов работы [14] ряд (3.17) сходится равномерно на $[0,\pi]$. Тогда ряд (3.16) также сходится равномерно на $[0,\varphi_0]$. Таким образом, сумма ряда (3.15) непрерывна на $\overline{D}_+$ и на множестве $0 < r \le 1$ допускает почленное дифференцирование по переменной r. Коэффициенты ряда f_n определяются по формуле

$$f_n = \frac{1}{\mu_n}\int_0^{\pi} g(\theta)h_n(\theta)d\theta = \frac{1}{n-3/4}\int_0^{\varphi_0} f(\varphi)h_n\left(\pi\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)d\varphi, \quad n = 1,2,\dots, \tag{3.18}$$

h_n определяются по формуле (2.36).

Таким образом, сумма ряда (3.15) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}_+$, в которой допускает почленное дифференцирование по r и φ за исключением точки $r = 0$, и на множестве $D_+ \cup AB$ имеет производные по r и φ любого порядка.

Полагая в (3.15) $\varphi = 0$, найдем функцию

$$v(r,\varphi)\big|_{\varphi=0} = u(x,0) = \tau(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^{\mu_n}, \tag{3.19}$$

которая принадлежит классу $C[0,1] \cup C^{\infty}(0,1)$. В области D_- решение задачи TN определяется как решение задачи Дарбу для уравнения (3.1) с данными (3.6), функция $\tau(x)$ определена формулой (3.19). Это решение имеет вид

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty} f_n (x+y)^{\mu_n}, \quad (x,y) \in D_-. \tag{3.20}$$

Поскольку $0 \le x + y \le 1$ в $\overline{D}_-$, то ряд (3.20) в $\overline{D}_-$ сходится равномерно и на множестве $D_- \cup AB$ допускает почленное дифференцирование по x и y любого порядка.

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Если* $f(\varphi) \in C^{\alpha}[0, \varphi_0]$, $\alpha \in (0,1]$, *то единственное решение задачи* TN *существует и имеет вид*

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n r^{\mu_n} \sin(\mu_n\varphi + \pi/4), & (r,\varphi) \in D_+; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n (x+y)^{\mu_n}, & (x,y) \in D_-, \end{cases}$$

где f_n *определяются по формуле* (3.18).

4. Построение решения задачи TN для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с комплексным параметром

Для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с комплексным параметром (1.1) в области D (см. п. 3) найдем решение следующей задачи.

Задача TN. *Найти функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma_0 \cup AK) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{4.1}$$

$$Lu(x,y) \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{4.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0, \tag{4.3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{AK} = 0, \tag{4.4}$$

$$u(x,y)\big|_{AC} = 0, \tag{4.5}$$

где f *– заданная достаточно гладкая функция.*

Используя собственные функции (2.24) задачи TN_λ, решение задачи (4.1)–(4.4) в области D_+ при $\lambda \ne \lambda_{n,m}$ будем искать в виде суммы ряда

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})} \sin(\mu_n\varphi + \pi/4), \quad 0 < \varphi \le \varphi_0, \tag{4.6}$$

где коэффициенты f_n определяются по формуле (3.18), а $\frac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}$ — ортонормированные собственные функции задачи для уравнения (2.3) с граничным условием $R(0) = 0$. На основании асимптотической формулы ([16], с. 217)

$$J_n(z) \sim \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

ряд (4.6) при любом $r \le r_0 < 1$ сходится равномерно, т. к. при больших n справедлива оценка

$$\left| f_n \frac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})} \sin(\mu_n\varphi + \pi/4) \right| \le M \frac{r^{\mu_n}}{\mu_n},$$

где $M = \text{const} > 0$. Можно также показать, что ряд (4.6) на $D_+ \cup AB$ допускает почленное дифференцирование по переменным r и φ любого порядка.

Удовлетворяя функцией (4.6) граничному условию (4.3), получим ряд

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n f_n \sin\left(\mu_n\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0,$$

равномерная сходимость которого обоснована в п. 3.

Для построения решения задачи TN в области D_- воспользуемся формулой (2.23).

Из формулы (4.6) находим

$$v(r,0)=u(x,0)=\tau(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}f_n\frac{J_{\mu_n}(x\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})},\quad x\in[0,1], \tag{4.7}$$

$$u_y(x,0)=\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{2}\,x}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n f_n\frac{J_{\mu_n}(x\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})},\quad x\in(0,1). \tag{4.8}$$

Если в формуле (2.23) положить $c_{n,m}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_n}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}$, то сумма ряда от функций $u_{n,m}(x,y)$ по индексу n определяет решение задачи Коши для уравнения (1.1) в области D_- с краевыми условиями (4.7) и (4.8)

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}\frac{J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\,\right)}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 5. *Если $f(\varphi)\in C^{\alpha}[0,\varphi_0]$, $\alpha\in(0,1]$, то решение задачи (4.1)–(4.5) при всех $\lambda\neq\lambda_{n,m}$ существует и имеет вид*

$$u(x,y)=\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n\frac{J_{\mu_n}(r\sqrt{\lambda})}{J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})}\sin\left(\mu_n\varphi+\pi/4\right), & (r,\varphi)\in D_+;\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}\frac{J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right)}{J_{\mu_n}\left(\sqrt{\lambda}\right)}, & (x,y)\in D_-,\end{cases}$$

где $\lambda_{n,m}$ — собственные значения задачи TN_λ, f_n определяются по формуле (3.18).

