И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2005 МАТЕМАТИКА № 1 (512)

УДК 517.958:537.525

В.С. ЖЕЛТУХИН

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ПЛАЗМЫ ПОНИЖЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

1. Введение

Математическое моделирование является эффективным инструментом исследования сложных физических явлений [1], [2], к которым относится и плазма высокочастотных (ВЧ) разрядов пониженного давления [3]. Этот вид газоразрядной плазмы создается в результате воздействия электромагнитного поля частотой $f = 1{,}76 \div 13{,}56$ МГц, генерируемого с помощью индуктора или электродов в кварцевой трубке диаметром $1 \div 5$ см при давлении плазмообразующего газа $p = 1{,}33 \div 133$ Па. При этом плазма обладает следующими характеристиками: степень ионизации $10^{-4} \div 10^{-7}$, концентрации электронов n_e и ионов $n_i = n_e = 10^{15} \div 10^{19}$ м$^{-3}$, электронная температура $T_e = 1 \div 4$ эВ, температура атомов T_a и ионов T_i в центре разряда $T_a = T_i = (3 \div 4) \cdot 10^3$ К, в плазменной струе $T_a = T_i = (0{,}35 \div 1{,}0) \cdot 10^3$ К.

Свойства квазинейтральной плазмы ВЧ разряда пониженного давления в инертном газе при упрощающих предположениях, перечисленных в [3]–[5], описываются системой из 15 нелинейных краевых задач, неизвестными в которой являются модули, фазы и угловые функции векторов напряженностей магнитного $\mathbf{H}$ и электрического $\mathbf{E}$ полей, концентрация и температура электронов, концентрация и температура нейтральных атомов, компоненты вектора скорости плазмы $\mathbf{v}$.

Обоснование разрешимости системы в настоящее время отсутствует, поэтому целью данной работы является исследование некоторых необходимых условий существования нетривиального решения задачи.

2. Система краевых задач

Рассмотрим для определенности ВЧ индукционную плазму пониженного давления, которая создается в ограниченной цилиндрической области Ω с внешней границей Γ и осью симметрии Γ_0. Энергия электромагнитного поля вводится в плазму с помощью индуктора, проекция которого на внутреннюю стенку разрядной камеры $\Gamma_{\text{ind}} \subset \Gamma$.

Основными процессами, определяющими поддержание стационарного состояния газоразрядной плазмы, являются передача энергии электромагнитного поля электронам, ионизация и нагрев газа, уход заряженных частиц из разряда [6]. Поэтому рассмотрим подсистему полной системы краевых задач ВЧ плазмы пониженного давления [3], описывающую именно эти процессы. Подсистема включает в себя:

краевую задачу для уравнения диффузии–конвекции электронного газа

$$-\operatorname{div}(D_a \operatorname{grad} n_e - \mathbf{v} n_e) = \nu_i n_e, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\lim_{r \to 0} r D_a \frac{\partial n_e}{\partial r} = 0, \quad \left[D_a \frac{\partial n_e}{\partial \mathbf{n}} - \beta n_e \right] \Big|_{\Gamma} = 0; \tag{2}$$

краевую задачу для уравнения теплопроводности ($\equiv$ уравнения сохранения энергии) электронного газа

$$-\operatorname{div}\left(\varkappa_e \operatorname{grad} T_e - \frac{5}{2}k_B n_e T_e \mathbf{v}_e\right) + \frac{3}{2}k_B \delta\nu_c n_e (T_e - T_a) = \sigma E^2 - \nu_i n_e E_I, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\lim_{r\to 0} r\varkappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = 0, \quad \left\{\frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{n}} - \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{m_i}{2\pi m_e} - 1\right)\right]\frac{n_e (k_B T_e)^{3/2}}{\varkappa_e m_e^{1/2}}\right\}\Big|_\Gamma = 0; \tag{4}$$

