ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 7 (518)

УДК 512.554

Н.А. КОРЕШКОВ

ТЕОРЕМА ЭНГЕЛЯ ДЛЯ АЛГЕБР ЛИЕВСКОГО ТИПА

В данной работе доказывается аналог теоремы Энгеля для алгебр, названных алгебрами лиевского типа. А именно, показано, что нильпотентность такой алгебры вытекает из нильпотентности операторов левого умножения.

Класс изучаемых алгебр имеет естественное сходство с алгебрами из [1], [2], откуда и заимствовано указанное выше название. Но основным аргументом для изучения алгебр лиевского типа является тот факт, что этот класс содержит Q-формы модулярных алгебр Витта.

По аналогии с алгебрами Ли вводится понятие картановской подалгебры и с помощью теоремы Энгеля доказывается существование картановских подалгебр. В отличие от алгебр Ли, в алгебрах лиевского типа имеет место только вложение картановской подалгебры в фиттингову нулькомпоненту некоторого регулярного элемента.

Перейдем к точным определениям. Пусть G — алгебра над полем K, а V_1, V_2 — некоторые подпространства в G. Обозначим через $W(G,V_1,V_2)$ множество таких пар векторного пространства $V_1\times V_2$, что для каждой пары $(a,b)\in(G,V_1,V_2)$ существует пара линейных операторов $\varphi_{a,b},\psi_{a,b}\in\operatorname{End}_K(G)$, удовлетворяющих соотношению

$$L_aL_b=\varphi_{a,b}L_bL_a+\psi_{a,b}L_{ab}, \tag{1}$$

где L_g — оператор левого умножения в алгебре G.

Пусть $e_1,\dots,e_n$ — некоторый базис в G, а $P=K(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ — поле рациональных функций над K. Рассмотрим расширение $\widetilde G=P\underset{K}{\otimes}G=Pe_1+Pe_2+\dots+Pe_n$. Для любого элемента $\widetilde g=\sum\limits_{k=1}^n f_k(x,y)e_k$, $f_k(x,y)=f_k(x_1,\dots,x_n,\,y_1,\dots,y_n)\in P$, имеют место формулы

$$L_{\tilde g}e_i=\widetilde ge_i=\sum_{j=1}^n\rho_{ji}(f)e_j,\quad i=1,\dots,n,\quad f=(f_1,\dots,f_n),$$

где $\rho_{ji}(f)$ — однородные многочлены первой степени относительно f_k, $k=1,\dots,n$. Беря в качестве $\widetilde g$ элементы $x=\sum\limits_{k=1}^n x_ke_k$, $y=\sum\limits_{k=1}^n y_ke_k$, $z=xy=\sum\limits_{k=1}^n z_ke_k$, где $z_k=\sum\limits_{s,r=1}^n x_sy_ra_{srk}$, и a_{srk} — структурные константы алгебры G в базисе $e_1,\dots,e_n$, получим элементы матриц L_x, L_y, L_{xy}. Обозначим через $d_{k,i}(x,y)\in P$ (соответственно $\overline{d}^j_{k,i}(x,y)\in P$) определители k-го порядка ($k=1,\dots,n$) в матрице $((L_yL_x)^t,L^t_{xy})$ (t — транспонирование) (соответственно в матрицах $(B_j,(L_yL_x)^t,L^t_{xy})$, $j=1,\dots,n$). Здесь B_j — j-й столбец в матрице $(L_xL_y)^t$, $i=1,\dots,n_k$ (соответственно $i=1,\dots,\overline{n}^j_k$), где n_k (соответственно $\overline{n}^j_k$) — количество определителей k-го порядка в указанных матрицах. Пусть $W_k(G,V_1,V_2)$ — множество пар $\{(a,b)\}$ в $V_1\times V_2$, для которых $\overline{d}^j_{k+1,i}(a,b)=0$, $j=1,\dots,n$, $i=1,\dots,\overline{n}^j_k$, но существует такое $s:1\le s\le n_k$, что $d_{k,s}(a,b)\neq0$. При $k=n$ полагаем $\overline{d}^j_{k+1,i}(a,b)\equiv0$, $i=1,\dots,\overline{n}^j_k$. Легко видеть, что $W_k(G,V_1,V_2)$ — открытое (в топологии Зарисского) множество в алгебраическом подмножестве $S_k(G,V_1,V_2)\subseteq V_1\times V_2$, которое определяется системой многочленов $\overline{d}^j_{k+1,i}(a,b)$, $j=1,\dots,n$, $i=1,\dots,\overline{n}^j_k$. При $k=n$ полагаем $S_n(G,V_1,V_2)=V_1\times V_2$. Очевидно, множество $W(G,V_1,V_2)$, введенное выше, есть объединение всех $W_k(G,V_1,V_2)$.

