И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

УДК 517.962.2

Е.В. АФИНОГЕНТОВА, В.Н. ЩЕННИКОВ

ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ ЛИНЕАРИЗАЦИИ СИСТЕМ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье в качестве развития работы [1] оценка погрешности линеаризации строится для систем конечно-разностных уравнений на основе второго метода Ляпунова с применением следующей дискретной теоремы сравнения [2].

Теорема 1. *Пусть скалярная функция $R(k,u)$ для всех $k \in N = \{0,1,2,\dots\}$, $0 \le u < \infty$, является неубывающей по u для любого фиксированного k. Тогда если $u(k)$ и $v(k)$ удовлетворяют отношениям*

$$v(k+1) \le R(k,v(k)),\ \ u(k+1) = R(k,u(k)), \quad k \in N,$$

то выполняется неравенство

$$v(k) \le u(k), \quad k \in N, \quad \textit{при условии, что} \ \ v(k_0) \le u(k_0).$$

1. Оценка погрешности линеаризации по всем переменным

Пусть в $\mathbf{R}^n$ задана система конечно-разностных уравнений

$$x(k+1) = Ax(k) + F(x(k))x(k) + r(k), \quad x(0) = x_0, \quad k \in N, \tag{1}$$

где A — постоянная матрица размерности $n \times n$, $F(x(k))$ — матрица размерности $n \times n$, $r(k)$ — n-мерный вектор,

$$\|F(x(k))\| \le h\|x(k)\|^\gamma, \quad \|r(k)\| \le B < \infty \ \text{ при } \ \|x(k)\| \le \rho.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма, $(h\&\gamma) > 0$, $\rho > 0$ — произвольное вещественное число.

Предполагается, что для линейной системы

$$\widetilde{x}(k+1) = A\widetilde{x}(k), \quad k \in N, \tag{2}$$

существует дискретная функция Ляпунова $V(x(k))$, удовлетворяющая неравенствам

а) $\|x(k)\| \le V(x(k)) \le M\|x(k)\|$, $M > 1$;

б) $|V(x''(k)) - V(x'(k))| \le M\|x''(k) - x'(k)\|$;

в) $V(\widetilde{x}(k+1)) - V(\widetilde{x}(k)) \le -\chi V(\widetilde{x}(k))$, $0 < \chi < 1$.

В [3] для систем вида (2) приведены условия существования функций Ляпунова, удовлетворяющих оценкам а)–в) с постоянными Красовского.

Линеаризованный вариант системы (1) имеет вид

$$t(k+1) = At(k) + r(k), \quad t(0) = x_0, \quad k \in N. \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon(k) ::= x(k) - t(k)$, $k \in N$ ($::=$ — "равно по определению"), есть погрешность линеаризации. Необходимо найти оценку нормы разности $\varepsilon(k)$, $k \in N$, решений системы (1) и (3). Сначала оценим $\|x(k)\|$, $k \in N$.

Для системы (1) выберем функцию Ляпунова $V(x(k))$, удовлетворяющую условиям а)–в). Первая разность функции $V(x(k))$ на решениях системы (1) имеет вид

$$V(Ax(k) + F(x(k))x(k) + r(k)) - V(x(k)) \le -\chi V(x(k)) + Mh\|x(k)\|^{\gamma+1} + MB, \quad k \in N. \tag{4}$$

Введем обозначение

$$V(x(k)) ::= v(k).$$

Тогда с учетом условия а) неравенство (4) приводится к виду

$$v(k+1) - v(k) \le -\chi v(k) + Mhv^{\gamma+1}(k) + MB \equiv \varphi(v(k)).$$

С применением теоремы 1 и второго метода Ляпунова доказывается

Теорема 2. *Если для линейной системы* (2) *выполнены условия* а)–в) *и, кроме того, уравнение*

$$-\chi u + Mhu^{\gamma+1} + MB = 0 \tag{5}$$

имеет решения $u^{(1)}$ *и* $u^{(2)}$ *такие, что* $0 \le u^{(1)} \le u^{(2)}$, *то при* $k \in N$ *справедливы оценки*

1) $\|x(k)\| \le \max\{M\|x(0)\|, u^{(1)}\} \equiv \Delta$;

2) $\|\varepsilon(k)\| < \dfrac{Mh\Delta^{\gamma+1}}{\chi}$.

Замечание 1. Так как $\varphi''(u) \ge 0$ в области $u \ge 0$, то для того чтобы уравнение (5) имело хотя бы одно решение в области $u \ge 0$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\varphi(u^*) \le 0, \tag{6}$$

где u^* — точка минимума функции $\varphi(u)$, которая определяется из уравнения

$$-\chi + Mh(\gamma+1)u^\gamma = 0 \;\Rightarrow\; u^* = \sqrt[\gamma]{\frac{\chi}{Mh(\gamma+1)}}.$$

Тогда условие (6) примет вид

$$-\chi \sqrt[\gamma]{\frac{\chi}{Mh(\gamma+1)}} + \frac{\chi}{\gamma+1}\sqrt[\gamma]{\frac{\chi}{Mh(\gamma+1)}} + MB \le 0.$$

Отсюда

$$B \le \frac{\gamma\chi}{M(\gamma+1)}\sqrt[\gamma]{\frac{\chi}{Mh(\gamma+1)}}. \tag{7}$$

Выполнение условия (7) обеспечит оценки 1) и 2) из теоремы 2.

