ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 8 (495)

УДК 517.968:519.642

Э.Н. САМОЙЛОВА

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИЙ

Введение

В ряде прикладных задач встречается сингулярное интегродифференциальное уравнение

$$A\varphi \equiv \varphi''(t) + a(t)\varphi'(t) + b(t)\varphi(t) + \frac{c(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{d(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad -1 < t < 1, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\varphi(-1) = \varphi(+1) = 0, \tag{2}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $f(t)$ — известные функции на сегменте $[-1, 1]$, а $\varphi(t)$ — искомая функция.

Поскольку задача (1), (2) точно не решается, ниже предлагается ее решение методом сплайн-коллокаций. В частности, приводятся вычислительные схемы указанного метода и предлагается их обоснование на основе теории приближения функций (напр., [1]) и общей теории приближенных методов функционального анализа (напр., [2], гл. 14; [3], гл. 1).

1. Вычислительная схема метода

Введем сетку узлов

$$t_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad k = \overline{0, n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать в виде кубического сплайна

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n,k}(t) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_{ki} t^i, \quad t_{k-1} \le t \le t_k, \quad k = \overline{1, n}, \tag{4}$$

с узлами (3). Неизвестные постоянные α_{ki}, $k = \overline{1, n}$, $i = \overline{0, 3}$, определяются из условий

$$(A\varphi_n)(t_k) = f(t_k), \quad k = \overline{0, n}, \tag{5}$$

$$\varphi_n(-1) = \varphi_n(1) = 0. \tag{6}$$

Отсюда получаем $n + 3$ уравнений, недостающие уравнения находим в силу того, что $\varphi_n(t)$ — кубический сплайн, т.е. за счет гладкого склеивания в узлах (3)

$$\varphi^{(j)}_{n,k}(t_k) = \varphi^{(j)}_{n,k+1}(t_k), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad j = 0, 1, 2. \tag{7}$$

Таким образом, соотношения (5)–(7) представляют собой систему из $4n$ линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно $4n$ неизвестных коэффициентов сплайна (4).

2. Предварительные результаты

Для теоретического обоснования вычислительной схемы (1)–(7) приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть X и Y — полные линейные нормированные пространства, а $G, T : X \to Y$ — линейные ограниченные операторы. Пусть, кроме того, выполнены условия*

1) $G : X \to Y$ — *непрерывно обратимый, а* $T : X \to Y$ — *вполне непрерывный операторы*;
2) *линейное операторное уравнение*

$$Kx \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X, \;\; y \in Y) \tag{8}$$

однозначно разрешимо в пространстве X при любой правой части из пространства Y.

Тогда оператор $K : X \to Y$ непрерывно обратим.

Доказательство. В силу условия 1) уравнение (8) эквивалентно операторному уравнению 2-го рода

$$G^{-1}Kx \equiv Mx \equiv x + G^{-1}Tx = G^{-1}y \quad (x, G^{-1}y \in X). \tag{8'}$$

Поэтому из однозначной разрешимости уравнения (8) следует однозначная разрешимость эквивалентного ему операторного уравнения (8′). Так как $G^{-1}T$ является вполне непрерывным оператором как произведение ограниченного и вполне непрерывного операторов, то из теории Рисса–Шаудера (напр., [2]) и условия 2) следует, что оператор M имеет непрерывный обратный $M^{-1} : X \to X$. Поскольку $M^{-1} = (G^{-1}K)^{-1}$ — ограниченный оператор, а G^{-1} имеет обратный, равный оператору G, то существует обратный оператор $K^{-1} : Y \to X$ и справедливы представления $M^{-1} = K^{-1}G$, $K^{-1} = M^{-1}G^{-1}$. Отсюда находим неравенства

$$\|K^{-1}\| = \|M^{-1}G^{-1}\| \le \|M^{-1}\| \, \|G^{-1}\| < \infty,$$

из которых следует требуемое утверждение. □

Обозначим через $\Phi = C^2[-1,1]$ пространство дважды непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций, удовлетворяющих условиям (2); норму в Φ определим по формуле

$$\|\varphi\|_\Phi = \max_{-1 \le t \le 1} |\varphi''(t)|, \quad \varphi \in \Phi.$$

Через $Y = C[-1,1]$ обозначим пространство всех непрерывных на $[-1,1]$ функций с обычной нормой.