краевую задачу для уравнения теплопроводности ($\equiv$ уравнения сохранения энергии) атомно-ионного газа

$$-\operatorname{div}\left(\varkappa_a \operatorname{grad} T_a - \frac{5}{2}k_B n_a T_a \mathbf{v}\right) - \frac{3}{2}k_B \delta\nu_c n_e (T_e - T_a) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$\lim_{r\to 0} r\varkappa_a \frac{\partial T_a}{\partial r} = 0, \quad \varkappa_a \frac{\partial T_a}{\partial \mathbf{n}}\Big|_\Gamma = \frac{\varkappa_w}{h_w}(T_w - T_a); \tag{6}$$

краевые задачи для уравнений сохранения энергии электромагнитного поля в дифференциальной форме

$$\operatorname{div}\left(\frac{\sigma}{s^2}\operatorname{grad} H^2 - 2\mathbf{w}H^2\right) = 2\sigma E^2, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\sigma}{s^2}\frac{\partial H^2}{\partial r} = 0, \quad H^2|_{\Gamma_{\text{ind}}} = H^2_{\text{ind}}, \quad \left[\frac{\sigma}{s^2}\frac{\partial H^2}{\partial \mathbf{n}} - 2(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})H^2\right]\Big|_{\Gamma\setminus\Gamma_{\text{ind}}} = 0, \tag{8}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} E^2 - 2\mathbf{q}E^2) - 2\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}E^2 = 2(\mu_0\omega)^2 H^2, \quad x \in \Omega, \tag{9}$$

$$\left[\frac{\partial E^2}{\partial \mathbf{n}} - 2(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})E^2\right]\Big|_\Gamma = EH, \quad E^2|_{\Gamma_0\cup\Gamma_2} = 0. \tag{10}$$

Здесь D_a — коэффициент амбиполярной диффузии, ν_i — частота ионизации, x — текущие координаты точки в пространстве, r — ее радиальная координата, β — функция, определяющая взаимодействие заряженных частиц со стенкой разрядной камеры, $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль к границе, $\varkappa_e$, $\varkappa_a$ — коэффициенты теплопроводности электронного и атомно-ионного газов, k_B — постоянная Больцмана, $\mathbf{v}_e$ — вектор электронной скорости, $\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - D_a \operatorname{grad} n_e/n_e$, δ — доля энергии, передаваемая электронами атомам и ионам в упругих столкновениях, ν_c — частота таких столкновений, σ — проводимость плазмы, $E^2 = |\mathbf{E}|^2$, E_I — потенциал ионизации атомов плазмообразующего газа, m_i, m_e — массы ионов и атомов, n_a — концентрация нейтральных атомов, $\varkappa_w$ — коэффициент теплопроводности материала стенок разрядной камеры, h_w — толщина стенок, T_w — наружная температура (температура охлаждающей жидкости), $H^2 = |\mathbf{H}|^2$, $s^2 = \sigma^2 + (\varepsilon_0\varepsilon\omega)^2$, ε_0 — электрическая постоянная, ε — относительная диэлектрическая проницаемость, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота электромагнитного поля, $\mathbf{w}$ — вектор, зависящий от проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы, фазы и направления вектора $\mathbf{H}$ [3], H_{ind} — напряженность магнитного поля, создаваемая индуктором на стенке разрядной камеры, $\mathbf{q}$ — вектор, зависящий от направления вектора $\mathbf{E}$ [3], c — скорость света в вакууме, μ_0 — магнитная постоянная, Γ_2 — часть границы разрядного объема, непрозрачная для электромагнитного поля.

Связь уравнений в системе задается зависимостями коэффициентов переноса от давления и температуры соответствующих частиц, формулами для вычисления проводимости σ и диэлектрической проницаемости плазмы ε, уравнением состояния

$$p = n_a k T_a, \quad D_a = D_a(p, T_e), \quad \nu_i = \nu_i(p, T_e), \quad \beta = \beta(T_e), \tag{11}$$

$$\varkappa_e = n_e \varkappa_e'(T_e), \quad \nu_c = \nu_c(p, T_e), \quad \varkappa_a = \varkappa_a(n_a, T_a), \tag{12}$$

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \nu_c}{m_e(\nu_c^2+\omega^2)}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{n_e e^2 \omega}{\varepsilon_0 m_e(\nu_c^2+\omega^2)}. \tag{13}$$

Здесь $\varkappa_e'$ — функция, зависящая только от электронной температуры.

