КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 129, кн. 3 *Ученые записки* *1969*

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. Я. Вольперт

Гиперболические функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ аксиоматически определяются как функции, определенные на всей числовой прямой и удовлетворяющие следующим соотношениям:

I. $$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

указанное соотношение должно выполняться для всех вещественных значений x и y.

II. $$\operatorname{ch} 0 = 1.$$

III. На интервале $(0, +\infty)$ функции $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ положительны.

Указанное выше аксиоматическое определение гиперболических функций содержит в себе как частный случай общеизвестное понятие гиперболических функций, выражаемых формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

в чем легко убедиться путем проверки выполнимости соотношений I, II, III. Далее, указанное нами частное понятие гиперболических функций является подтверждением существования и непротиворечивости более широкого класса гиперболических функций, определяемых соотношениями I, II, III.

Ниже мы покажем, что свойства, имеющие место для частного понятия гиперболических функций, сохраняются и для более широкого класса гиперболических функций, определяемых вышеуказанными аксиомами.

Перейдем к рассмотрению свойств гиперболических функций, определяемых аксиоматически соотношениями I, II, III.

1°. Для всех вещественных x справедливо равенство:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Положим в соотношении (1)

$$x = y;$$

тогда:

$$\operatorname{ch} 0 = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x,$$

но

$$\operatorname{ch} 0 = 1 \text{ по (II)};$$

откуда:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{1}$$

2°.

$$\operatorname{sh} 0 = 0. \tag{2}$$

Полагая в (1) $x = 0$, получим:

$$\operatorname{ch}^2 0 - \operatorname{sh}^2 0 = 1,$$

но $\operatorname{ch} 0 = 1$, откуда и будет следовать (2).

3°. Функция $\operatorname{ch} x$ четная. Полагая в соотношении I $x = 0$ и обозначив y через x, получим равенство:

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(0 - x) = \operatorname{ch} 0 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 0,$$

но т. к. $\operatorname{ch} 0 = 1$, а $\operatorname{sh} 0 = 0$, то

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x.$$

4°. Для всех $x > 0$, $\operatorname{ch} x > 1$, в силу (1)

$$\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x.$$

Но согласно III для всех $x > 0$ имеем:

$$\operatorname{sh} x > 0 \text{ и } \operatorname{ch} x > 0.$$

Тогда:

$$\operatorname{ch}^2 x > 1$$

и значит $\operatorname{ch} x > 1$.

5°. Функция $\operatorname{sh} x$ нечетная.

Заменив в (1) x через $\frac{x}{2}$ имеем

$$\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = 1.$$

В силу I

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}\left[\frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right)\right] = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right).$$

Вычитая из второго равенства первое, придем к выражению:

$$\operatorname{ch} x - 1 = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right) - \left[\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}\right] =$$

$$= \operatorname{sh} \frac{x}{2}\left[\operatorname{sh} \frac{x}{2} - \operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right)\right]. \tag{3}$$

Далее, заменив в $\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}=\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-1$ $\frac{x}{2}$ через $-\frac{x}{2}$ и учитывая четность $\operatorname{ch} x$, получим:

$$\operatorname{sh}^2\left(-\frac{x}{2}\right)=\operatorname{ch}^2\left(-\frac{x}{2}\right)-1,$$

$$\operatorname{ch}\frac{x}{2}=\operatorname{ch}\left(-\frac{x}{2}\right),$$

откуда следует $\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}=\operatorname{sh}^2\left(-\frac{x}{2}\right)$ и, следовательно,

$$\left|\operatorname{sh}\frac{x}{2}\right|=\left|\operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right)\right|.$$

Покажем, что для $x>0$, $\operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right)<0$.

Предположим, что $\operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right)\geqslant 0$. Согласно III $\operatorname{sh}\frac{x}{2}>0$, т. к. $\operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right)\geqslant 0$ и $\left|\operatorname{sh}\frac{x}{2}\right|=\left|\operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right)\right|$, то $\operatorname{sh}\frac{x}{2}=\operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right)$.

Тогда правая часть равенства (3) обращается в нуль, откуда следует, что $\operatorname{ch} x-1=0$, или $\operatorname{ch} x=1$, что противоречит свойству 4°.

Итак $\operatorname{sh}\left(-\frac{x}{2}\right)<0$.