Лемма 2. *Для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливы неравенства*

$$\|\varphi\|_F \le 2\|\varphi'\|_F \le 4\|\varphi\|_\Phi, \tag{9}$$

$$\|\varphi'\|_F \le 2\|\varphi\|_\Phi. \tag{10}$$

Следствие. Для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливы неравенства

$$|\varphi'(\pm 1)| \le \|\varphi'(t)\|_F \le 2\|\varphi\|_\Phi.$$

Доказательство. В силу условия (2) любая функция $\varphi \in \Phi$ представима в виде

$$\varphi(t) = \int_{-1}^{t} \varphi'(\xi) d\xi = -\int_{t}^{1} \varphi'(\xi) d\xi.$$

Отсюда, оценивая по модулю, равномерно относительно $t \in [-1,1]$ получаем

$$|\varphi(t)| = \left| \int_{-1}^{t} \varphi'(\xi) d\xi \right| \le \int_{-1}^{1} |\varphi'(\xi)| d\xi \le \max_{-1 \le \xi \le 1} |\varphi'(\xi)| \int_{-1}^{1} d\xi \le 2\|\varphi'\|_C.$$

Поэтому $\|\varphi\|_F \le 2\|\varphi'\|_F$, $\varphi \in \Phi$.

Ввиду условий (2) по теореме Ролля для любой функции $\varphi \in \Phi$ существует такая точка $\eta \in (-1,1)$, что $\varphi'(\eta) = 0$. Тогда

$$\varphi'(t) = \int_{\eta}^{t} \varphi''(\xi) d\xi, \quad \varphi \in \Phi.$$

Оценивая по модулю, имеем

$$|\varphi'(t)| \le \left| \int_{\eta}^{t} |\varphi''(\xi)| d\xi \right| \le 2\|\varphi''\|_F = 2\|\varphi\|_\Phi, \quad t \in [-1,1].$$

Из полученных неравенств следуют оценки (9) и (10). □

Лемма 3. *Для любой функции* $\varphi \in \Phi$ *и любых* $\delta \in (0,2]$ *справедливы неравенства*

$$\omega(\varphi;\delta) \le \delta\|\varphi'\|_F \le 2\delta\|\varphi\|_\Phi, \tag{11}$$

$$\omega(\varphi';\delta) \le \delta\|\varphi\|_\Phi, \quad 0 < \delta \le 2, \tag{12}$$

где $\omega(\psi;\delta)$ *— модуль непрерывности функции* $\psi \in C[-1,1]$ *с шагом* $\delta \in (0,2]$.

Доказательство. Пусть $t', t'' \in [-1,1]$, причем $|t' - t''| \le \delta \le 2$ и $\varphi \in \Phi$. Тогда, используя теорему Лагранжа о конечных приращениях, для любой функции $\varphi \in \Phi$ находим

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| = |\varphi'(\xi)(t' - t'')| \le \delta\|\varphi'\|_F, \tag{11$'$}$$

где $\xi \in [-1,1]$. Отсюда следует первая часть неравенств (11). Для производной $\varphi'(t)$ функции $\varphi \in \Phi$ аналогично находим

$$|\varphi'(t') - \varphi'(t'')| = |\varphi''(\eta)(t' - t'')| \le \delta\|\varphi''\|_F = \delta\|\varphi\|_\Phi, \quad \eta \in (-1,1). \tag{12$'$}$$

Отсюда следуют неравенство (12) и вторая часть неравенств (11).

Таким образом, из неравенств (11$'$) и (12$'$) и леммы 2 следуют оценки (11) и (12). □

Лемма 4. *Для любой функции* $\varphi \in \Phi$ *справедливы следующие представления*:

$$S_0(\varphi;t) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - t|\varphi'(\tau)d\tau, \quad -1 \le t \le 1; \tag{13}$$

$$S_1(\varphi;t) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{\tau - t} = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - t|\varphi''(\tau)d\tau + \\ + \frac{\varphi'(+1)\ln(1-t) + \varphi'(-1)\ln(1+t)}{\pi}, \quad -1 < t < 1. \tag{14}$$

Доказательство. Формула (13) следует из леммы 1 [4] и условий (2). Формула (14) доказывается тем же методом, что и лемма 1 из [4]. □

