ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 11 (510)

УДК 519.46:513.813

В.Н. БЕРЕСТОВСКИЙ

ПОДОБНО ОДНОРОДНЫЕ ЛОКАЛЬНО ПОЛНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ВНУТРЕННЕЙ МЕТРИКОЙ

Исследуются подобно однородные, т. е. допускающие транзитивную группу метрических подобий, локально полные пространства с внутренней метрикой. Простейшим примером такого пространства является открытая евклидова полупрямая. Установлено, что всякое такое пространство конформно эквивалентно полному однородному, т. е. допускающему транзитивную группу изометрий (движений), пространству с внутренней метрикой. Дается характеризация открытой евклидовой полупрямой как локально полного подобно однородного пространства с внутренней метрикой, содержащего более одной точки и не допускающего нетривиальных подобий с неподвижной точкой или нетривиальных движений. Построены примеры подобно однородных локально полных пространств с внутренней метрикой, в том числе с использованием конструкции искривленного произведения.

В § 4 получены некоторые результаты, связанные с задачей описания всех подобно однородных неоднородных локально компактных пространств с внутренней метрикой, в том числе частичное сведение этой задачи к случаю многообразий и характеризация связных подобно однородных неоднородных римановых многообразий.

1. Определения и формулировка результатов

Определение 1.1. Биекция $f : X \to X$ метрического пространства (X, ρ) на себя называется *α-подобием* (α — положительное вещественное число), если для любых точек $x, y \in X$ выполняется $\rho(f(x), f(y)) = \alpha\rho(x, y)$. Биекция $f : X \to X$ называется *подобием*, если f — α-подобие при некотором $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Очевидно, множество Γ_P всех подобий метрического пространства X образует группу относительно композиции отображений, называемую *группой подобий* (*пространства* X), а группа Γ всех изометрий (движений) пространства X — нормальная подгруппа группы Γ_P. Вещественная функция $\alpha(h)$, $h \in \Gamma_P$, где $\alpha(h) = \alpha$, если h — α-подобие, определяет гомоморфизм группы Γ_P на некоторую подгруппу $A = A(X)$ мультипликативной группы $(\mathbb{R}_+, .)$ с ядром Γ, так что группа A изоморфна фактор-группе Γ_P/Γ.

Определение 1.2. Метрическое пространство X называется *однородным* (соответственно *подобно однородным*), если его группа изометрий (подобий) действует транзитивно на X.

Определение 1.3. Метрическое пространство X называется *локально полным*, если для каждой его точки x существует положительное число $r(x)$ такое, что замкнутый шар $B(x, r(x))$ с индуцированной из X метрикой является полным метрическим пространством. Точную верхнюю границу таких чисел $r(x)$ для фиксированной точки $x \in X$ (возможно, бесконечную) будем обозначать $c(x)$ и называть *радиусом полноты* (*пространства* X *в точке* x).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 02-01-00192-а, 04-01-00315-а.

Выполнение равенства $c(x_0) = +\infty$ хотя бы в одной точке x_0 из X означает, что пространство X полное. Если это не так, то легко доказывается, что функция $c = c(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|c(x) - c(y)| \le \rho(x, y). \tag{1.1}$$

В дальнейшем нас интересует структура локально полных (в частности, локально компактных) подобно однородных пространств с внутренней метрикой.

Пример 1.1. Простейшим примером локально полного подобно однородного неоднородного пространства с внутренней метрикой служит мультипликативная группа $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ положительных вещественных чисел со стандартной метрикой, индуцированной вложением $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$. (Левые) сдвиги этой группы составляют группу подобий, действующую просто транзитивно на $\mathbb{R}_+$. В некотором смысле это характеризует пространство $\mathbb{R}_+$.