Заменив $\frac{x}{2}$ через x в предыдущих соотношениях, мы придем к выражениям: $\operatorname{sh} x>0$, $\operatorname{sh}(-x)<0$ и $|\operatorname{sh} x|=|\operatorname{sh}(-x)|$, откуда, в свою очередь, будет следовать, что $\operatorname{sh} x=-\operatorname{sh}(-x)$, т. е. функция $\operatorname{sh} x$ — нечетная.

6°. $$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y. \qquad (4)$$

Действительно:

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}[x-(-y)]=\operatorname{ch} x\operatorname{ch}(-y)-\operatorname{sh} x\operatorname{sh}(-y)=$$
$$=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y.$$

7°. $$\operatorname{ch}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x+1}{2}};\quad \operatorname{sh}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\operatorname{ch} x-1}{2}}. \qquad (5)$$

Полагая в (4) $x=y$ и заменяя x через $\frac{x}{2}$, получим:

$$\operatorname{ch} x=\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}+\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}.$$

Складывая и вычитая полученное равенство с равенством, получим формулы (5):

$$\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}=1.$$

$$8^\circ. \qquad \operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\beta = 2\operatorname{sh}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sh}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{ch}\beta = 2\operatorname{ch}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ch}\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (6)$$

Складывая и вычитая равенства (4) и (I), соответственно получаем:

$$\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y) = 2\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y$$

и

$$\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y) = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y.$$

Обозначив $x+y$ через α, $x-y$ через β и, выразив x и y через α, β получим формулы (6).

$$9^\circ. \qquad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y; \qquad (7)$$

из (1) найдем:

$$\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$$

и

$$\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{sh}^2 x + 1. \qquad (8)$$

При рассмотрении различных значений x и y в соотношении (7) могут представиться следующие случаи:

а) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; в) $x < 0$, $y < 0$; с) $x \geqslant 0$, $y < 0$.

В случае с) надо также рассмотреть возможные соотношения между значениями x и y, выражаемые неравенствами: $x \geqslant |y|$ и $x < |y|$; для $x < 0$, $y \geqslant 0$ имеет место случай с).

Рассмотрим эти три случая:

а) Пусть $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; заменив в (8) x через $x+y$, получим

$$\operatorname{sh}^2(x+y) = \operatorname{ch}^2(x+y) - 1; \qquad (9)$$

заменив в (9) $\operatorname{ch}(x+y)$ через (4) и 1 через (1), после ряда элементарных преобразований придем к выражению:

$$\operatorname{sh}^2(x+y) = (\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y + \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y)^2, \qquad (10)$$

т. к. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то $x+y \geqslant 0$ и значения функций, входящих в соотношение (10), неотрицательны, откуда:

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y.$$

в) $x < 0$, $y < 0$ и значит $-x > 0$, $-y > 0$. Тогда по а):

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}[-(-x-y)] = -\operatorname{sh}[(-x)+(-y)] =$$
$$= -[\operatorname{sh}(-x)\operatorname{ch}(-y) + \operatorname{ch}(-x)\operatorname{sh}(-y)] = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y.$$

с) $x \geqslant 0$, $y < 0$, т. е. $y = -|y|$; обозначим $x+y$ через z; может быть, что

1). $x \geqslant |y|$; тогда $z \geqslant 0$ и $x = z + |y|$; поэтому $\operatorname{sh}x = \operatorname{sh}(z+|y|) = \operatorname{sh}z\operatorname{ch}y - \operatorname{ch}z\operatorname{sh}y$; умножив обе части последнего равенства на $\operatorname{ch}y$ придем к выражению:

$$\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y = \operatorname{sh}z\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}z\operatorname{sh}y\operatorname{ch}y. \qquad (11)$$

Аналогично, умножая обе части равенства:

$$\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(z + |y|) = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} z \operatorname{sh} y$$

на $\operatorname{sh} y$, получим выражение

$$\operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y - \operatorname{sh} z \operatorname{sh}^2 y. \qquad (12)$$

Сложив (11) и (12) и учитывая, что $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$, придем к формуле (7).