Лемма 5. *Для любой функции* $\varphi \in \Phi$ *и любых* $\delta \in (0,2]$ *справедливы неравенства*

$$\|S_0(\varphi;t)\|_F \le \frac{2}{\pi}\|\varphi'(t)\|_F \le \frac{4}{\pi}\|\varphi\|_\Phi; \tag{15}$$

$$\omega(S_0\varphi;\delta) \le \frac{2}{\pi}\delta(1 + |\ln\delta|)\|\varphi'(t)\|_F \le \frac{4}{\pi}\delta(1 + |\ln\delta|)\|\varphi\|_\Phi. \tag{16}$$

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in \Phi$ с учетом формулы (13) равномерно относительно $t \in [-1,1]$ имеем первую часть неравенства (15).

Известно [5], что для любой функции $\psi \in C[0,1]$ и любого $\delta \in (0,1]$ справедлива оценка

$$\omega\left(\int_0^1 \ln|\sigma - s|\psi(\sigma)d\sigma;\delta\right) \le 2\delta(1 - \ln\delta)\|\psi\|_{C[0,1]}.$$

Отсюда, из представления (13) и леммы 2 после несложных (но громоздких) преобразований находим (16). □

Следствие. Оператор $S_0 : \Phi \to F$ вполне непрерывен.

Доказательство. Пусть $D = D(0,1)$ — единичный шар пространства Φ с центром в начале координат. Тогда из лемм 2 и 5 для любой функции $\varphi \in D$ находим

$$\|S_0\varphi\|_F \le \frac{4}{\pi},$$
$$\omega(S_0\varphi;\delta) \le 4\delta(1+|\ln\delta|), \quad \delta \in (0,2].$$

Из двух последних неравенств видно, что функции множества $\{S_0(\varphi;t) : \varphi \in D \subset \Phi\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, а следовательно, в силу известной теоремы Арцела [2] утверждение следствия становится очевидным. $\square$

Лемма 6. *Для любой функции $\varphi \in \Phi$ и любых $\delta \in (0,2]$ справедливы неравенства*

$$\left\| S_1(\varphi;t) - \frac{\varphi'(+1)\ln(1-t) - \varphi'(-1)\ln(1+t)}{\pi} \right\|_F \le \frac{2}{\pi}\|\varphi(t)\|_\Phi, \tag{17}$$

$$\omega\left(S_1(\varphi;t) - \frac{\varphi'(+1)\ln(1-t) - \varphi'(-1)\ln(1+t)}{\pi};\delta \right) \le \frac{2}{\pi}\delta(1+|\ln\delta|)\|\varphi\|_\Phi. \tag{18}$$

Доказательство. В силу леммы 4 для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо

$$\psi(t) \equiv S_1(\varphi;t) - \frac{\varphi'(+1)\ln(1-t) - \varphi'(-1)\ln(1+t)}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - t|\varphi''(\tau)d\tau.$$

Отсюда, рассуждая так же, как при доказательстве леммы 5, и используя лемму 2, выводим неравенства (17) и (18). $\square$

Лемма 7. *Пусть $d(t) \in H_\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ и $d(\pm 1) = 0$. Тогда для функций $d_1(t) = d(t)\ln(1-t)$ и $d_2 = d(t)\ln(1+t)$ справедливы соотношения*

$$d_1(t) \in H_{\alpha-\varepsilon}[-1,1] \quad \text{и} \quad |d_1(t)| \le M_1|1-t|^{\alpha-\varepsilon}, \quad -1 \le t \le 1;$$
$$d_2(t) \in H_{\alpha-\varepsilon}[-1,1] \quad \text{и} \quad |d_2(t)| \le M_2|1+t|^{\alpha-\varepsilon}, \quad -1 \le t \le 1,$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, а M_i — положительные постоянные, не зависящие от $t \in [-1,1]$.

Доказательство приведем для функции $d_1(t)$, случай функции $d_2(t)$ доказывается аналогично.

Функция $d_1(t)$ определена всюду, за исключением точки $t = +1$. В этой точке можно определить ее как

$$d_1(1) = \lim_{t \to 1-0} d_1(t) = 0,$$

т. к. для любых $t \in [-1,1]$

$$0 \le |d_1(t)| = |d(t)\ln(1-t)| = |d(t) - d(1)|\,|\ln(1-t)| \le H(d;\alpha)|t-1|^\alpha \frac{K_1}{(1-t)^\varepsilon} = M_1|1-t|^{\alpha-\varepsilon},$$

где ε — сколь угодно малое положительное число, не зависящее от t, K_1 — положительная постоянная, не зависящая от t и ε, $H(d;\alpha)$ — наименьшая постоянная условия Гёльдера функции $d \in H_\alpha$ при данном $\alpha \in (0,1]$.