Теорема 1.1. *Метрическое пространство X изометрично $\mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда оно является локально полным подобно однородным пространством с внутренней метрикой, содержащим более одной точки и не допускающим нетривиальных гомотетий с неподвижной точкой и нетривиальных движений. При этом изометрия осуществляется функцией c, определенной на X.*

Пространство $\mathbb{R}_+$ есть одномерное риманово многообразие с римановой метрикой $ds^2 = dx^2$ и функцией $c(x) = x$. Снабженное конформной метрикой (с конформным множителем $\lambda(x) = \frac{1}{c(x)} = \frac{1}{x}$) $ds_1^2 = \frac{1}{x^2}dx^2 = (\frac{dx}{x})^2 = (d(\log x))^2$, оно становится однородным пространством, изометричным $\mathbb{R}$. В качестве изометрии пространства $(\mathbb{R}_+, ds_1^2)$ на $\mathbb{R}$ можно взять отображение $f(x) = \log x$; оно изоморфно отображает мультипликативную группу $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ (и одновременно группу подобий, мультипликативную группу левых сдвигов, пространства $\mathbb{R}_+$ с исходной метрикой) на аддитивную группу $(\mathbb{R}, +)$ (на группу движений, аддитивную группу параллельных переносов, пространства $\mathbb{R}$).

При надлежащем обобщении понятия конформного изменения метрики на пространства с внутренней метрикой соответствующий результат справедлив и в общем случае локально полных подобно однородных пространств с внутренней метрикой.

Определение 1.4 (ср. [1]). Пусть (X, ρ) — пространство с внутренней метрикой и $\lambda = \lambda(x)$, $x \in X$, — положительная непрерывная вещественная функция на X. Для каждого параметризованного длиной дуги спрямляемого пути $\xi = \xi(s)$, $0 \le s \le a$, в (X, ρ) определим новую его длину $l(\xi, \lambda)$ как интеграл $\int\limits_0^a \lambda(\xi(s))\, ds$. Затем определим новую (внутреннюю) метрику ρ_λ на X, полагая $\rho_\lambda(z, y)$ для $z, y \in X$ равным точной верхней границе длин $l(\xi, \lambda)$ по всем спрямляемым в метрике ρ путям ξ, соединяющим точки z и y. Будем говорить при этом, что метрика ρ_λ получена конформным изменением метрики ρ с коэффициентом конформности λ или что метрика ρ_λ конформно эквивалентна метрике ρ с коэффициентом конформности λ.

Замечание 1.1. Очевидно, метрики ρ и ρ_λ имеют одну (метрическую) топологию на X и одновременно являются или не являются локально полными внутренними метриками.

Теорема 1.2. *Для всякого локально полного подобно однородного пространства (X, ρ) с внутренней метрикой существует непрерывная положительная вещественная функция $\lambda = \lambda(x)$, $x \in X$, на X такая, что (X, ρ_λ) является однородным полным пространством с внутренней метрикой. Если (X, ρ) не однородно, то $\Gamma_P(X, \rho)$ становится транзитивной группой движений пространства (X, ρ_λ).*

Отсюда и из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 1.1. Всякое подобно однородное локально полное (компактное) пространство с внутренней метрикой получается конформным изменением метрики некоторого однородного полного (локально компактного) пространства с внутренней метрикой.

2. Доказательства теорем

Докажем предварительно утверждение.

Теорема 2.1 (ср. [2]). *Локально полное подобно однородное метрическое пространство однородно тогда и только тогда, когда оно полно.*

Доказательство. Необходимость. Очевидно, локально полное однородное метрическое пространство X имеет постоянный (положительный) радиус полноты. Следовательно, всякая фундаментальная последовательность в X имеет предельную точку в X, т. е. X полно.

