

**Министерство образования и науки Российской Федерации
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

**КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
Специальность: 010101.65 - математика**

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(дипломная работа)**

**СВОЙСТВА ВЫЧИСЛИМЫХ
И ВЫЧИСЛИМО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ
ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ**

Работа завершена:

"__" _____ 2014 г. _____ (В.О. Смирнова)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой

"__" _____ 2014 г. _____ (М.М. Арсланов)

Заведующий кафедрой
доктор физико-математических наук, профессор
"__" _____ 2014 г. _____ (М.М. Арсланов)

Казань-2014

Содержание

Введение.....	3
1. Основные понятия.....	4
1.1. Вычислимые множества и числа.....	4
1.2. Вычислимо перечислимые множества и числа.....	5
1.3. Слабо вычислимые действительные числа.....	6
2. Некоторые свойства вычислимых чисел и множеств.....	7
3. Свойства слабо вычислимых действительных чисел.....	9
Заключение.....	14
Список литературы.....	15

Введение

Целью данной дипломной работы является изучение свойств вещественных чисел с точки зрения их алгоритмической вычислимости. Приведены несколько эквивалентных определений вычислимых чисел и изучены соотношения между ними.

В связи с целью работы также изучены свойства слабо вычислимых чисел.

Актуальность изучения вычислимых и вычислимо перечислимых действительных чисел обусловлена тем, что классы этих чисел в точности совпадают с классами чисел, вычислимых на компьютерах.

1. Основные понятия

Множество \mathbb{N} - множество натуральных чисел, \mathbb{Q} - множество рациональных чисел.

1.1. Вычислимые множества и числа

Определение 1. [1, гл.8] Последовательность называется последовательностью Коши, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbb{N}$, что из $n > N$ и $m > N$ следует выполнение неравенства $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Определение 2. [2] Действительное число a называется *вычислимым*, если существует последовательность Коши $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, которая эффективно сходится к a .

Определение 3. [2] Последовательность рациональных чисел $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ вычислима, если существуют вычислимые функции $a, b, c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что $r_n = (a(n) - b(n))/(c(n) + 1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ эффективно сходится, то есть выполняется неравенство $|r_{n+m} - r_n| < 2^{-n}$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$.

Свойство. Множество A называется *вычислимым*, если его характеристическая функция вычислима.

Определение 4. Пусть A - произвольное множество натуральных чисел. Функция $\chi : A \rightarrow \{0, 1\}$, определённая следующим образом:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

называется *характеристической функцией* множества A .

Если A некоторое подмножество \mathbb{N} , то определим действительное число $\alpha = 0.A$ следующим образом $\alpha = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$, где

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \in A \\ 0, & \text{если } a_i \notin A \end{cases}$$

Определение 5. Число α из интервала $[0, 1]$ называется *вычислимым*, если $\alpha = 0.A$, где A - вычислимое множество.

Определение 6. Последовательность $\{a_n\}_n$ вычислимо сходится к a , если существует вычислимая функция $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$, такая, что для любого рационального $\varepsilon > 0$ выполняется $\forall n > f(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$.

1.2. Вычислимо перечислимые множества и числа

Определение 7. Действительное число $0.A$ называется *вычислимым слева (справа)*, если существует возрастающая (убывающая) последовательность рациональных чисел, которая сходится к $0.A$. Вычислимые слева или справа вещественные числа называются вычислимо перечислимими (полувычислимими). Пусть C_1 - множество всех полувычислимых действительных чисел.

Определение 8. [3] Функция f называется частично вычислимой, если она может быть получена из исходных простейших функций $O(x) = 0, s(x) = x + 1, I_n^m(x_1, \dots, x_n) = x_m, 1 \leq m \leq n$, путем последовательного применения следующих операций: суперпозиции, примитивной рекурсии, минимизации аргумента.

Оператор суперпозиции. Пусть f - функция от n переменных, а g_1, \dots, g_m - упорядоченный набор функций от m переменных. Тогда результатом суперпозиции функций g_k в функцию f называется функция h от n переменных:

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Оператор примитивной рекурсии. [3] Пусть f - функция от n переменных, g - функция от $n+2$. Тогда результатом применения оператора примитивной рекурсии к f и g называется функция h от $n+1$ переменной:

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n, 0) &= f(x_1, \dots, x_n) \\ h(x_1, \dots, x_n, y+1) &= g(x_1, \dots, x_n, y, h(x_1, \dots, x_n, y)) \end{aligned}$$

Оператор минимизации аргумента. Пусть f - функция от n натуральных переменных. Тогда результатом применения оператора минимизации к функции f называется функция h от $n-1$ переменных:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \mu y [f(x_1, \dots, x_n, y) = 0].$$

То есть функция h возвращает минимальное значение последнего аргумента функции f , при котором её значение равно 0.