2) $x < |y|$; тогда $x + y = x - |y| = -(|y| - x)$

и $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}[-(|y| - x)] = -\operatorname{sh}[|y| + (-x)]$;

т. к. $-x < 0$, $|y| > 0$ и $|y| \geqslant |-x|$, то в силу 1) имеем:

$$\operatorname{sh}(x + y) = -[\operatorname{sh}|y| \operatorname{ch}(-x) + \operatorname{ch}|y| \operatorname{sh}(-x)] =$$
$$= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

Таким образом при любых действительных x, y равенство (7) имеет место.

10°. $$\operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y. \qquad (13)$$

Действительно, в силу соотношения (7), а также четности и нечетности $\operatorname{sh} x$, получаем:

$$\operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh}[x + (-y)] = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(-y) + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(-y) =$$
$$= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

Итак, нами получены взаимные формулы (7) и (13), выражающие значения гиперболических функций суммы и разности двух аргументов через их значения от составляющих аргументов.

11°. Функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ на полуоси $[0, +\infty]_A$ существенно растут. Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta$; тогда $\frac{\alpha + \beta}{2} > 0$, $\frac{\alpha - \beta}{2} < 0$.

В силу нечетности $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{sh}\frac{\alpha + \beta}{2} > 0$, $\operatorname{sh}\frac{\alpha - \beta}{2} < 0$ и в силу (6) вытекает, что $\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\beta < 0$, т. е. $\operatorname{ch}\alpha < \operatorname{ch}\beta$, где $\alpha < \beta$. На основании формулы (1) $\operatorname{sh} x = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$, т. к. $x > 0$, то согласно аксиомы III $\operatorname{sh} x > 0$ и значит $\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$. Из полученного соотношения и вытекает утверждение о возрастании $\operatorname{sh} x$ на полуоси $[0, +\infty)$.

12°. Функции $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ непрерывны на всей числовой прямой.

Т. к. функция $\operatorname{ch} x$ — четная, а $\operatorname{sh} x$ — нечетная, то достаточно доказать непрерывность указанных функций на полуоси $[0, +\infty)$.

Рассмотрим функцию $\operatorname{ch} x$.

Докажем ее непрерывность справа в точке 0, откуда в силу четности этой функции будет вытекать и непрерывность слева в точке 0.

Т. к. функция $\operatorname{ch} x$ существенно растет справа точки нуль, оставаясь больше 0, то существует справа в точке нуль предел $\operatorname{ch} x$ не меньше 1 ($\operatorname{ch} 0 = 1$)

$$e = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{ch} x, \quad e \geqslant 1.$$

Найдем связь между значениями $\operatorname{ch} x$ в точках $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ Положим $\operatorname{ch} 1 = a$, $a > 1$.

Для вычисления значений $\operatorname{ch} x$ будем неоднократно применять формулу: $\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}}$.

Полагая $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ получим ряд значений $\operatorname{ch} x$:

$$\operatorname{ch} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2 + 2a}}{2};$$

$$\operatorname{ch} \frac{1}{2^2} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2a}}}{2};$$

$$\operatorname{ch} \frac{1}{2^3} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2a}}}}{2};$$

$$\operatorname{ch} \frac{1}{2^k} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + 2a}}}}{2} \quad (k \text{ радикалов}).$$

Введем в рассмотрение последовательность чисел, связанных рекурентным соотношением $S_k = \sqrt{2 + s_{k-1}}$,

где $$S_1 = \sqrt{2 + 2a}.$$

Согласно (14): $\operatorname{ch} \frac{1}{2^k} = \frac{Sk}{2}$.

Т. к. $\operatorname{ch} \frac{1}{2^k}$ убывает и стремится к e, то $S_k = 2\operatorname{ch} \frac{1}{2^k}$ также убывает и имеет предел, равный $2e$.

Перейдем к пределу в левой части и правой части соотношения:

$$S_k^2 = 2 + S_{k-1}.$$

Получим $4e^2 = 2 + 2e$, $e = \frac{1 \pm 3}{4}$; $e > 0$, значит $e = 1$. Итак:

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{ch} x = 1.$$

Но т. к. $\operatorname{ch} 0 = 1$, то отсюда далее следует, что $\operatorname{ch} x$ непрерывна справа в точке 0.

Пусть $x_0 > 0$ и $h > -x_0$.