В силу $d_1(t) \in H_\alpha[-1,1]$ для точки $t' = 1$ и любой точки $t'' = t \in [-1,1]$ имеем

$$|d_1(t') - d_1(t'')| = |d_1(t)| \le M_1(1-t)^{\alpha-\varepsilon} = M_1|t' - t''|^{\alpha-\varepsilon}. \quad \square$$

3. Обоснование метода

Для вычислительной схемы (1)–(7) справедлива

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) $a(t), b(t), c(t), f(t) \in C[-1,1]$, $d(t) \in H_\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$, $d(\pm 1) = 0$;

2) *краевая задача* (1), (2) *имеет единственное решение* $\varphi^* \in \Phi$ *при любой правой части* $f \in C[-1,1]$.

Тогда СЛАУ (5)–(7) *однозначно разрешима относительно постоянных* α_{ki} $(k = \overline{1,n}$, $i = 0,1,2,3)$. *Приближенные решения* (4) *сходятся к точному решению* φ^* *задачи* (1), (2) *в пространстве* Φ *со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_\Phi = O\{\omega(f;\tfrac{1}{n}) + \omega(a;\tfrac{1}{n}) + \omega(b;\tfrac{1}{n}) + \omega(c;\tfrac{1}{n}) + \omega(d_1;\tfrac{1}{n}) + \omega(d_2;\tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{n}\}. \tag{19}$$

Доказательство. Запишем краевую задачу (1), (2) в виде эквивалентного ей линейного операторного уравнения

$$A\varphi \equiv G\varphi + T\varphi = f \quad (\varphi \in \Phi, \;\; f \in F), \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered} G\varphi = \varphi''(t), \quad T\varphi = U\varphi + V\varphi, \quad U\varphi = a(t)\varphi'(t) + b(t)\varphi(t), \\ V\varphi = c(t)S_0(\varphi;t) + d(t)S_1(\varphi;t). \end{gathered} \tag{21}$$

Нетрудно показать, что оператор $G : \Phi \to F$ непрерывно обратим и для операторов G и G^{-1} справедливы равенства

$$\|G\|_{\Phi\to F} = 1, \quad \|G^{-1}\|_{F\to\Phi} = 1.$$

Введем подпространства, необходимые в дальнейшем. Пусть $F_n = \left\{ \sum\limits_{k=0}^{n} \beta_k s_k(t) : \beta_k \in \mathbb{R} \right\} \subset F$ — множество всех сплайнов первой степени с узлами (3); здесь $s_k(t)$ — фундаментальные сплайны первой степени на сетке узлов (3):

$$s_k(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_{k-1}; \\ \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}, & t_{k-1} \leq t \leq t_k; \\ \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k}, & t_k \leq t \leq t_{k+1}; \\ 0, & t \geq t_{k+1}, \end{cases}$$

где при $k = 0$ и $k = n$ пренебрегаем первыми двумя и соответственно последними двумя звеньями функций $s_0(t)$ и $s_n(t)$.

Пусть $\Phi_n \subset \Phi$ — множество всех кубических сплайнов вида (4). Очевидно,

$$\dim F_n = \dim \Phi_n = n + 1 < \infty.$$

Введем оператор

$$P_n(\psi;t) = \sum_{k=0}^{n} \psi(t_k) s_k(t), \quad \psi \in F,$$

проектирующий пространство F в подпространство F_n, где узлы определены по формуле (3). Известно, что P_n — линейный проекционный оператор, причем для любой функции $\psi \in C[-1,1]$ справедливо неравенство

$$\|\psi(t) - P_n\psi(t)\|_F \leq 2\omega(\psi, \tfrac{1}{n}). \tag{22}$$

Запишем СЛАУ (5)–(7) в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$A_n\varphi_n \equiv P_n A\varphi_n = P_n G\varphi_n + P_n T\varphi_n = P_n f \quad (\varphi_n \in \Phi_n, \;\; P_n f \in F_n). \tag{23}$$