Определение 1. Конечномерная алгебра G с антикоммутативным умножением называется *алгеброй лиевского типа* (л. т.), если для любой подалгебры H из G и любого идеала I этой подалгебры множество $W(G,I,H)$ содержит непустое, открытое в $I\times H$ подмножество. Это непустое открытое подмножество обозначим $U(G,I,H)$.

Из замечаний, приведенных перед определением, следует, что это определение выполняется, если $S_k(G,I,H)=I\times H$ для некоторого $1\le k\le n$.

Термин "алгебра л. т." заимствован из [1], [2], где алгеброй л. т. называется градуированная Q-алгебра $A=\sum\limits_{q\in P}A_q$ над полем K, P — конечное подмножество в абелевой группе Q. При этом для любых $\alpha,\beta,\gamma\in P$ существуют такие константы $\lambda,\mu\in K$ $(\lambda\ne 0)$, что $a(bc)=\lambda(ab)c+\mu(ac)b$ для всех $a\in A_\alpha$, $b\in A_\beta$, $c\in A_\gamma$.

Последнее соотношение, переписанное в терминах операторов левого умножения (при условии антикоммутативности A), будет иметь вид (1), причем $\varphi_{a,b}=\bigoplus\limits_{q\in P}\varphi^q_{a,b}$ $\forall\varphi^q_{a,b}=\lambda_qE_q$, $\lambda_q\in K$, E_q — тождественный оператор на A_q (аналогично для $\psi_{a,b}$). Приведем пример серии алгебр, являющихся алгебрами л. т.

Пусть $G_{\mathbb{Z}}$ — свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $e_{-1},e_0,e_1,\dots,e_{n-2}$ и таблицей умножения

$$e_ie_j=-e_je_i=\begin{cases}(j-i)e_{i+j}, & -1\le i+j\le n-2;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Обозначим через G алгебру $\mathbb{Q}\bigotimes\limits_{\mathbb{Z}}G_{\mathbb{Z}}$. Заметим, что если $n=p$ — простое число, то алгебра $F_p\bigotimes\limits_{\mathbb{Z}}G_{\mathbb{Z}}$, где F_p — поле вычетов по $\operatorname{mod}p$, является алгеброй Витта. Рассмотрим фильтрацию в G, определенную подпространствами $G_k=\langle e_k,e_{k+1},\dots,e_{n-2}\rangle$, $k=-1,0,\dots,n-2$,

I. Пусть H — подалгебра в G, причем $H\not\subset G_0$, $\dim H\ge 3$. Проводя простые переборные рассуждения, легко показать, что для любого идеала I в H в пространстве $I\times H$ обязательно есть пара (x,y) либо (y,x), где $x=b_1e_1+\dots+b_{n-2}e_{n-2}$, $y=a_{-1}e_{-1}+\dots+a_{n-2}e_{n-2}$, $a_{-1},b_1\ne 0$. Предположим для определенности, что имеет место первый случай. Тогда матрицы $(L_yL_x)^t$ и $(L_{xy})^t$ — верхние треугольные, и по главной диагонали у них расположены соответственно элементы $\{a_{-1}b_1k(k-3),\ k=1,2,\dots,n-1\}\cup\{0\}$, $\{-2a_{-1}b_1k,\ k=-1,0,1,\dots,n-2\}$. Так как нули в этих наборах находятся в разных позициях, то в матрице $((L_yL_x)^t,(L_{xy})^t)$ легко выделить квадратную верхнетреугольную матрицу n-го порядка, определитель которой отличен от нуля.

II. Пусть $\dim_{\mathbb{Q}}H=2$, но $H\not\subset G_0$. Из условия на размерность H и антикоммутативности получаем, что H — двумерная алгебра Ли с базисом e, f и умножением $ef=e$, причем $e=b_{-1}e_{-1}+\dots+b_{n-2}e_{n-2}$, $f=a_0e_0+..+a_{n-2}e_{n-2}$, $b_{-1}a_0\ne 0$. Заметим, что случай тривиального умножения в H невозможен в силу правил умножения базисных элементов в G, а ситуация, когда $H\cap G_1\ne 0$, проверяется, как в п. I.