Достаточность. Пусть X — полное подобно однородное метрическое пространство. Вследствие теоремы Банаха о неподвижной точке всякое α-подобие рассматриваемого пространства X при $\alpha \neq 1$ имеет единственную неподвижную точку. Тогда вследствие подобной однородности для каждой точки $x_1 \in X$ существует α-подобие h_1 с неподвижной точкой x_1. Зафиксируем точку $x_1 \in X$. Утверждается, что для каждой точки $x \in X$ существует изометрия f пространства X такая, что $f(x_1) = x$. Действительно, по определению подобно однородного пространства существует некоторое α-подобие h пространства X такое, что $h(x_1) = x$. Если $\alpha = 1$, то все доказано. Иначе существует α-подобие h_1 с неподвижной точкой x_1. Очевидно, $f := h \circ h_1^{-1}$ — движение пространства X, причем $f(x_1) = x$. Таким образом, X однородно. □

Следствие 2.1. Подобно однородное локально полное пространство, допускающее хотя бы одно подобие с неподвижной точкой, не являющееся изометрией, однородно.

Доказательство. Пусть h — α-подобие пространства $X, \alpha \neq 1$, $h(x_1) = x_1$. Тогда $c(x_1) = +\infty$, т. е. пространство X полное и остается применить теорему 2.1. □

Доказательство теоремы 1.2. На основании следствия 2.1 возможно только два случая:

1) пространство X однородно;
2) пространство X неоднородно и всякое подобие пространства X, не являющееся изометрией, не имеет неподвижных точек.

В первом случае можно взять $\lambda(x) \equiv 1$. Во втором случае пространство X не полно вследствие теоремы 2.1. Поэтому радиус полноты $c = c(x)$ является конечной функцией на X.

Зафиксируем точку x_1 из X. Тогда для каждой точки $x \in X$ существует только одно число $a = a(x) \in A$ такое, что существует a-подобие h пространства X с условием $h(x_1) = x$. Очевидно, $a(x) = \frac{c(x)}{c(x_1)}$ и функция $a = a(x)$ непрерывна на X вследствие неравенства (1.1).

Легко проверяется, что для непрерывной функции $\lambda = \lambda(x) = \frac{1}{a(x)}$ всякое отображение $f \in \Gamma_P$ сохраняет длины l_λ спрямляемых путей в X из определения 1.4, поэтому является изометрией пространства (X, ρ_λ). На основании замечания 1.1 (X, ρ_λ) является локально полным пространством с внутренней метрикой. Вследствие сказанного выше и теоремы 2.1 (X, ρ_λ) — полное однородное пространство с внутренней метрикой и транзитивной группой движений Γ_P.

Очевидно, во втором случае теоремы $\alpha(h) = a(h(x_1))$, $h \in \Gamma_P$. Поэтому из непрерывности функции $a(x)$, $x \in X$, неоднородности и связности X следует, что мультипликативная группа A совпадает с $(\mathbb{R}_+, \cdot)$. Следовательно, можно предполагать, что $c(x_1) = 1$, $a(x) \equiv c(x)$. □

Доказательство теоремы 1.1. Очевидно, что пространство $\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям теоремы.

Обратно, предположим, что пространство X удовлетворяет сформулированным в теореме условиям. Тогда мы находимся в условиях случая 2) доказательства теоремы 1.2; при этом функция $a(x) \equiv c(x)$ будет непрерывной биекцией пространства X на всю группу $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, отображение $F(h) = h(x_1)$ — биекцией группы Γ_P на пространство X, а гомоморфизм $\alpha : \Gamma_P \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$ — (абстрактным) изоморфизмом групп.

Достаточно доказать, что функция $a(x) \equiv c(x)$ есть изометрия пространства X на $\mathbb{R}_+$. Отождествим Γ_P и X с $\mathbb{R}_+$ посредством биекций α и $a = c$ соответственно. Тогда равенство $c(h(x)) = \alpha(h)c(x)$ означает, что действие Γ_P на X перепишется в виде операции умножения на $\mathbb{R}_+$, причем

$$\rho(\alpha b, \alpha c) = \alpha\rho(b, c), \quad \alpha, b, c \in \mathbb{R}_+. \tag{2.1}$$