Для указанного значения аргумента можно записать

$$\operatorname{ch}(x_0+h)=\operatorname{ch}x_0\operatorname{ch}h+\operatorname{sh}x_0\operatorname{sh}h.$$

При $h\to 0$, согласно предыдущему, $\operatorname{ch}h\to 0$ и на основании соотношения $\operatorname{ch}^2 h-\operatorname{sh}^2 h=1$ далее будет следовать стремление к 0 и $\operatorname{sh}h$, откуда, в свою очередь, следует существование предела $\lim\limits_{h\to 0}\operatorname{ch}(x_0+h)=\operatorname{ch}x_0$, что и доказывает утверждение о непрерывности $\operatorname{ch}x$ на полуоси $[0, +\infty)$ значит и на всей оси $[-\infty, +\infty]$.

Из (8) далее следует непрерывность $\operatorname{sh}x$ на $[-\infty, +\infty]$.

13°. Функции $\operatorname{ch}x$, $\operatorname{sh}x$ стремятся к $+\infty$ при $x\to+\infty$

$$\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}\beta=2\operatorname{sh}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sh}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Полагая в указанной формуле

$$\beta=k,\ \alpha=k+1,\ \text{где}\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

получим выражение:

$$\operatorname{ch}(k+1)-\operatorname{ch}k=2\operatorname{sh}\left(k+\frac{1}{2}\right)\operatorname{sh}\frac{1}{2}, \tag{15}$$

дающее при частных значениях $k=1, 2, \dots, n$ последовательность соотношений (16):

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch}2-\operatorname{sh}1=2\operatorname{sh}\frac{3}{2}\operatorname{sh}\frac{1}{2},\\
&\operatorname{ch}3-\operatorname{ch}2=2\operatorname{sh}\frac{5}{2}\operatorname{sh}\frac{1}{2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\operatorname{ch}(n+1)-\operatorname{ch}n=2\operatorname{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{sh}\frac{1}{2};
\end{aligned} \tag{16}$$

сложив левые и правые части равенства (16) найдем:

$$\operatorname{ch}(n+1)-\operatorname{ch}1=2\operatorname{sh}\frac{1}{2}\left(\operatorname{sh}\frac{3}{2}+\operatorname{sh}\frac{5}{2}+\dots+\operatorname{sh}\frac{2n+1}{2}\right).$$

Т. к. с ростом n, $\operatorname{sh}\dfrac{2n+1}{2}$ растет и больше нуля, то

$$\operatorname{sh}\frac{3}{2}+\operatorname{sh}\frac{5}{2}+\dots+\operatorname{sh}\frac{2n+1}{2}$$

стремился к $+\infty$, а поэтому и $[\operatorname{ch}(n+1)-\operatorname{ch}1]\to+\infty$, т. е.

$$\operatorname{ch}(n+1)\to+\infty.$$

Но т. к. функция $\operatorname{ch}x$ существенно растет на $[0+\infty)$, то при $x\to+\infty$ $\operatorname{ch}x\to+\infty$. Т. к. $\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch}^2 x-1$, то функция $\operatorname{sh}x>0$ для $x>0$ со стремлением x к $+\infty$ также стремится к $+\infty$.

14°. Теорема о единственности системы гиперболических функций.

Пусть даны две системы гиперболических функций таких,

$$\mathrm{sh}_1 x, \ \mathrm{ch}_1 x \ \text{и} \ \mathrm{sh}_2 x, \ \mathrm{ch}_2 x,$$

что в некоторой точке $\lambda > 0$

$$\mathrm{sh}_1 \lambda = \mathrm{sh}_2 \lambda \ (\alpha),$$

или

$$\mathrm{ch}_1 \lambda = \mathrm{ch}_2 \lambda \ (\beta),$$

то на всей числовой прямой будут выполняться равенства

$$\mathrm{sh}_1 x = \mathrm{sh}_2 x,$$
$$\mathrm{ch}_1 x = \mathrm{ch}_2 x.$$

Из равенства (α) будет вытекать (β) и из (β) будет вытекать (α), что следует из равенства:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

Т. к. функции $\mathrm{ch}\, x$ — четная, а $\mathrm{sh}\, x$ — нечетная, то достаточно доказать совпадение соответствующих функций на полуоси

$$[0, +\infty).$$

Пусть $\mathrm{sh}_1 \lambda = \mathrm{sh}_2 \lambda$; покажем, что

$$\mathrm{sh}_1 \frac{\lambda}{2^n} = \mathrm{sh}_2 \frac{\lambda}{2^n}. \tag{17}$$