Поскольку $P_n^2 = P_n$, а $G\varphi_n \in F_n$ для любых функций $\varphi_n \in \Phi_n$, то уравнение (23) эквивалентно уравнению

$$A_n\varphi_n \equiv G\varphi_n + P_n T\varphi_n = P_n f \quad (\varphi_n \in \Phi_n, \quad P_n f \in F_n). \tag{24}$$

Докажем близость операторных уравнений (20) и (24) ([3], гл. 1) Для их правых частей в силу условия 1) доказываемой теоремы и неравенства (22) справедливы соотношения

$$\delta_n \equiv \|f - P_n f\|_F \le 2\omega(f; \tfrac{1}{n}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

В дальнейшем понадобится полная непрерывность оператора $T : \Phi \to F$, определенного формулами (21).

С помощью лемм 2 и 3 для любой функции $\varphi \in D \subset \Phi$ и любых $\delta \in (0,2]$ находим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|U\varphi\|_F &\le \|a\|_F\|\varphi\|_F + \|b\|_F\|\varphi'\|_F \le \\ &\le 2\|\varphi\|_\Phi(2\|a\|_F + \|b\|_F) \le 2(2\|a\|_F + \|b\|_F); \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \omega(U\varphi;\delta) &\le \omega(a;\delta)\|\varphi\|_F + \|a\|_F\,\omega(\varphi;\delta) + \omega(b;\delta)\|\varphi'\|_F + \|b\|_F\,\omega(\varphi';\delta) \le \\ &\le [\omega(a;\delta)4\|\varphi\|_\Phi + \|a\|_F\,2\delta\|\varphi\|_\Phi] + [\omega(b;\delta)2\|\varphi\|_\Phi + \|b\|_F\,\delta\|\varphi\|_\Phi] \le \\ &\le 4\omega(a;\delta) + 2\delta\|a\|_F + 2\omega(b;\delta) + \delta\|b\|_F \le \varepsilon_1(\delta), \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\varepsilon_1(\delta) = 2\delta[\|a\|_F + \|b\|_F] + 4[\omega(a;\delta) + \omega(b;\delta)] \to 0, \quad \delta \to +0. \tag{27}$$

Из соотношений (25)–(27) следует, что оператор $U : \Phi \to F$ является вполне непрерывным.

Теперь для любых $\varphi \in D \subset \Phi$ и любых $\delta \in (0,2]$ с помощью лемм 2 и 5 находим

$$\|c(t)S_0(\varphi;t)\|_F \le \|c\|_F\|S_0\varphi\|_F \le \|c\|_F\frac{2}{\pi}\|\varphi'\|_F \le \frac{4}{\pi}\|c\|_F; \tag{28}$$

$$\omega(cS_0\varphi;\delta) \le \omega(c;\delta)\|S_0\varphi\|_F + \|c\|_F\,\omega(S_0\varphi;\delta) \le \varepsilon_2(\delta), \tag{29}$$

где

$$\varepsilon_2(\delta) = \frac{2}{\pi}\delta(1 + |\ln\delta|)\|c\|_F + \frac{4}{\pi}\omega(c;\delta) \to 0, \quad \delta \to +0. \tag{30}$$

Из соотношений (28)–(30) и теоремы Арцела [2] следует компактность оператора $cS_0 : \Phi \to F$.

С помощью лемм 2, 4–7 для любой функции $\varphi \in D \subset \Phi$ и любых $\delta \in (0,2]$ находим

$$\begin{aligned} \|dS_1\varphi\|_F &\le \|d\|_F\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau - t|\varphi''(\tau)d\tau\right\|_F + \\ &+ \frac{|\varphi'(+1)|}{\pi}\|d_1(t)\|_F + \frac{|\varphi'(-1)|}{\pi}\|d_2(t)\|_F \le \|d\|_F\,\frac{2}{\pi}\|\varphi''\|_F + \\ &+ \frac{2\|\varphi\|_\Phi}{\pi}M_1\,2^{\alpha-\varepsilon} + \frac{2\|\varphi\|_\Phi}{\pi}M_2\,2^{\alpha-\varepsilon} \le \frac{2}{\pi}(M_1 + M_2) + \frac{2}{\pi}\|d\|_F; \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} \omega(dS_1\varphi;\delta) &\le \omega\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln|\tau - t|\varphi''(\tau)d\tau;\delta\right) + \\ &+ \frac{|\varphi'(+1)|}{\pi}\omega(d_1;\delta) + \frac{|\varphi'(-1)|}{\pi}\omega(d_2;\delta) \le \frac{2}{\pi}\delta(1 + |\ln\delta|) + \\ &+ \frac{2}{\pi}\omega(d_1;\delta) + \frac{2}{\pi}\omega(d_2;\delta) \le \varepsilon_3(\delta), \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\varepsilon_3(\delta) = \frac{2}{\pi}\delta(1 + |\ln\delta|) + \frac{2}{\pi}\delta^{\alpha-\varepsilon}[H(d_1;\alpha-\varepsilon) + H(d_2;\alpha-\varepsilon)] \to 0 \tag{33}$$