Будем считать распределение скорости и концентрации нейтральных атомов, фаз и угловых функций векторов напряженностей электрического и магнитного полей заданными функциями координат.

3. Условие разрешимости краевой задачи (1), (2)

Нетрудно видеть, что одним из решений уравнения (1) с граничным условием (2) является тривиальное, т. е. $n_e \equiv 0$ для всех $x \in \Omega$. Однако в соответствии с физическим смыслом задачи интерес представляет только нетривиальное решение, которое, более того, должно быть неотрицательным, $n_e \geqslant 0$. Заметим также, что решение задачи (1), (2) определяется с точностью до произвольного множителя: любая функция вида $n_e(x) = n_e^* \cdot \overline{n}_e(x)$, где n_e^* — произвольный множитель, $\overline{n}_e(x)$ — некоторое решение задачи (1), (2), также будет решением.

Это означает, что задача (1), (2) относится к классу задач на собственные значения, а распределение концентрации электронов в ВЧ плазме пониженного давления является собственной функцией. При этом, как нетрудно показать, спектральным параметром является значение электронной температуры в центре плазмы $T_e^* = T_e(x^*)$, которое нелинейно входит в коэффициент и весовую функцию уравнения. Здесь x^* — точка, в которой достигается максимум n_e.

Действительно, с помощью замены переменных $\overline{n}_e(x) = n_e(x)/n_e^*$, $\overline{T}_e(x) = T_e(x)/T_e^*$, $\overline{D}_a = D_a/D_a^*$, $\overline{\nu}_i = \nu_i/\nu_i^*$, $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/D_a^*$, $\overline{\beta} = \beta/D_a^*$, где $n_e^* = n_e(x^*)$, $T_e^* = T_e(x^*)$, $D_a^* = D_a(p^*, T_e^*)$, $\nu_i^* = \nu_i(p^*, T_e^*), p^* = p(x^*)$, задача (1), (2) приводится к виду

$$-\operatorname{div}(\overline{D}_a \operatorname{grad} \overline{n}_e - \overline{\mathbf{v}}\overline{n}_e) = \overline{\lambda}\overline{\nu}_i\overline{n}_e, \tag{14}$$

$$\lim_{r\to 0} r\overline{D}_a \frac{\partial \overline{n}_e}{\partial r} = 0, \quad \left[\overline{D}_a \frac{\partial \overline{n}_e}{\partial \mathbf{n}} - \overline{\beta}\overline{n}_e\right]\Big|_\Gamma = 0. \tag{15}$$

Здесь $\overline{\lambda} = \nu_i^*/D_a^*$.

Уравнение (14) с граничными условиями (15) представляет собой линейную задачу на собственные значения. Известно, что спектр эллиптического уравнения с младшими производными является комплексным; при этом только наименьшее по модулю собственное значение $\overline{\lambda}_0$ вещественно, а отвечающая ему собственная функция неотрицательна [7]. Производя обратную замену переменных, установим, что нетривиальное неотрицательное решение задачи (1), (2) существует только в том случае, если его коэффициенты удовлетворяют соотношению

$$\frac{D_a(p^*, T_e^*)}{\nu_i(p^*, T_e^*)}\overline{\lambda}_0 = 1, \tag{16}$$

где $\overline{\lambda}_0$ — наименьшее собственное значение задачи (14)–(15).

Распределение давления в плазме ВЧ разряда пониженного давления $p = p(x)$ определяется решением уравнений Навье–Стокса совместно с краевой задачей (5), (6) и зависит от давления на входе в разрядную камеру и расхода газа [3], т. е. может регулироваться внешним воздействием. Поэтому, решив задачу на собственные значения (14), (15), и разрешая нелинейное уравнение (16) относительно T_e^*, можно найти такое его значение, которое обеспечивает разрешимость задачи (1), (2).