Дополняя базис e, f алгебры H элементами $e_1,\dots,e_{n-2}$, получим базис G. Легко убедиться, что матрицы операторов L_e, L_eL_f, L_fL_e в этом базисе имеют нулевой первый столбец. Поэтому системы линейных уравнений, необходимые для разрешимости соотношения $L_eL_f=\varphi_{e,f}L_fL_e+\psi_{e,f}L_{ef}$, будут состоять из $n-1$ уравнений. Из соотношения $ef=e$ следует, что $a_0=1$, а элемент e заменим на $b_0^{-1}e$. В силу этого в матрице оператора L_e имеется определитель $(n-1)$-го порядка вида

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ * & 2 & \dots & 0\\ & & \ddots & \\ * & * & \dots & n\end{vmatrix}\ne 0.$$

Следовательно, изучаемые системы линейных уравнений разрешимы для любой пары $(x,y)\in I\times H$, т. к. $I=\langle e\rangle$, а для любого $h=\alpha f+\beta e\in H$ выполнено соотношение $eh=\alpha e$.

III. $H\subseteq G_0$. Пусть $H\subseteq G_i$, $i\ge 0$, $I\subseteq G_s$, $s\ge i$. Тогда найдется пара $(x,y)\in H\times I$ либо $(y,x)\in H\times I$, для которой $x=a_ie_i+\dots+a_{n-2}e_{n-2}$, $a_i\ne 0$, $y=b_je_j+\dots+b_{n-2}e_{n-2}$, $b_j\ne 0$, $j>i$,

$i+j \leq n-2$. Матрицы операторов L_xL_y и L_{xy} имеют нильтреугольный вид, первая ненулевая диагональ которых состоит из элементов

1. $(-j+k)(-i+j+k)a_ib_j$,
2. $(j-i)(-i-j+k)a_ib_j$, $k=-1,0,\ldots,n-i-j-2$.

Если $i>0$ либо $i=0$, но $j>\frac{n}{2}-1$, то в одинаковых позициях выписанные коэффициенты одновременно в нуль не обращаются. Поэтому в матрице $((L_xL_y)^t, L_{xy}^t)$ существует определитель треугольного вида, не равный нулю, размера $n-(i+j)$. Но именно столько нетривиальных уравнений и остается в наших системах в этом случае. Следовательно, ранги матриц $((L_xL_y)^t, L_{xy}^t)$ и $((L_yL_x)^t, (L_xL_y)^t, L_{xy}^t)$ совпадают, и операторное уравнение (1) разрешимо для открытого подмножества $F \subset H \times I$, которое определяется условиями $a_i \neq 0$, $b_j \neq 0$. При $i=0$ обозначим через f элемент $a_0e_0+a_1e_1+\cdots+a_{n-2}e_{n-2}$. Тогда в идеале I существует такой элемент e, что $ef=e$. Беря e, f первыми базисными элементами алгебры H, получим ситуацию п. II.

Если $i+j>n-2$, то $xy=0$ и $L_xL_y=L_yL_x=0$, когда $i+j>n-1$. При $i+j=n-1$ имеем $L_xL_y=\lambda L_yL_x$, где $\lambda=\frac{(n-2i-2)(i-n)}{(i+1)(n-2i)}$.

Определение 2. Алгебра G с антикоммутативным умножением называется *энгелевой*, если $\forall g \in G$ оператор левого умножения L_g нильпотентен.

Следуя [3], будем называть алгебру *нильпотентной*, если существует такое натуральное число n, что произведение любых n элементов алгебры с любой расстановкой скобок равно нулю, и *левонильпотентной*, если существует такое натуральное число n, что $L_{a_1}L_{a_2}\ldots L_{a_{n-1}}a_n=0$ для любых элементов $a_1,a_2,\ldots,a_n$ из этой алгебры.

Если алгебра антикоммутативна, то эти понятия совпадают [3].

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Конечномерная энгелева алгебра лиевского типа нильпотентна.*

Для доказательства теоремы 1 введем понятие представления л. т. (соответственно модуль л. т.).

Определение 3. Пусть G — конечномерная алгебра над полем K, M — конечномерное пространство над K, ρ — линейное отображение из G в $\mathrm{End}_K(M)$. Тогда ρ — представление л. т. в M (соответственно M — модуль л. т. над G), если для любой подалгебры H и любого идеала I этой подалгебры существует непустое открытое (в топологии Зарисского) множество U в пространстве $I \times H$, для которого $\forall (x,y) \in U$ $\exists \varphi_{x,y}^M, \psi_{x,y}^M \in \mathrm{End}_K(M)$ такие, что

$$\rho(x)\rho(y)=\varphi_{x,y}^M\rho(y)\rho(x)+\psi_{x,y}^M\rho(xy) \tag{2}$$

(соответственно $x(yv)=\varphi_{x,y}^M y(xv)+\psi_{x,y}^M(xy)v$ $\forall v \in M$).

Множество U, фигурирующее в этом определении, в дальнейшем будем обозначать $U(M,I,H)$.

Если G — алгебра л. т., а $\rho: g \to L_g$ — K-линейное отображение, то очевидно, ρ — представление л. т., которое будем называть регулярным.