2. Оценка погрешности линеаризации по части переменных

Представляя вектор $x(k)$ в виде $x(k) = (y(k), z(k))$, где $y(k) = (y_i(k)) = (x_i(k))$, $i = 1, 2, \dots, n_1$; $z(k) = (z_j(k)) = (x_j(k))$, $j = n_1+1, \dots, n$, систему (1) запишем следующим образом:

$$\begin{gathered} y(k+1) = Py(k) + L(y(k), z(k)) + f(k), \\ z(k+1) = Sy(k) + Qz(k) + D(y(k), z(k)) + g(k), \\ x(0) = x_0, \quad k \in N. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь P, S и Q — постоянные матрицы размерности $n_1 \times n_1$, $(n-n_1) \times n_1$ и $(n-n_1) \times (n-n_1)$ соответственно; $L(y(k), z(k))$, $D(y(k), z(k))$ — вектор-функции размерности n_1 и $(n-n_1)$ соответственно; $f(k)$ — n_1-мерный, $g(k)$ — $(n-n_1)$-мерный векторы, удовлетворяющие соотношениям

$$\|L(y(k), z(k))\| \le m\|y(k)\|^\alpha, \;\; \|f(k)\| \le q < \infty, \;\; \alpha > 1, \;\; (q.m) > 0;$$
$$\|D(y(k), z(k))\| \le d\|y(k)\|^\beta, \quad \|g(k)\| \le p < \infty, \;\; \beta > 1, \quad (d.p) > 0.$$

Оценим норму погрешности линеаризации $\varepsilon_y(k) = y(k) - \eta(k)$, $\varepsilon_z = z(k) - \nu(k)$, $k \in N$, где $\eta(k)$ и $\nu(k)$ — решения системы

$$\begin{aligned}&\eta(k+1) = P\eta(k) + f(k),\\ &\nu(k+1) = S\eta(k) + Q\nu(k) + g(k), \quad \tau(k) = (\eta(k), \nu(k)), \quad \tau(0) = x_0, \quad k \in N.\end{aligned}$$

Пусть для линейной системы

$$\begin{aligned}&\widetilde{y}(k+1) = P\widetilde{y}(k),\\ &\widetilde{z}(k+1) = S\widetilde{y}(k) + Q\widetilde{z}(k), \quad k \in N,\end{aligned} \tag{9}$$

существует дискретная функция Ляпунова $\widetilde{V}(x(k))$, удовлетворяющая неравенствам

а′) $\|y(k)\| \le \widetilde{V}(x(k)) \le \mu(\|y(k)\| + \|z(k)\|)$, $\mu > 1$;

б′) $|\widetilde{V}(x''(k)) - \widetilde{V}(x'(k))| \le \mu(\|y''(k) - y'(k)\| + \|z''(k) - z'(k)\|)$;

в′) $\widetilde{V}(A\widetilde{x}(k)) - \widetilde{V}(\widetilde{x}(k)) \le -\theta\widetilde{V}(\widetilde{x}(k))$, $0 < \theta < 1$, $\widetilde{x}(k) = (\widetilde{y}(k), \widetilde{z}(k))$.

В силу сделанных выше предположений для первой разности функции $V(x(k))$ на решениях системы (8) справедливо неравенство

$$\widetilde{V}(x(k+1)) - \widetilde{V}(x(k)) \le -\theta\widetilde{V}(x(k)) + \mu m\|y(k)\|^{\alpha} + \mu d\|y(k)\|^{\beta} + \mu(p+q)$$

или после введения обозначения $\widetilde{V}(x(k)) ::= \widetilde{v}(k)$

$$\widetilde{v}(k+1) - \widetilde{v}(k) \le -\theta\widetilde{v}(k) + \mu m\widetilde{v}^{\alpha}(k) + \mu d\widetilde{v}^{\beta}(k) + \mu(p+q).$$

С применением второго метода Ляпунова и теоремы 1 доказана

Теорема 3. *Если для линейной системы* (9) *выполнены условия* а′)–в′) *и уравнение*

$$-\theta w + \mu m w^{\alpha} + \mu d w^{\beta} + \mu(p+q) = 0 \tag{10}$$

в области $w \ge 0$ имеет решения $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ такие, что $0 \le w^{(1)} \le w^{(2)}$ и $\mu\|x(0)\| \le w^{(2)}$, то при $k \in N$ справедливы оценки

$$\|y(k)\| \le \delta, \ \|\varepsilon_y(k)\| \le \sigma + \sigma_k,$$

где

$$\delta = \max\{\mu\|x(0)\|, w^{(1)}\}, \quad \sigma = \frac{\mu(m\delta^{\alpha} + d\delta^{\beta})}{\theta}, \quad \sigma_k = (\|S\|\sigma + d\delta^{\beta})\frac{1 - \|Q\|^k}{1 - \|Q\|}.$$

Замечание 2. Пользуясь теми же соображениями, что и в случае системы (1), можно найти ограничения на p и q, при которых уравнение (10) имеет решение в области $w \ge 0$.

Замечание 3. Если $\|Q\| < 1$, то

$$\|\varepsilon_z(k)\| \le (\|S\|\sigma + d\delta^{\beta})\frac{1}{1 - \|Q\|} \equiv \widetilde{\sigma}, \quad k \in N,$$

и

$$\|\varepsilon(k)\| \le \sigma + \widetilde{\sigma}, \quad k \in N,$$

т. е. для $\varepsilon(k)$ существует оценка, не зависящая от k, подобная оценке 2) из теоремы 2.

Литература

1. Дарховский Б.С. *Оценка погрешности линеаризации* // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14. – № 7. – С. 1313–1316.
2. Sugiyama S. *Difference inequalities and their applications to stability problems* // Lect. Notes Math. – 1971. – № 243. – P. 1–15.
3. Персидский С.К. *Об устойчивости взаимосвязанных конечно-разностных систем* // Республиканск. межвед. науч. сб. Динам. системы. – Киев, 1989. – Вып. 8. – С. 68–71.

Мордовский государственный
университет

Поступили
первый вариант 19.01.1998
окончательный вариант 05.02.2002