Определение 9. Множество A вычислимо перечислимо, если A является областью допустимых значений некоторой частично вычислимой функции.

1.3. Слабо вычислимые действительные числа

Определение 10. [2] Действительное число $0.A$ называется *слабо вычислимым*, если существуют два вычислимых слева действительных числа $0.B$ и $0.C$ такие, что $0.A = 0.B - 0.C$. Пусть C_2 - множество всех слабо вычислимых чисел. Здесь без ограничения общности можно предположить, что $C \subseteq B$. То есть, $0.A$ слабо вычислимо, если существует вычислимое слева число $0.B$ и вычислимое справа число $0.C$, для которых выполняется условие $0.A = 0.B - 0.C$.

Определение 11. Данна последовательность a_1, a_2, \dots, a_n . Скачком последовательности называется любая разность $a_{n+1} - a_n$ такая, что

$$|a_{n+1} - a_n| > 0.$$

Дадим другую характеристику слабо вычислимых действительных чисел с помощью слабой сходимости последовательностей.

Определение 12. [2] Последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n \in N}$ называется *слабо эффективно сходящейся*, если сумма её скачков $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ конечна.

2. Некоторые свойства вычислимых чисел и множеств

Теорема 2.1. Пусть B - вычислимое подмножество множества \mathbb{N} . Тогда $0.C = 0.N - 0.B$ - вычислимо перечислимое число.

Доказательство. Ясно, что $0.N = 0.1111\dots$. Тогда $0.C = 0.1111\dots - 0.\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\dots$

Таким образом, $0.C = 0.\beta_1, \beta_2, \beta_3\dots$, где

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \notin B \\ 0, & \text{если } i \in B \end{cases}.$$

Так как B - вычислимо, то $0.C$ - вычислимо перечислимо. \square

Теорема 2.2. Пусть A - вычислимо перечислимое множество, B - вычислимое подмножество множества A . Тогда $0.C = 0.A - 0.B$ - вычислимо перечислимое число.

Доказательство. Пусть $0.C = 0.\beta_1, \beta_2, \dots$. Так как $\beta_i = 1$ тогда и только тогда, когда $i \in A$ и $i \notin B$, а A - вычислимо перечислимо, то $0.C$ - вычислимо перечислимо. \square

Теорема 2.3. Пусть дано число $0.A$, где множество A - бесконечно, невычислимо и вычислимо перечислимо. Тогда найдется такое подмножество B множества A , что $0.A - 0.B$ будет невычислимо перечислимо.

Доказательство. Пусть W_0, W_1, \dots стандартная нумерация всех вычислимо перечислимых множеств. Для доказательства теоремы нужно для каждого $e \in \mathbb{N}$ удовлетворить требованию:

$$R_e : 0.A - 0.B \neq W_e.$$

Пусть $A = A_1 \cup A_2$, где $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, A_1 и A_2 - бесконечные, вычислимо перечислимые подмножества A .

По шагам организуем перечисление множества B .

На шаге 0, $B_0 = \emptyset$.

$s > 0$. Пусть $(s)_0 = e$, $(s)_0$ - показатель при p_0 в разложении s на простые множители, то есть, если $(s)_0 = e$, то $s = p_0^e \cdot p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_r^{e_r}$.

Удовлетворяем требование R_e . Делаем s шагов в перечислении W_e , получим $W_{e,s}$. Если $W_{e,s} \cap A_{1,s} = \emptyset$, то требование пока удовлетворено. В противном случае, существует $k (k \in W_{e,s} \cap A_{1,s})$. Перечисляем k в B_s . К концу конструкции $B = \bigcup_{s=0}^{\infty} B_s$. Очевидно, что $W_e \neq A - B$. \square

3. Свойства слабо вычислимых действительных чисел

Мы видели, что существуют такие вычислимые слева действительные числа 0.B и 0.C, разность которых 0.A = 0.B - 0.C не является ни вычислимым слева, ни вычислимым справа. Такие числа называются слабо вычислимыми числами.

Теперь приведем доказательство следующей теоремы, принадлежащей Амбосу - Шпису.

Теорема 3.1: [2] Действительное число a слабо вычислимо тогда и только тогда, когда существует вычислимая последовательность рациональных чисел $\{a_n\}_{n \in N}$, которая эффективно сходится к a .

Доказательство: (\Rightarrow): Пусть a слабо вычислимое действительное число. Тогда существуют две вычислимые возрастающие последовательности рациональных чисел $\{b_n\}_{n \in N}$ и $\{c_n\}_{n \in N}$ такие, что существуют $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ и $a = b - c$ ($0.A = 0.B - 0.C$). Пусть $a_n = b_n - c_n$. Тогда $\{a_n\}_{n \in N}$ является вычислимой последовательностью рациональных чисел таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| &= \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1} - c_{n+1}| - \sum_{n=0}^{\infty} |b_n - c_n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1} - c_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - b_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - c_0 \\ &= b - b_0 + c - c_0. \end{aligned}$$

Поэтому $\{a_n\}_{n \in N}$ сходится к вычислимо перечислимому числу a .