Таким образом, уравнение (1) с граничными условиями (2) действительно является задачей на собственные значения, причем ее спектральным параметром является значение T_e^*, которое нелинейно входит в коэффициенты и весовую функцию уравнения. Необходимым условием разрешимости краевой задачи (1)–(2) является выполнение равенства (16). Достаточные условия существования нетривиального неотрицательного решения задачи (1)–(2) в частном случае однородных граничных условий первого рода получены в [8].

4. Условия совместности системы краевых задач

Выше показано, что нетривиальное неотрицательное решение уравнения диффузии электронов (1) с краевыми условиями (2) существует лишь при определенном значении электронной температуры в центре разряда, задаваемом соотношением (16). Однако значение T_e^* не является свободным параметром, т. к. пространственное распределение $T_e(x)$ и соответственно значение $T_e^* = T_e(x^*)$ находятся в результате решения уравнения (3) с граничным условием (4). Требование совместности системы краевых задач приводит к необходимости управления решением краевой задачи (3), (4) так, чтобы обеспечить выполнение соотношения (16).

Покажем, что управление поведением функции $T_e(x)$ возможно за счет изменения краевого условия первого рода в задаче расчета распределения напряженности магнитного поля (7)–(8).

Заметим, что выражение σE^2 входит в правую часть уравнений (3) и (7). Проинтегрируем их, а также уравнение (5) по объему плазмы. Получим следующие соотношения, которые выполняются на решениях системы задач (1)–(10):

$$-\int_\Gamma \left(\varkappa_e \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{n}} - \frac{5}{2} k_B v_{e,n} n_e T_e\right) d\Gamma + \int_\Omega \left[\frac{3}{2} k_B \delta \nu_c n_e (T_e - T_a) + \nu_i n_e E_I\right] d\Omega = P_d, \tag{17}$$

$$-\int_\Gamma \left(\varkappa_a \frac{\partial T_a}{\partial \mathbf{n}} - \frac{5}{2} k_B v_{a,n} n_a T_a\right) d\Gamma - \int_\Omega \left[\frac{3}{2} k_B \delta \nu_c n_e (T_e - T_a)\right] d\Omega = 0, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_{\text{ind}}} \left(\frac{\sigma}{s^2} \frac{\partial H^2}{\partial \mathbf{n}} - 2 w_n H^2\right) d\Gamma = P_d. \tag{19}$$

Здесь $P_d = \int\limits_\Omega \sigma E^2 d\Omega$ есть мощность, вкладываемая в разряд, значение которой является одной из основных энергетических характеристик ВЧ плазменной установки [3], $w_n = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})$, $v_{e,n} = (\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n})$, $v_{a,n} = (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n})$. Отметим, что соотношения (18), (19) являются выражением закона сохранения энергии для ВЧ плазмы пониженного давления в рамках рассматриваемой модели.

Равенства (17)–(19) должны выполняться одновременно, что невозможно при произвольном задании значения H_{ind} в граничных условиях первого рода (8) к уравнению (7). Поскольку в силу (13) $\sigma \sim n_e$, то значение P_d прямо пропорционально n_e^*, так же, как и левая часть соотношения (17). Из краевых задач (7), (8) и (9), (10) следуют отношения пропорциональности $H^2 \sim H_{\text{ind}}^2$, $E^2 \sim H_{\text{ind}}^2$.

Сложим равенства (17), (18) и перепишем полученное соотношение с учетом зависимостей (11)–(13), пропорциональности $H \sim H_{\text{ind}}$, $E \sim H_{\text{ind}}$, вынося при этом размерные множители за знак интегрирования. Получим

$$\left(\overline{A} + \frac{n_a^* T_a^*}{n_e^* T_e^*} \overline{B} + \nu_i^* \frac{E_I}{T_e^*} \overline{C}\right) T_e^* = \frac{H_{\text{ind}}^2 \overline{D}}{\nu_c^*}, \tag{20}$$