при $\delta \to +0$. Из соотношений (31)–(33) следует, что оператор $dS_1 : \Phi \to F$ вполне непрерывен.

Итак, из только что приведенных результатов для операторов U и V получаем, что для любых $\varphi \in D \subset \Phi$ и $\delta \in (0, 2]$ справедливы неравенства

$$\|T\varphi\|_F \le c_1 < \infty, \tag{34}$$

$$\omega(T\varphi; \delta) \le c_2 \varepsilon(\delta), \quad \delta \to +0, \tag{35}$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные, не зависящие от $\delta \in (0, 2]$ и $\varphi \in D \subset \Phi$, а в силу (27), (30), (33)

$$\varepsilon(\delta) = \varepsilon_1(\delta) + \varepsilon_2(\delta) + \varepsilon_3(\delta) \to 0, \quad \delta \to +0.$$

Отсюда и из теоремы Арцела [3] следует полная непрерывность оператора $T : \Phi \to F$. Тогда в силу условия 2) доказываемой теоремы и из леммы 1 следует, что оператор $A : \Phi \to F$, определенный формулами (20), (21), непрерывно обратим.

Теперь докажем, что операторы $A_n : \Phi_n \to F_n$ аппроксимируют оператор $A : \Phi_n \to F$. Для всех $\varphi_n \in \Phi_n$, $\varphi_n \ne 0$, в силу (20), (24) и (34), (35) находим

$$\|A\varphi_n - A_n\varphi_n\|_F = \|G\varphi_n + T\varphi_n - (G\varphi_n + P_nT\varphi_n)\|_F =$$
$$= \|T\varphi_n - P_nT\varphi_n\|_F \le 2\omega(T\varphi_n; \tfrac{1}{n}) \le 2c_2\varepsilon(\tfrac{1}{n})\|\varphi_n\|_\Phi.$$

Тогда

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{\Phi_n \to F} \le 2c_2\varepsilon(\tfrac{1}{n}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому в силу теоремы 7 ([3], гл. 1) для любых $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству

$$q_n = \|A^{-1}\|\varepsilon_n < 1,$$

операторы $A_n : \Phi_n \to F$ непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности

$$\|A_n^{-1}\| \le c_3 < \infty,$$

где c_3 — положительная постоянная, не зависящая от n. Поэтому уравнение (24), а следовательно, эквивалентная ему СЛАУ (5)–(7) однозначно разрешимы при любых правых частях.

Согласно теореме 7 ([3], гл. 1) приближенные решения φ_n сходятся к точному решению φ^* в пространстве Φ со скоростью $\|\varphi^* - \varphi_n\|_\Phi = O(\varepsilon_n + \delta_n)$, откуда следует (19). □

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *приближенные решения* (4) *сходятся к точному решению задачи* (1), (2) *в пространстве* Φ *со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_\Phi = O\{\|\varphi^{*\prime\prime} - P_n\varphi^*\|_F\} = O\{\omega(\varphi^{*\prime\prime}; \tfrac{1}{n})\}. \tag{36}$$

Следствие 1. Пусть задача (1), (2) такова, что для ее решения выполняется условие $\varphi^{*\prime\prime} \in H_\alpha$. Тогда метод сходится со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_\Phi = O(\tfrac{1}{n^\alpha}), \quad 0 < \alpha \le 1.$$

Следствие 2. Если существует ограниченная третья производная $\varphi^{*\prime\prime\prime}$, то метод (1)–(7) сходится со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_\Phi = O(\tfrac{1}{n}).$$