Действительно, если (17) справедливо для n, то оно будет выполняться и для $n+1$, в чем легко убедиться, применив к равенству (17) формулу

$$\mathrm{sh}_\nu \frac{\lambda}{2^{n+1}} = \mathrm{sh}_\nu \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right)\right] = \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,\frac{\lambda}{2^n} - 1}{2}}, \quad \nu = 1, 2.$$

Далее покажем, что

$$\mathrm{sh}_1 \frac{m}{2^n}\lambda = \mathrm{sh}_2 \frac{m}{2^n}\lambda, \tag{18}$$

для

$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Пусть равенство (18) справедливо для m, покажем, что оно справедливо для $m+1$. Имеем:

$$\mathrm{sh}_1 \frac{m+1}{2^n}\lambda = \mathrm{sh}_1\left(\frac{m}{2^n}\lambda + \frac{\lambda}{2^n}\right) = \mathrm{sh}_1 \frac{m}{2^n}\lambda\, \mathrm{ch}_1 \frac{\lambda}{2^n} +$$
$$+ \mathrm{ch}_1 \frac{m}{2^n}\lambda\, \mathrm{sh}_1 \frac{\lambda}{2^n} = \mathrm{sh}_2 \frac{m+1}{2^n}\lambda.$$

Для $m+1$ равенство (18) доказано. Поэтому в силу индукции заключаем, что равенство (18) выполняется для всех целых неотрицательных чисел m.

Обозначим через A множество точек вида $\frac{m}{2^n}\lambda$, где

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Множество A счетно и плотно на всей полуоси $[0, +\infty)$.

На множество A функции $\mathrm{sh}_1 x$, $\mathrm{sh}_2 x$ совпадают, а поэтому, в силу непрерывности этих функций на всей прямой, они будут совпадать и на полуоси $[0, +\infty)$, а значит в силу предыдущего замечания и на всей прямой,

откуда, в свою очередь, следует совпадение на всей прямой и функции

$$\mathrm{ch}_1 x \text{ и } \mathrm{ch}_2 x.$$

15°. Функции

$$\widetilde{\mathrm{ch}}\, x = \mathrm{ch}\, \lambda x, \quad \widetilde{\mathrm{sh}}\, x = \mathrm{sh}\, \lambda x,$$

где λ — произвольное вещественное положительное число, также будут гиперболическими функциями.

Покажем справедливость соотношений I, II, III для $\widetilde{\mathrm{ch}}\, x$ и $\widetilde{\mathrm{sh}}\, x$.

1. $$\widetilde{\mathrm{ch}}\,(x - y) = \mathrm{ch}\, \lambda\,(x - y) = \mathrm{ch}\,(\lambda x - \lambda y) =$$
$$= \mathrm{ch}\, \lambda x\, \mathrm{ch}\, \lambda y - \mathrm{sh}\, \lambda x\, \mathrm{sh}\, \lambda y = \widetilde{\mathrm{ch}}\, x\, \widetilde{\mathrm{ch}}\, y - \widetilde{\mathrm{sh}}\, x\, \widetilde{\mathrm{sh}}\, y.$$

2. $$\widetilde{\mathrm{ch}}\, 0 = \mathrm{ch}\, \lambda 0 = \mathrm{ch}\, 0 = 1.$$

3. Т. к. $x > 0$, $\lambda > 0$, то λx положительно и для него. в силу аксиомы III, имеем:

$$\widetilde{\mathrm{ch}}\, x = \mathrm{ch}\, \lambda x > 0$$
$$\widetilde{\mathrm{sh}}\, x = \mathrm{sh}\, \lambda x > 0.$$

16°. Теорема. *Множество всевозможных пар гиперболических функций* $\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$, *удовлетворяющих одним и тем же соотношениям* I, II, III, *определяющих аксиоматически гиперболические функции, имеет мощность континуума*

В теореме 14° о единственности гиперболических функций, мы показали, что система функций $\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$ однозначно определяется начальными значениями одной из этих функций, т. к. если одна из функций $\mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{ch}\, x$ проходит через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ плоскости и соответственная функция другой системы также проходит через точку M_0, то указанные системы должны совпадать.