(\Leftarrow): Пусть $\{a_n\}_{n \in N}$ вычислимая последовательность рациональных чисел, которая сходится к вычислимо перечислимому числу a , то есть $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ ограничена. Определим две вычислимые последовательности рациональных чисел $\{b_n\}_{n \in N}$ и $\{c_n\}_{n \in N}$ следующим образом:

$$b_n := a_0 + \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) \text{ и } c_n := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i),$$

где $a_{i+1} - a_i = a_{i+1} - a_i$, если $a_{i+1} \geq a_i$ и $a_{i+1} - a_i := 0$.

Очевидно, они обе неубывающие и ограничены. Следовательно, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ существуют, и они вычислимые слева действительные числа:

$$\begin{aligned} b - c &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (d_n - c_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i) - \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a. \end{aligned}$$

Следовательно, a - слабо вычислимое, что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали, что действительное число χ_A слабо вычислимо тогда и только тогда, когда существует эффективно сходящееся приближение $(A_s)_{s \in N}$ к A такое, что $\sum_{s=0}^{\infty} (\chi_{As} - \chi_{As+1})$ конечна. \square

Теперь усилим это утверждение.

Утверждение 3.2: Разность любых двух слабо вычислимых чисел снова слабо вычислимое число.

Доказательство: Пусть $0.A$ и $0.D$ слабо вычислимые числа. Следовательно, $0.A = 0.B_1 - 0.C_1$ и $0.D = 0.B_2 - 0.C_2$, где B_1, B_2, C_1, C_2 - вычислимо перечислимые множества. Требуется доказать, что $0.F = 0.A - 0.D$ слабо вычислимое число.

По теореме 2.1, существует такая последовательность рациональных чисел $\{a_n\}_{n \in N}$, которая эффективно сходится к a , и последовательность рациональных чисел $\{d_n\}_{n \in N}$, которая эффективно сходится к d . Доказать, что существует последовательность $\{f_n\}_{n \in f}$, которая эффективно сходится к f .

В теореме 2.1 мы доказали, что $\{a_n\}_{n \in N}$ и $\{d_n\}_{n \in N}$ являются вычислимими последовательностями рациональных чисел таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{d \rightarrow \infty} d_n = d$. Отсюда, $\{f_n\}_{n \in N}$ - вычислимая последовательность рациональных чисел таких, что $\lim_{f \rightarrow \infty} f_n = d$ и

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |f_{n+1} - f_n| &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - d_{n+1}| - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n - d_n| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |b_{1,n+1} - c_{1,n+1}| - \sum_{n=0}^{\infty} |b_{1,n} - c_{1,n}| - \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} |b_{2,n+1} - c_{2,n+1}| - \sum_{n=0}^{\infty} |b_{2,n} - c_{2,n}| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} (b_{1,n+1} - b_{1,n}) + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{1,n+1} - c_{1,n}) + \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (b_{2,n+1} - b_{2,n}) + \sum_{n=0}^{\infty} (c_{2,n+1} - c_{2,n}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} b_{1,n} - b_{1,0} + \lim_{n \rightarrow \infty} c_{1,n} - c_{1,0} + \\
&\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2,n} - b_{2,0} + \lim_{n \rightarrow \infty} c_{2,n} - c_{2,0} \\
&= b_{1,n} - b_{1,0} + c_{1,n} - c_{1,0} + b_{2,n} - b_{2,0} + c_{2,n} - c_{2,0}.
\end{aligned}$$

Поэтому $\{f_n\}_{n \in N}$ сходится к вычислимо перечислиму числу f . \square

Доказано в [2, гл.3]. Последовательность $\{a_i\}_{i \in N}$ вычислима, если есть такая двойная вычислимая последовательность рациональных чисел $\{r_{ij}\}_{i,j \in N}$, что $r_{ij} \rightarrow 0.A$ при $j \rightarrow \infty$. А именно, есть такая вычислимая функция $e : N^2 \rightarrow N$, которая удовлетворяет условию:

$$j \geq e(i, k) \Rightarrow |r_{ij} - a_i| \leq 2^{-k}.$$

Утверждение 3.3. [2] Каждая ограниченная монотонная последовательность действительных чисел является слабо вычислимой.