Наборы операторов $\{\varphi_{x,y}^M, (x,y) \in U(M,I,H)\}$ и $\{\psi_{x,y}^M, (x,y) \in U(M,I,H)\}$ обозначим через φ^M, ψ^M, а представление ρ — через $\rho(\varphi^M,\psi^M)$.

Предложение 1. *Пусть $\rho=\rho(\varphi^M,\psi^M): G \to \mathrm{End}_K(M)$ — представление л. т. алгебры G, а $N \subseteq M$ — инвариантное подпространство (т. е. $\rho(G)N \subseteq N$). Тогда существуют такие наборы операторов $\widetilde{\varphi}^M$, $\widetilde{\psi}^M$, что $\rho(\widetilde{\varphi}^M,\widetilde{\psi}^M)$ — представление л. т. алгебры G в пространстве M, причем $\widetilde{\varphi}_{a,b}(N) \subseteq N$, $\widetilde{\psi}_{a,b}(N) \subseteq N$ $\forall (a,b) \in U(M,I,H)$, и сужение отображения ρ на N дает представление л. т. алгебры G в пространстве N.*

Доказательство. Так как $\rho(a)\rho(b)=\varphi_{a,b}^M\rho(b)\rho(a)+\psi_{a,b}^M\rho(ab)$ для любой пары $(a,b) \in U(M,I,H)$, то операторное уравнение $\rho(a)\rho(b)=X\rho(b)\rho(a)+Y\rho(ab)$ разрешимо и, в частности, $\mathrm{Ker}_M\,\rho(b)\rho(a) \cap \mathrm{Ker}_M\,\rho(ab) \subseteq \mathrm{Ker}_M\,\rho(a)\rho(b)$. Пусть $M=M_1 \oplus M_2$, где $M_1=\mathrm{Ker}_M\,\rho(b)\rho(a) \cap \mathrm{Ker}_M\,\rho(ab)$, а M_2 — дополнительное подпространство, определяемое условием $N=N\cap M_1 \oplus N \cap M_2$.

Очевидно, для нахождения операторов X, Y достаточно определить $X|_{\rho(b)\rho(a)M_2}$, $Y|_{\rho(ab)M_2}$. Представим пространство M_2 в виде $W_2 \oplus M_3$, где $W_2 = \mathrm{Ker}_{M_2} \rho(b)\rho(a)$, а M_3 — дополнительное подпространство, определяемое условием $N \cap M_2 = N \cap W_2 \oplus N \cap M_3$. Тогда $Y|_{\rho(ab)W_2} = \rho(a)\rho(b)Y_1^{-1}$, где $Y_1 = \rho(ab)|_{W_2}$ — инъективное на W_2 отображение. В частности, $Y|_{\rho(ab)W_2} = \psi^M_{a,b}|_{\rho(ab)W_2}$. Объединяя эту формулу с предыдущей, заметим, что $\psi^M_{a,b}\rho(ab)(N \cap W_2) \subseteq N$.

С другой стороны, на пространстве M_3 инъективен оператор $\rho(b)\rho(a)$, поэтому $X|_{\rho(b)\rho(a)M_3} = \rho(a)\rho(b)X_1^{-1} - Y\rho(ab)X_1^{-1}$, где $X_1 = \rho(b)\rho(a)|_{M_3}$. На элементах подпространства $\rho(ab)W_2$ оператор Y определен и совпадает с $\psi^M_{a,b}|_{\rho(ab)W_2}$. На остальных элементах пространства $\rho(ab)M_2$ доопределяем Y, полагая его значение равным нулю на некотором подпространстве, дополнительном к $\rho(ab)W_2$, до всего пространства $\rho(ab)M_2$. В качестве $\widetilde{\psi}^M_{a,b}$ возьмем оператор, совпадающий с Y на $\rho(ab)M_2$ и равный нулю на некотором дополнительном до всего M подпространстве.

Оператор X на пространстве $\rho(b)\rho(a)M_3 = \rho(b)\rho(a)M_2$ определен по вышеприведенной формуле. В качестве $\widetilde{\varphi}^M_{a,b}$ возьмем оператор, совпадающий с X на $\rho(b)\rho(a)M_2$, и равный нулю на некотором дополнительном до всего M подпространстве.

Как было отмечено, $\widetilde{\psi}^M_{a,b}\rho(ab)(N \cap W_2) \subseteq N$. Но теперь и $\widetilde{\psi}^M_{a,b}\rho(ab)(N \cap M_3) \subseteq N$. Кроме того, из формулы для нахождения оператора X имеем $\widetilde{\varphi}^M_{a,b}\rho(b)\rho(a)(N \cap M_3) \subseteq N$. Положим $\widetilde{\varphi}^N_{a,b} = \widetilde{\varphi}^M_{a,b}|_N$, $\widetilde{\psi}^N_{a,b} = \widetilde{\psi}^M_{a,b}|_N$. Из указанных включений следует, что $\widetilde{\varphi}^N_{a,b}, \widetilde{\psi}^N_{a,b} \in \mathrm{End}_K(N)$. □

Следствие 1. Если G — алгебра л. т., H — ее подалгебра, то H — алгебра л. т.