5. Пространственная задача TN

Рассмотрим уравнение

$$LW\equiv W_{xx}+\operatorname{sgn}y\cdot W_{yy}+W_{zz}=0 \tag{5.1}$$

в области $G=D\times(0,\pi)$, где D — область плоскости R^2_{xy}, описанная в п. 3. Обозначим $S_0=\Gamma_0\times[0,\pi]$, $S_{AK}=AK\times[0,\pi]$, $z\in[0,\pi]$; $G_+=G\cap\{y>0\}$; $G_-=G\cap\{y<0\}$.

Задача TN. *Найти функцию $W(x,y,z)$, удовлетворяющую условиям*

$$\begin{gathered}W(x,y,z)\in C(\overline{G}\,)\cap C^1(G\cup S_0\cup S_{AK})\cap C^2(G_+\cup G_-),\\ LW(x,y,z)\equiv 0,\quad (x,y,z)\in G_+\cup G_-,\\ \left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_{S_0}=\left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=1}=F(\varphi,z),\quad 0<\varphi\le\varphi_0,\quad z\in[0,\pi],\\ \left.\frac{\partial W}{\partial N}\right|_{S_{AK}}=0,\\ W(x,y,z)\big|_{y=-x}=0,\quad x\in[0,1/2],\quad z\in[0,\pi],\\ W(x,y,z)\big|_{z=0}=W(x,y,z)\big|_{z=\pi}=0,\end{gathered} \tag{5.2}$$

где F — заданная достаточно гладкая функция.

В области G, разделив в уравнении (5.1) переменные $W(x,y,z)=u(x,y)Z(z)$, получим

$$u(x,y)\in C(\overline{D}\,)\cap C^1(D\cup\Gamma_0\cup AK)\cap C^2(D_+\cup D_-), \tag{5.3}$$

$$u_{xx}+\operatorname{sgn} y\cdot u_{yy}-\mu^2 u=0,\quad (x,y)\in D, \tag{5.4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{AK}=0, \tag{5.5}$$

$$u(x,y)\big|_{y=-x}=0,\quad x\in[0,1/2], \tag{5.6}$$

$$Z''+\mu^2 Z=0,\quad 0\le z\le\pi,\quad Z(0)=Z(\pi)=0, \tag{5.7}$$

где $\mu=\mathrm{const}>0$.

Задача (5.3)–(5.6) есть задача (4.1), (4.2), (4.4) и (4.5), где $\lambda=-\mu^2$. Полагая в формуле (2.1) $\lambda=-\mu^2$ и учитывая $J_\nu(ix)=i^\nu I_\nu(x)$, получим соотношение

$$u(x,0)=\mu^2\int_0^x u_y(t,0)I_0[\mu(x-t)]dt,\quad 0\le x\le 1, \tag{5.8}$$

где $I_0(t)$ — модифицированная функция Бесселя, позволяющее свести полученную задачу к нелокальной эллиптической задаче в области D_+ (см. п. 4).

В области D_+, разделяя переменные $u(x,y)=v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$, переходим к задаче

$$R_{rr}+\frac{1}{r}R_r-\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{r^2}\right)R=0,\quad 0<r<1, \tag{5.9}$$

$$R(0)=0,\quad |R'(1)|<+\infty, \tag{5.10}$$

$$\Phi''(\varphi)+\nu^2\Phi(\varphi)=0,\quad 0<\varphi<\varphi_0, \tag{5.11}$$

$$\Phi'(\varphi_0)=0, \tag{5.12}$$

$$\Phi(0)R(r)=\Phi'(0)\int_0^r t^{-1}R(t)I_0(\mu(r-t))dt,\quad 0<r<1. \tag{5.13}$$

Решением уравнения (5.11), удовлетворяющим условиям (5.10), является модифицированная функция Бесселя

$$R(r)=I_\nu(\mu r),\quad \operatorname{Re}\nu>0.$$

Подставив ее в равенство (5.13), получим второе граничное условие для определения функции $\Phi(\varphi)$

$$\nu\,\Phi(0)-\Phi'(0)=0. \tag{5.14}$$

Решениями уравнения (5.11), удовлетворяющими граничным условиям (5.12) и (5.14), являются функции

$$\Phi_k(\varphi)=C_k\sin\left(\mu_n\varphi+\pi/4\right),\quad C_k=\mathrm{const}\ne 0.$$

Таким образом, функции

$$u_k(x,y)=v_k(r,\varphi)=C_k I_{\mu_n}(\mu r)\sin\left(\mu_n\varphi+\pi/4\right)$$

определяют в области D_+ решения уравнения (5.4), удовлетворяющие условиям (5.5) и (5.8).