где

$$\overline{A} = -\int_\Gamma \left(\varkappa_e' \frac{\partial \overline{T}_e}{\partial \mathbf{n}} - \frac{5}{2} k_B v_{e,n} \overline{n}_e \overline{T}_e\right) d\Gamma, \quad \overline{B} = -\int_\Gamma \left(\varkappa_a' \frac{\partial \overline{T}_a}{\partial \mathbf{n}} - \frac{5}{2} k_B v_{a,n} \overline{n}_a \overline{T}_a\right) d\Gamma, \tag{21}$$

$$\overline{C} = \int_\Omega \overline{n}_e \overline{\nu}_i d\Omega, \quad \overline{D} = \int_\Omega \frac{\overline{n}_e e^2 \overline{\nu}_c \overline{E}^2}{m_e[\overline{\nu}_c^2 + (\omega/\nu_c^*)^2]} d\Omega,$$

$$\varkappa_a' = \frac{\varkappa_a}{n_a^*}, \quad \overline{\nu}_c = \frac{\nu_c}{\nu_c^*}, \quad \nu_c^* = \nu_c(p^*, T_e^*), \quad \overline{T}_a = \frac{T_a}{T_a^*}, \quad T_a^* = T_a(x^*), \quad \overline{E}^2 = \frac{E^2}{H_{\text{ind}}^2}. \tag{22}$$

Величины $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ слабо зависят от T_e^*. Поэтому из (20) следует, что T_e^* как решение краевой задачи (3)–(4) нелинейно зависит от H_{ind}. Таким образом, значение $T_e(x^*)$, найденное в результате решения краевой задачи (3)–(4), совпадет со значением T_e^*, полученным из соотношения (16) только в том случае, если значение H_{ind} в граничных условиях (8) будет задано в соответствии с равенством (20).

Заметим, что при изменении значений напряженностей полей на границе разряда соответственно изменяется и левая часть соотношения (19). Для ВЧ индукционной плазмы с учетом введенных величин оно принимает вид

$$\frac{1}{2}H_{\text{ind}}^2\overline{P} = \frac{n_e^* H_{\text{ind}}^2}{\nu_c^*}\overline{D}, \quad \text{где} \quad \overline{P} = \int_{\Gamma_{\text{ind}}} \left(\frac{\sigma}{s^2}\frac{\partial \overline{H}^2}{\partial \mathbf{n}} - 2w_n\right) d\Gamma.$$

Отсюда следует, что равенство (19) будет выполнено, если

$$n_e^* = \frac{\nu_c^* \overline{P}}{2\overline{D}}. \tag{23}$$

Равенства (20) и (23) получены в предположении, что функции n_e, T_e, T_a, H^2, E^2 являются решениями системы краевых задач (1)–(10). Поэтому они являются необходимыми условиями совместности этой системы при произвольных зависимостях транспортных коэффициентов.

5. Условия разрешимости системы краевых задач

Существование решения системы краевых задач (1)–(10) обеспечивается ее совместностью и выполнением равенства (16). Действительно, если равенство (16) не имеет места, то решением краевой задачи (1), (2) является только тривиальное, т. е. $n_e \equiv 0$ для всех $x \in \Omega$. При этом вследствие обращения в нуль коэффициентов при главном члене уравнения задачи (3), (4) и (7), (8) вырождаются во всей области Ω, т. е. система (1)–(10) теряет смысл.

На основании изложенного можно сформулировать следующее

Утверждение. *Для существования нетривиального решения системы краевых задач* (1)–(10) *необходимо, чтобы концентрации электронов и электронной температуры в центре плазмы* n_e^* *и* T_e^*, *напряженность магнитного поля, создаваемого индуктором на границе плазмы* H_{ind}, *удовлетворяли нелинейным соотношениям*

$$\frac{D_a(p^*, T_e^*)}{\nu_i(p^*, T_e^*)}\overline{\lambda}_0 = 1, \quad H_{\text{ind}}^2 = \left(\overline{A} + \frac{n_a^* T_a^*}{n_e^* T_e^*}\overline{B} + \nu_i^* \frac{E_I}{T_e^*}\overline{C}\right) T_e^* \nu_c^* \overline{D}^{-1}, \quad n_e^* = \frac{1}{2}\frac{\nu_c^* \overline{P}}{\overline{D}}, \tag{24}$$

где $\overline{\lambda}_0$ — *наименьшее собственное значение задачи* (14), (15), *коэффициенты* $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, $\overline{P}$ *определены соотношениями* (21), (22), *а величины, отмеченные звездочкой, суть значения соответствующих функций в центре плазмы.*

Аналогичные утверждения можно сформулировать для ВЧ емкостной плазмы, генерируемой с помощью внешних электродов, а также для плазмы ВЧ комбинированного (индукционно-емкостного) разряда пониженного давления.