Действительно, беря в качестве подпространства N подалгебру H, можно получить такие операторы $\widetilde{\varphi}_{a,b}$, $\widetilde{\psi}_{a,b}$, $(a,b) \in U(G,I,B)$ (B — некоторая подалгебра в H, I — ее идеал), что $\widetilde{\varphi}_{a,b}(H) \subseteq H$, $\widetilde{\psi}_{a,b}(H) \subseteq H$ при регулярном представлении алгебры G. Тогда сужения этих операторов $\widetilde{\varphi}_{a,b}|_H$, $\widetilde{\psi}_{a,v}|_H$ принадлежат $\mathrm{End}_K(H)$, что и необходимо для выполнения следствия 1.

Следствие 2. Пусть M — модуль л. т. над алгеброй G, N — инвариантное G подпространство в M. Тогда фактор-пространство M/N является модулем л. т. над G.

Доказательство. Если $\rho : G \to \mathrm{End}_K(M)$ — представление л. т. для G, то рассмотрим отображение, определенное правилом $\overline{\rho}(g)(m+N) = \rho(g)m + N$. В силу предложения 1 можно считать, что операторы $\varphi^M_{i,h}$, $\psi^M_{i,h}$, где $(i,h) \in U(M,I,H)$ для некоторой подалгебры H в G и некоторого идеала I в H, удовлетворяют условию $\varphi^M_{i,h}(N) \subseteq N$, $\psi^M_{i,h}(N) \subseteq N$. Поэтому можно определить фактор-операторы $\overline{\varphi}_{i,h}$, $\overline{\psi}_{i,h}$ $\forall (i,h) \in U(M,I,H)$.

В силу соотношения $x(yv) = \varphi_{x,y}y(xv) + \psi_{x,y}(xy)v$ $\forall (x,y) \in U(M,I,H)$, $\forall v \in M$ имеем $x(y\overline{v}) = \overline{\varphi}_{x,y}y(x\overline{v}) + \overline{\psi}_{x,y}(xy)\overline{v}$ $\forall (x,y) \in U(M,I,H)$, $\forall \overline{v} \in M/N = \overline{M}$. Возьмем в качестве $U(\overline{M},I,H)$ множество $U(M,I,H)$, а в качестве операторов $\varphi^{\overline{M}}_{i,h}$, $\psi^{\overline{M}}_{i,h}$ — операторы $\overline{\varphi}_{i,h}$, $\overline{\psi}_{i,h}$ $\forall (i,h) \in U(\overline{M},I,H)$. Тогда отображение $\overline{\rho}$ вместе с наборами $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ задает представление л. т. для алгебры G в пространстве $\overline{M}$. □

Основной факт, с помощью которого доказывается теорема 1 заключен в следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть $\rho : G \to \mathrm{End}_K(V)$ — представление л. т. энгелевой алгебры л. т. G. Если $\forall g \in G$ оператор $\rho(g)$ нильпотентен, то существует $v \in V$ такой, что $\rho(g)v = 0$ $\forall g \in G$.*

Доказательство будем вести индукцией по $\dim_K G$. Если $\dim_K G = 1$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $\dim_K G = n$, $\dim_K G' < n$, и для любой энгелевой алгебры л. т. G' утверждение теоремы выполнено для представлений л. т. с указанным выше условием.

Пусть H — максимальная ненулевая подалгебра л. т. в G (она существует, т. к. в G имеется одномерная подалгебра). Тогда можно утверждать, что $\dim_K H = \dim_K G - 1$ и H — идеал в G.

Рассмотрим фактор-пространство $\overline{G} = G/H$ и отображение $\overline{\rho} : G \to \mathrm{End}_K(\overline{G})$ вида $\overline{\rho}(h)(g+H) = hg + H$. Это отображение индуцировано сужением регулярного представления алгебры G на подалгебру H. Оно вместе с фактор-операторами $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$ в силу следствия 2 задает представление л. т. для алгебры H в пространстве $\overline{G}$. Так как G энгелева, то любой оператор

$\overline{\rho}(h)$, $h \in H$, нильпотентен. Но $\dim_K H < \dim_K G$ и H — энгелева алгебра л. т. (см. следствие 1). Поэтому по предположению индукции $\exists \overline{g}_0 \in \overline{G}$, $\overline{g}_0 \neq \overline{0}$, такой, что $\overline{\rho}(h)\overline{g}_0 = \overline{0}\ \forall h \in H$. Следовательно, пространство $T = \langle H, g_0 \rangle$, где g_0 — представитель класса $\overline{g}_0$, является подалгеброй, причем H — идеал в T. Из условия максимальности для H получаем, что $T = G$.