Доказательство: Пусть $\{a_n\}_{n \in N}$ вычислимая последовательность действительных чисел, которая вычислимо перечислимо сходится к числу $0.A$, то есть $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \leq b$ для некоторого $b \in N$, существуют двойная вычислимая последовательность рациональных чисел $\{r_{nm}\}_{n,m \in N}$ и вычислимая функция $e : N^2 \rightarrow N$, которая удовлетворяет условию:

$$j \geq e(i, k) \Rightarrow |r_{ij} - a_i| \leq 2^{-k},$$

где r_{ij} вычислимая последовательность, $j \rightarrow \infty$, для всех i, k , $e(i, k)$ - вычислимая функция.

Обозначим последовательности $\{r_n\}_{n \in N}$ как $r_{ne(n,n)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |r_{n+1} - a_{n+1}| + \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |r_n - a_n| \\ &\leq 3 + b \end{aligned}$$

Таким образом, $\{r_n\}_{n \in N}$ вычислимо перечислимо сходится к $0.A$, то есть $0.A$ слабо вычислимое число. \square

Теорема 3.4. [2] Класс C_2 - замкнутое поле, сгенерированное с помощью C_1 .

Доказательство: Из Определения 10 и того факта, что $0.A$ является вычислимым справа (слева) тогда и только тогда, когда $0.A$ - вычислимо слева (справа), видно, что C_2 замкнуто относительно операций "+" и "-". Требуется доказать, что оно замкнуто относительно операций " \times " и " \div ". Пусть $x, y \in C_2$ и предположим, что $\{x_n\}_{n \in N}$ и $\{y_n\}_{n \in N}$ являются вычислимыми последовательностями рациональных чисел, которые вычислимо перечислимо сходятся к x и y соответственно. Тогда есть такое достаточно большое натуральное число M , что

$$\max\{|x_n|, |y_n|, \sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n|, \sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1} - y_n|\} \leq M$$

для всех $n \in N$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1}y_{n+1} - x_ny_n| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (|x_{n+1}| \cdot |y_{n+1} - y_n| + |y_n| \cdot |x_{n+1} - x_n|) \\
&\leq M \left(\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1} - y_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| \right) \leq 2M^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, вычислимая последовательность $\{x_n y_n\}_{n \in N}$ вычислимо перечислимо сходится к xy , следовательно, по Утверждению 3.3, $xy \in C_2$.

Если $y \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что $\forall n \in N (|y_n| \geq 1/M)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{x_n}{y_n} \right| &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x_{n+1}y_n - y_{n+1}x_n}{y_n y_{n+1}} \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|y_n| \cdot |x_{n+1} - x_n| + |x_n| \cdot |y_{n+1} - y_n|)}{|y_n y_{n+1}|} \\
&\leq M^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| + |y_{n+1} - y_n| \right) \\
&\leq 2M^4.
\end{aligned}$$

То есть, вычислимая последовательность $\{x_n/y_n\}_{n \in N}$ вычислимо перечислимо сходится к $x/y \in C_2$. Поэтому C_2 замкнуто относительно операций $+$, $-$, \times , \div . \square

Заключение

Целью данной дипломной работы является изучение свойств вещественных чисел с точки зрения их алгоритмической вычислимости. Приведены несколько эквивалентных определений вычислимых чисел и изучены соотношения между ними, а именно: определение вычислимого числа через сходящуюся последовательность Коши; определение вычислимой последовательности рациональных чисел с помощью вычислимых функций и эффективной сходимости. Определено число $\alpha = 0.A$, где A - вычислимое множество, и определено вычислимое множество с помощью характеристической функции.

В параграфе 2 изучены некоторые свойства вычислимых чисел, связанные с образующими их множествами и их подмножествами. Доказано, что если множество A - бесконечно, невычислимо и вычислимо перечислимо, тогда найдется такое подмножество B множества A , что число $0.A - 0.B$ будет невычислимо перечислимо.

Изучены слабо вычислимые числа и их свойства. Доказано, что разность двух слабо вычислимых чисел - снова слабо вычислимое число. Приведено доказательство теоремы о том, что a - слабо вычислимое число тогда и только тогда, когда существует вычислимая последовательность рациональных чисел $\{a_n\}_{n \in N}$, которая эффективно сходится к a . В заключение приведено доказательство того, что множество всех слабо вычислимых чисел образует поле.

Список литературы

- [1] Дубинина Л.Я., Никулина Л.С., Ткалич А.Н.: Числовые последовательности - редактор Александрова Л.И.
- [2] Klaus Ambos-Spies, Klaus Weihrauch, XizhongZheng: Weakly Computable Real Numbers - J. Complexity 16, 676-690 - 200 c.
- [3] Лизунова Е.М.: Теория алгоритмов: Учебно-методический комплекс - Елабужский государственный педагогический университет. - 87 с.
- [4] Арсланов М.М. Иерархия Ершова -Казань, издательство КГУ, 2007.- 96 с.
- [5] Соар Р.И. Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств / Роберт И. Соар; перевод с англ.под ред.М.М.Арсланова. - Казань: Казанское математическое общество, 2000. - 576 с.