6. Заключение

Нетрудно видеть, что система краевых задач (1)–(10) с дополнительными условиями (24) является замкнутой. Это означает, что решение системы краевых задач ВЧ плазмы пониженного давления полностью определяется аппроксимациями коэффициентов переноса, материальными уравнениями среды и граничными условиями. При этом решение системы автоматически определяет значение граничного условия первого рода для напряженности магнитного поля без привлечения априорных эмпирических данных, например, о степени ионизации или термической неравновесности плазмы.

Таким образом, в результате проведенного анализа системы краевых задач (1)–(10) получены необходимые условия существования решения в виде формул (24), связывающих значение концентрации электронов в центре разряда с электронной температурой в этой же точке и напряженностью магнитного поля на стенке разрядной камеры, которые необходимы для поддержания стационарного ВЧ индукционного разряда пониженного давления.

Выявленная взаимосвязь внутренних характеристик ВЧ плазмы пониженного давления с граничными условиями первого рода (8) в построенной модели является математическим выражением известного экспериментального факта, что положительный столб газовых разрядов является самонастраивающейся, автоматически регулируемой системой [9], [10]. Это означает, что основные параметры разряда, такие как напряженность электрического поля, величина средней энергии электронов устанавливаются автоматически, независимо от величины тока, протекающего через разряд, и приложенного напряжения.

Аналогично, в построенной модели решение системы краевых задач (1)–(10) позволяет найти не только пространственные распределения основных характеристик плазмы, но и одновременно определить значения напряженности магнитного поля, которую необходимо создать на стенках разрядной камеры для поддержания стационарного состояния плазмы, а также поглощаемой разрядом мощности, концентрации и температуры электронов в центре разряда.

Таким образом, система краевых задач (1)–(10), описывающая квазинейтральную высокочастотную плазму пониженного давления, с дополнительными условиями (24) является замкнутой относительно входящих в нее параметров, при этом соотношения (24) представляют собой необходимые условия совместности и существования ее нетривиального решения.

Литература

1. Самарский А.А. *Математическое моделирование и вычислительный эксперимент* // Вестн. АН СССР. – 1979. – № 5. – С. 38–49.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.* – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
3. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф. *Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2000. – 348 с.
4. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кудинов В.В. *Физическая модель взаимодействия высокочастотной плазмы с твердыми телами в динамическом вакууме* // Физ. и хим. обработки матер. – 2003. – № 4. – С. 46–52.
5. Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кудинов В.В. *Математическая модель высокочастотной плазменной обработки материалов в динамическом вакууме* // Физ. и хим. обработки матер. – 2003. – № 6. – С 48–54.
6. Райзер Ю.П. *Основы современной физики газоразрядных процессов.* – М.: Наука, 1980. – 416 с.
7. Асланян А.Г., Лидский В.Б. *О спектре эллиптического уравнения* // Матем. заметки. – 1970. – Т. 7. – № 7. – С. 495–502.
8. Желтухин В.С. *О разрешимости одной нелинейной спектральной задачи теории высокочастотных разрядов пониженного давления* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 5. – С. 26–31.
9. Елецкий А.В. *Газовый разряд.* – М.: Знание, 1981. – 63 с.
10. Райзер Ю.П., Шнейдер М.Н., Яценко Н.А. *Высокочастотный емкостный разряд: Физика. Техника эксперимента. Приложения.* – М.: Изд-во Моск. физ.- техн. ин-та; Наука. Физматлит, 1995. – 320 с.

Казанский государственный университет

Поступила 30.09.2004