Пусть теперь $\rho : G \to \mathrm{End}_K(V)$ — представление л. т. для алгебры G, равной $\langle g_0 \rangle \oplus H$. В силу определения 2 сужение ρ на H является представлением л. т. для H в том же пространстве V. По предположению индукции для H в пространстве V существует такой ненулевой вектор v, что $\rho(h)v = 0\ \forall h \in H$.

Покажем, что в G можно выбрать базис $g', h_1, \dots, h_{n-1}\ \forall h_j \in H$ с условием $\rho(h_i)\rho(g') = \varphi_i \rho(g')\rho(h_i) + \psi_i \rho(h_i g')$, $i = 1, \dots, n-1$, $\varphi_i, \psi_i \in \mathrm{End}_K(V)$. Действительно, т. к. $S_k(V, G, H) = H \times G$ для некоторого k, $1 \le k \le n$ (см. замечание к определению 1), то $W_k(V, H, G)$ есть соответствующее непустое открытое множество $U(V, H, G)$. (Заметим, что вычисление всех операторов L_g производится в некотором фиксированном базисе $g_0, e_1, \dots, e_{n-1}$, где $e_1, \dots, e_{n-1}$ — базис H.) Напомним, что $W_k(V, H, G) = \bigcup\limits_{i=1}^{n_k} \{(a, b) \in H \times G,\ d^V_{k,i}(a, b) \neq 0\}$. Следовательно, существуют такие номер i_0 и элемент $h_0 \in H$, что многочлен $d^V_{k,i_0}(x_1, \dots, x_{n-1}, g_0 + h_0)$ тождественно не равен нулю, где $x_1, \dots, x_{n-1}$ — координаты вектора $h = \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i e_i \in H$. Пусть $\widetilde{H} = \bigoplus\limits_{j=1}^{n-1} H^{(j)}\ \forall H^{(j)} \cong H$ и базис каждой подалгебры $H^{(j)}$ есть e^j_s, $s = 1, \dots, n-1$, соответствующий базису e_s, $s = 1, \dots, n-1$, алгебры H. Обозначим $\widetilde{P} = K[x^j_i,\ i, j = 1, \dots, n-1]$ и введем многочлен

$$\widetilde{d} = \prod_{j=1}^{n-1} d_{k,i_0}(x^j_1, \dots, x^j_{n-1},\ g_0 + h_0) \in \widetilde{P}.$$

Тогда открытое множество

$$\widetilde{U} = \{\widetilde{h} = (h^1, \dots, h^{n-1}) \in \widetilde{H}\ \forall h^j = h^j_1 e^j_1 + \dots + h^j_{n-1} e^j_{n-1} \in H^{(j)},\ \widetilde{d}(\widetilde{h}) \neq 0\}$$

является произведением открытых множеств

$$U^{(j)} = \left\{ h^j = \sum_{m=1}^{n-1} h^j_m e^j_m \in H^{(j)},\ \ d_{k,i_0}(h^j_1, \dots, h^j_{n-1},\ g_0 + h_0) \neq 0 \right\}.$$

Отметим, что $\forall U^{(j)} \subset W_k(V, H, G)$ и поэтому $\rho(h^j)\rho(g_0 + h_0) = \varphi_{h^j}\rho(g_0 + h_0)\rho(h^j) + \psi_{h^j}\rho(h^j(g_0 + h_0))$, $\varphi_{h^j}, \psi_{h^j} \in \mathrm{End}_K(V)$. Наконец, рассмотрим определитель $\det((x^j_i),\ i, j = 1, \dots, n-1) \in \widetilde{P}$ и открытое множество $D = \{\widetilde{h} \in \widetilde{H},\ \det(h^j_i) = \det(\widetilde{h}) \neq 0\}$, где $\widetilde{h} = (h^1, h^2, \dots, h^{n-1})\ \forall h^j = h^j_1 e^j_1 + \dots + h^j_{n-1} e^j_{n-1}$. Так как пересечение непустых открытых множеств является непустым открытым множеством, то существует $\widetilde{h} \in D \cap U$, состоящий из $n-1$ линейно независимых элементов $h^1, \dots, h^{n-1}$, которые удовлетворяют вышеприведенному условию.