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 1 установлено, что операторы $A_n : \Phi_n \to F_n$ непрерывно обратимы и обратные операторы $A_n^{-1} : F_n \to \Phi_n$ ограничены по норме в совокупности. Поэтому из теоремы 6 гл. 1 общей теории приближенных методов функционального анализа [3] следует оценка (36). Отсюда и из результатов теории приближения сплайнами [1] получим утверждения следствий 1 и 2. □

Из теоремы 2 и теории приближения сплайнами первой степени легко выводятся следующие утверждения.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *таковы, что точное решение задачи* (1), (2) *удовлетворяет условию* $\varphi^{*'''} \in C[-1,1]$.

Тогда в условиях теоремы 1 *метод сплайн-коллокаций сходится со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\| = \tfrac{1}{n} O\{\omega(\varphi^{*'''}; \tfrac{1}{n})\}.$$

Следствие 1. Пусть задача (1), (2) такова, что ее решение имеет третью производную из H_α $(0 < \alpha \leq 1)$.

Тогда метод сходится со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_\Phi = O(\tfrac{1}{n^{1+\alpha}}), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Следствие 2. Если существует ограниченная производная $\varphi^{*\mathrm{IV}}(t)$, то метод сходится со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_\Phi = O(\tfrac{1}{n^2}).$$

4. Заключение

1^0. Результаты, аналогичные приведенным выше, справедливы также для начальной задачи

$$\varphi(-1) = \varphi'(-1) = 0 \tag{2'}$$

для уравнения (1). Например, имеет место

Теорема 1$'$. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) $a(t), b(t), f(t) \in C[-1,1]$ *и* $c(t), d(t) \in H_\alpha$, $c(+1) = d(+1) = 0$, $0 < \alpha \leq 1$;

2) *задача Коши* (1), (2$'$) *имеет единственное решение* $\varphi^* \in C^2[-1,1]$ *при любой правой части* $f \in C[-1,1]$.

Тогда СЛАУ (5), (7), $\varphi_n(-1) = \varphi_n'(-1) = 0$ *однозначно разрешима и приближенные решения* (4) *сходятся к точному решению со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{C^2} = O\{\omega(f; \tfrac{1}{n}) + \omega(a; \tfrac{1}{n}) + \omega(b; \tfrac{1}{n}) + \omega(c_1; \tfrac{1}{n}) + \omega(d_1; \tfrac{1}{n}) + \tfrac{1}{n}\},$$

где

$$c_1(t) = c(t)\ln(1-t), \quad d_1(t) = d(t)\ln(1-t).$$

Теорема 1$'$ доказывается по схеме доказательства теоремы 1. Однако при этом в приведенные выше леммы необходимо внести изменения, которые связаны с начальными условиями (2$'$). Так, для любой функции $\varphi \in C^2[-1,1]$ справедливы представления

$$S_0(\varphi; t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - t| \varphi'(\tau) d\tau + \frac{\varphi(+1)\ln(1-t)}{\pi}, \qquad -1 \leq t < 1;$$
$$S_1(\varphi; t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - t| \varphi''(\tau) d\tau + \frac{\varphi'(+1)\ln(1-t)}{\pi}, \quad -1 \leq t < 1;$$

здесь $C^2[-1,1]$ — пространство дважды непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций, удовлетворяющих условиям (2$'$), где норма вводится как и выше. Это повлекло за собой корректировку условий на функции $c(t)$ и $d(t)$.

2^0. Результаты, полученные выше для краевой задачи (1), (2) и задачи Коши (1), (2$'$), легко переносятся на общую двухточечную краевую задачу (1),

$$\beta_0\varphi(-1) + \beta_1\varphi'(-1) = B,$$
$$\gamma_0\varphi(+1) + \gamma_1\varphi'(+1) = \Gamma,$$

где β_0, β_1, γ_0, γ_1, B, Γ — вполне определенные постоянные, причем

$$\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0, \quad \gamma_0^2 + \gamma_1^2 > 0.$$

Литература

1. Корнейчук Н.П. *Сплайны в теории приближения.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 742 с.
3. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
4. Самойлова Э.Н. *Сплайновые приближения решения сингулярного интегродифференциального уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11. – С. 35–45.
5. Горлов В.Е. *Прямые методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1977. – 150 с.

Казанский государственный университет

Поступила 13.02.2002