Выбор точки M_0 является произвольным. Ради простоты будем считать $x_0 = 1$, а y_0 будем рассматривать как произвольное вещественное число, которое должно быть не меньше единицы. Тогда в силу теоремы единственности каждому y_0 однозначно соответствует система функций:

$$\{\mathrm{ch}_{y_0} x,\ \mathrm{sh}_{y_0} x\} \tag{19}$$

и различным $y_0 \geqslant 1$ соответствуют различные системы (19).

Для завершения доказательства теоремы надо еще установить, что любая система гиперболических функций, удовлетворяющая заданной системе соотношений I, II, III, будет соответствовать по вышеуказанному правилу некоторому вещественному $y_0 \geqslant 1$. Для определенности будем считать, что система (19) определяется равенством:

$$y_0 = \mathrm{ch}_{y_0} 1.$$

Пусть $\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$ — произвольная система гиперболических функций. Полагая $y_0 = \mathrm{ch}\, 1$ мы найдем то значение y_0, для которого системой (19) будет $\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$.

17. Теорема. *Все системы гиперболических функций, удовлетворяющие одним и тем же соотношениям* I, II, III, ***могут быть*** *получены* ***из одной из них, но произвольно взятой: путем*** *замены* ***переменной*** *x на λx, где λ —* ***произвольное вещественное положительное число.***

Т. е., если $\mathrm{ch}_0 x$, $\mathrm{sh}_0 x$ — произвольная система гиперболических функций, удовлетворяющая соотношениям I, II, III, то все другие системы могут быть получены из системы

$$\mathrm{ch}_0 \lambda x,\ \mathrm{sh}_0 \lambda x, \tag{20}$$

где λ пробегает всевозможные вещественные положительные числа.

То, что системы функций, получаемые из (20), удовлетворяют соотношениям I, II, III, следует из свойства 15°. Остается лишь убедиться в том, что любая система гиперболических функций $\mathrm{ch}\, x$, $\mathrm{sh}\, x$ может быть получена при некотором λ из системы (20).

Обозначим через

$$y_0 = \mathrm{ch}\, 1.$$

Т. к. $\mathrm{ch}_0 x$ непрерывна на всей прямой,

$$\mathrm{ch}_0 0 = 1 \text{ и } \mathrm{ch}_0 \underset{x \to +\infty}{x} \to +\infty,$$

то для указанного $y_0 \geqslant 0$ найдется $\lambda_0 \geqslant 0$ такое, что

$$y_0 = \mathrm{ch}_0 \lambda_0.$$

Рассмотрим систему

$$\mathrm{ch}_0 \lambda_0 x,\ \mathrm{sh}_0 \lambda_0 x.$$

Для $x = 1$ значение $\mathrm{ch}_0 \lambda_0 x$ окажется равным $\mathrm{ch}_0 \lambda_0 + y_0$, а значит, в силу теоремы о единственности системы функций должны выполняться равенства:

$$\mathrm{ch}x = \mathrm{ch}_0\,\lambda_0 x,$$
$$\mathrm{sh}x = \mathrm{sh}_0\,\lambda_0 x$$

что и доказывает справедливость теоремы.

Если в частности, за $\mathrm{ch}_0 x$, $\mathrm{sh}_0 x$ принять функции $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, то все системы $\mathrm{ch}\,\lambda x$, $\mathrm{sh}\,\lambda x$ гиперболических функций, удовлетворяющих данным соотношениям I, II, III могут быть записаны в следующей форме:

$$\mathrm{ch}_0\,\lambda x = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2},$$
$$\mathrm{sh}_0\,\lambda x = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}.$$

Определив функции $\mathrm{sh}\,x$, $\mathrm{ch}\,x$ другие гиперболические функции мы определяем обычным путем:

$$\begin{aligned} \mathrm{th}\,x &= \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}, \\ \mathrm{cth}\,x &= \frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x} = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}, \\ \mathrm{sch}\,x &= \frac{1}{\mathrm{ch}\,x} = \frac{2}{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}, \\ \mathrm{csh}\,x &= \frac{1}{\mathrm{sh}\,x} = \frac{2}{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}. \end{aligned} \tag{21}$$

Свойства указанных функций мы получим на основании свойств функций $\mathrm{sh}\,x$, $\mathrm{ch}\,x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Р. Янпольский. Гиперболические функции. Физматгиз. М., 1960, стр. 7—25.