Обозначим через M подпространство в V состоящее из векторов вида $\{v \in V,\ hv = 0\ \forall h \in H\}$. Тогда, используя доказанное соотношение, имеем $h_j(g_0 + h_0)v = \varphi_{h_j, g_0+h_0}(g_0 + h_0)h_j v + \psi_{h_j, g_0+h_0}(h_j(g_0 + h_0))v = 0\ \forall v \in M$. Следовательно, M инвариантно относительно g_0. Поэтому существует $w \in M$ такой, что $g_0 w = 0$. Отсюда получаем $gw = 0\ \forall g \in G$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть G — энгелева алгебра л. т. Тогда отображение $\rho : g \to L_g$, $g \in G$, — это представление л. т. с условием нильпотентности для каждого оператора. Поэтому по теореме 2 существует $g \in G$ такой, что $xg = 0\ \forall x \in G$, т. е. $\mathrm{Ann}_G G = \{g \in G,\ xg = 0\ \forall x \in G\} \neq 0$. Обозначим этот аннулятор через A_1. Если в G уже построена цепочка подпространств вида $0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k$, где $GA_i \subset A_{i-1}$, то рассмотрим фактор-пространство $\overline{G} = G/A_k$ и фактор-представление алгебры G в $\overline{G}$, индуцированное регулярным представлением. В силу следствия 2 это фактор-представление будет представлением л. т., а т. к. оно индуцировано регулярным представлением энгелевой алгебры, то каждый оператор, отвечающий элементу алгебры, будет нильпотентным. Поэтому $\mathrm{Ann}_G \overline{G} = \{\overline{g} \in \overline{G},\ x\overline{g} = \overline{0}\ \forall x \in G\} \neq \overline{0}$. Обозначим через A_{k+1} полный прообраз в G последнего аннулятора. Тогда $A_{k+1} \supseteq A_k$, $A_{k+1} \neq A_k$, $GA_{k+1} \subset A_k$. Так как алгебра G конечномерна, то через конечное число шагов построим в G цепочку подпространств $G = A_m \supset A_{m-1} \supset \cdots \supset A_1 \supset 0$ с условием $GA_i \subset A_{i-1}$. Отсюда с очевидностью вытекает утверждение теоремы 1. $\square$

Теорема Энгеля находит применение в доказательстве предложения о существовании картановских подалгебр. Введем необходимые определения.

Определение 4. Подалгебра H в антикоммутативной алгебре G называется *картановской подалгеброй*, если H нильпотентна и совпадает со своим нормализатором $N_G(H) = \{g \in G,\ gh \in H\ \forall h \in H\}$.

В отличие от алгебр Ли, в алгебрах лиевского типа используется понятие нулькомпоненты, отличной от нулькомпоненты Фиттинга.

Определение 5. Нулькомпонентой множества H в антикоммутативной алгебре G называется подпространство $G_0(H) = \{x \in G\ \forall a \in A(H)\ \exists n \in \mathbb{N}\ a^n x = 0\}$, где $A(H)$ — подалгебра в $\mathrm{End}_K(G)$, порожденная операторами L_h, $h \in H$.

Если алгебра $A(H)$ конечномерна, то по теореме Веддерберна [4] алгебра $A(H)|_{G_0(H)}$ нильпотентна, и поэтому пространство $G_0(H) = \{x \in G,\ \exists n = n(x) \in \mathbb{N}\ \forall h_1, h_2, \ldots, h_n \in H\ L_{h_1} \ldots L_{h_n} x = 0\}$.

Заметим, что нулькомпонента $G_0(H)$ всегда содержится в фиттинговой нулькомпоненте $G_0^{\phi}(H) = \{x \in G\ \forall h \in H\ \exists n \in \mathbb{N}\ L_h^n x = 0\}$.

Если H — нильпотентная подалгебра в антикоммутативной алгебре G, то $H \subseteq G_0(H)$.

В случае, когда G — конечномерная алгебра Ли, то $G_0(H) = G_0^{\phi}(G)$. Также $G_0(H) = G_0^{\phi}(H)$ в произвольной антикоммутативной алгебре G, если $\dim_K H = 1$.

Предложение 2. *Картановская подалгебра H конечномерной антикоммутативной алгебры G совпадает со своей нулъкомпонентой, т. е. $G = G_0(H)$.*

Так как H нильпотентна, то $H \subseteq G_0 = G_0(H)$. Если $G_0 \supset H$, то рассмотрим действие алгебры H в пространстве G_0/H операторами $\overline{L}_h : (g_0 + H) \to (hg_0 + H)$ (это возможно, т. к. $HG_0 \subseteq G_0$). Из определения нулькомпоненты видно, что ассоциативная алгебра $\overline{A}(H)$, порожденная операторами $\overline{L}_h$, нильпотентна. Поэтому существует такой $\overline{g}_0 \in G_0/H$, $\overline{g}_0 \neq \overline{0}$, что $\overline{L}_h \overline{g}_0 = \overline{0}$ $\forall h \in H$. Следовательно, $g_0 \notin H$, но $g_0 \in N_G(H)$, т. е. $N_G(H) \supset H$, что противоречит определению картановской подалгебры.