Решениями задачи (5.7) являются функции

$$Z_n(z)=B_n\sin nz,\quad B_n=\mathrm{const}\ne 0,\quad \mu=n=1,2,\dots$$

Решение задачи TN в области G_+ будем искать в виде суммы ряда

$$W(x,y,z)=V(r,\varphi,z)=\sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk}\sin nz\sin\left(\mu_n\varphi+\pi/4\right)\frac{I_{\mu_n}(nr)}{I_{\mu_n}(n)}. \tag{5.15}$$

Удовлетворив суммой ряда (5.15) граничному условию (5.2), имеем

$$\frac{\partial W}{\partial N}\Big|_{r=1} = \frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=1} = F(\varphi, z) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \mu_n f_{nk} \sin(\mu_n\varphi + \pi/4)\sin nz,$$

где коэффициенты f_{nk} находятся из разложения (см. п. 3)

$$P_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k f_{nk} \sin(\mu_k\varphi + \pi/4), \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0, \tag{5.16}$$

а функция $P_n(\varphi)$ определяется по формуле

$$P_n(\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(\varphi, z)\sin nz\, dz.$$

Если функция $F(\varphi, z)$ по переменной φ удовлетворяет на сегменте $[0, \varphi_0]$ условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha \le 1$, то функция $P_n(\varphi)$ также удовлетворяет с тем же показателем на сегменте $[0, \varphi_0]$ условию Гёльдера, поэтому ряд (5.16) сходится равномерно на $[0, \varphi_0]$.

Ряд (5.15) сходится равномерно в замкнутой области $\overline{G}_+$ и там допускает почленное дифференцирование по переменной r, за исключением отрезка $r = 0$, если функция $F(\varphi, z)$ в замкнутой области $0 \le \varphi \le \varphi_0$, $0 \le z \le \pi$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha < 1$ ([17], с. 364).

Решение задачи TN в области G_- имеет вид

$$W(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n,k=1}^{\infty} f_{nk} \sin nz \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2} \frac{I_{\mu_k}\left(n\sqrt{x^2-y^2}\right)}{I_{\mu_k}(n)}. \tag{5.17}$$

Итак, справедлива

Теорема 6. *Если функция $F(\varphi, z)$ в замкнутой области $0 \le \varphi \le \varphi_0$, $0 \le z \le \pi$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha < 1$, то существует решение задачи TN в области G и оно задается формулами* (5.15), (5.17).

Литература

1. Франкль Ф.И. *К теории сопел Лаваля* // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1945. – Т. 9. – № 5. – С. 387–422.
2. Франкль Ф.И. *К теории уравнения* $y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1946. – Т. 10. – № 2. – С. 135–166.
3. Бицадзе А.В. *О некоторых задачах смешанного типа* // ДАН СССР. – 1950. – Т. 70. – № 4. – С. 561–564.
4. Вострова Л.Е. *Смешанная краевая задача для уравнения* $u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} - u = 0$ // Учен. зап. Куйб. гос. пед. ин-та. – 1958. – Вып. 21. – С. 219–267.
5. Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа.* – М.: Наука, 1970. – 296 с.
6. Моисеев Е.И. *Решение задачи Трикоми в специальных областях* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 26. – № 1. – С. 93–103.
7. Сабитов К.Б., Карамова А.А. *Спектральные свойства решений задачи Трикоми для уравнений смешанного типа с двумя линиями изменения типа и их применения* // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2001. – Т. 65. – № 4. – С. 133–150.
8. Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н. *Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применение* // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – № 5. – С. 1147–1161.
9. Сабитов К.Б. *Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений.* I // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 6. – С. 1023–1032.

10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции.* – М.: Наука, 1983. – 750 с.
11. Ватсон Г.Н. *Теория бесселевых функций.* I. – М: Ин. лит., 1949. – 799 с.
12. Сабитов К.Б., Тихомиров В.В. *О построении собственных значений и функций одной газодинамической задачи Франкля* // Матем. моделир. – 1990. – Т. 2. – № 10. – С. 100–109.
13. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2. – М.: Наука, 1965. – 294 с.
14. Моисеев Е.И. *О базисности одной системы синусов* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 1. – С. 177–179.
15. Ахиезер Н.И. *Лекции по теории аппроксимации.* –М., 1965. – 407 с.
16. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. *Курс современного анализа.* Ч. II. *Трансцендентные функции.* – М.: Физматгиз, 1963. – 515 с.
17. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа.* Ч. II. – М.: Наука, 1998. – 448 с.

Стерлитамакский государственный педагогический институт, Стерлитамакский филиал Академии Наук Республики Башкортостан

Поступила
28.03.2002