По аналогии с соответствующим понятием из теории алгебр Ли введем определение регулярного элемента.

Определение 6. Элемент a алгебры G называется *регулярным*, если кратность нулевого характеристического корня оператора L_a минимальна.

Теорема 3. *Пусть G — конечномерная алгебра л. т. над бесконечным полем K. Если a — регулярный элемент алгебры g, то его фиттингова нулькомпонента $G_0^{\phi}(a)$ содержит картановскую подалгебру.*

Доказательство. Пусть T — некоторая подалгебра в $G_0^{\phi}(a)$, содержащая a. Докажем, что она нильпотентна.

Для любого элемента $b \in T$ матрица линейного оператора L_b в базисе, согласованном с разложением $G = T \oplus R$, где R — некоторое дополнительное подпространство, имеет вид

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $f_b(\lambda) = |\lambda E - L_b|$ характеристический многочлен оператора L_b. Тогда $f_b(\lambda) = f_b^{(1)}(\lambda) f_b^{(2)}(\lambda)$, $f_b^{(1)}(\lambda) = |\lambda E_1 - B_1|$, $f_b^{(2)}(\lambda) = |\lambda E_2 - B_2|$, где E_i, $i = 1, 2$, — единичные матрицы, отвечающие блокам B_i, $i = 1, 2$. Пусть $t = \dim_K T$, $r = \dim_K G_0^{\phi}(a)$. Предположим, что существует такой $b \in T$, что $L_b|_T = B_1$ — не нильпотентный оператор. Тогда $f_b^{(1)}(\lambda) = \lambda^{t'} g_1(\lambda)$, $t' < t$, $g_1(0) \neq 0$. Для любых двух параметров μ, ν из K рассмотрим элемент $\mu a + \nu b$ и, соответственно, оператор $\mu L_a + \nu L_b$. Его характеристический многочлен $f_{\mu a + \nu b}(\lambda) = f^{(1)}_{\mu a + \nu b}(\lambda) f^{(2)}_{\mu a + \nu b}(\lambda)$. Оператор L_a нильпотентен на подалгебре T, поэтому $f_a^{(2)}(\lambda) = \lambda^{r-t} g_2(\lambda)$, $g_2(0) \neq 0$. Дословно повторяя рассуждения из [5], получаем, используя бесконечность поля K, существование таких $\mu, \nu \in K$, что $f_{\mu a + \nu b}(\lambda) = \lambda^{r-t+t'} g_3(\lambda)$, $g_3(0) \neq 0$. Это противоречит регулярности a. Поэтому для любого $b \in T$ оператор $L_b|_T$ нильпотентен. Отсюда в силу теоремы 1 вытекает нильпотентность алгебры T.

Если $N_{G_0(a)}(T) \supset T$, то подпространство $\langle g_0, T\rangle$, $g_0 \notin T$, $g_0 \in N_{G_0(a)}(T)$ является нильпотентной подалгеброй в $G_0(a)$. В силу конечномерности G через конечное число шагов получим нильпотентную подалгебру T в $G_0(a)$, причем $N_{G_0(a)}(T) = T$. Повторяя рассуждения предложения 2, имеем $T = G_0(G_0(a), T) = \{x \in G_0(a),\ \exists n = n(x) \in \mathbb{N},\ y^n x = 0\ \forall y \in A(T)\}$. С другой стороны, $G_0(T) \subseteq G_0(a)$, и поэтому $G_0(G_0(a), T) = G_0(T)$, т. е. $T = G_0(T)$.

Из определения нормализатора и нулькомпоненты, легко получить, что $N_G(T) \subseteq G_0(T)$. Итак, $T = N_G(T)$. $\square$

Литература

1. Bahturin Y., Zaicev M. *Identities of graded algebras* // J. Algebra. – 1998. – V. 205. – № 1. – P. 1–12.
2. Бахтурин Ю.А., Зайцев М.В., Сегал С.К. *G-тождества неассоциативных алгебр* // Матем. сб. – 1999. – Т. 190. – № 11. – С. 3-14.
3. Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. *Кольца, близкие к ассоциативным.* – М.: Наука, 1978. – 431 с.
4. Пирс Р. *Ассоциативные алгебры.* – М.: Мир, 1986. – 541 с.
5. Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* – М.: Мир, 1964. – 355 с.

Казанский государственный университет

Поступила
14.02.2003