Неравенство (1.1) перепишется в виде неравенства

$$\rho(b, c) \geq |b - c|, \quad b, c \in \mathbb{R}_+. \tag{2.2}$$

Остается доказать противоположное неравенство

$$\rho(b, c) \leq |b - c|, \quad b, c \in \mathbb{R}_+.$$

Теперь докажем, что отображение c является гомеоморфизмом, что будет следовать из его открытости. Условие открытости c в новых обозначениях эквивалентно тому, что все открытые шары $U(b, r)$ в $(\mathbb{R}_+, \rho)$ открыты относительно обычной топологии τ в $\mathbb{R}_+$. Из внутреннего характера метрики ρ и непрерывности c следует, что все шары $U(b, r)$ линейно связны в $(\mathbb{R}_+, \tau)$. Поэтому вследствие соотношения (2.1) достаточно доказать, что всякий шар $U(1, r)$, $0 < r < 1$, содержит некоторые точки b, c такие, что $b < 1 < c$. Так как метрика ρ внутренняя, то шар $U(1, \frac{r}{2})$ содержит некоторую точку $\alpha \neq 1$, причем вследствие неравенства (2.2) имеем неравенство $|1 - \alpha| < \frac{r}{2}$. Возможны два случая: $1 < \alpha$ и $\alpha < 1$. В первом случае достаточно взять $c = \alpha$, $b = \frac{1}{c}$, а во втором — взять $b = \alpha$, $c = \frac{1}{b}$. Действительно, в первом случае вследствие соотношения (2.1)

$$\rho(b, 1) = b\rho(1, c) < \rho(1, c) < \frac{r}{2} < r.$$

Во втором случае имеем неравенство $1 - b < \frac{r}{2}$, что эквивалентно неравенству $\frac{1}{b} < \frac{1}{1-\frac{r}{2}}$. Следовательно, $\rho(1, c) = \rho(1, \frac{1}{b}) = \frac{1}{b}\rho(b, 1) < \frac{\frac{r}{2}}{1-\frac{r}{2}} < r$.

Из доказанной гомеоморфности отображения c следует, что метрическая топология метрики ρ на $\mathbb{R}_+$ совпадает с τ и всякий отрезок $[b, c]$ в $\mathbb{R}_+$ есть кратчайшая в $(\mathbb{R}_+, \rho)$, соединяющая точки b и c. Вследствие соотношений (2.1) требуемые равенства $\rho(b, c) = |b - c|$, $b, c \in \mathbb{R}_+$, эквивалентны равенствам $\rho(d, 1) = 1 - d$, $0 < d < 1$. Предположим, что хотя бы одно из последних равенств нарушается для некоторого $0 < d < 1$. Тогда вследствие неравенств (2.2) имеет место $\rho(d, 1) > 1 - d$. Так как $(\mathbb{R}_+, \rho)$ — пространство с внутренней метрикой с отрезками в качестве кратчайших, то длина интервала $(0, 1]$ в метрике ρ равна сумме σ длин всех отрезков $[d^{n+1}, d^n]$ с неотрицательными целыми степенями n в метрике ρ. На основании (2.1)

$$\sigma = \rho(d, 1)\sum_{n=0}^{+\infty} d^n = \frac{\rho(d, 1)}{1 - d} > 1.$$

Следовательно, для некоторой частичной суммы σ_m этого ряда $1 < \sigma_m < +\infty$. Тогда с учетом (2.2) замкнутый шар $B(1, \sigma_m)$ является отрезком $[d^{m+1}, r]$ для некоторого числа r, $1 < r \leq 1+\sigma_m$. Поэтому шар $B(1, \sigma_m)$ компактен и полон в $(\mathbb{R}_+, \rho)$. Следовательно, $c(x_1) \geq \sigma_m > 1$ вопреки тому, что по построению $c(x_1) = 1$. $\square$

3. Примеры

Рассмотрим другие примеры подобно однородных локально полных пространств с внутренней метрикой и соответствующих им по теореме 1.2 полных однородных пространств с внутренней метрикой.

Пример 3.1. Непосредственным обобщением примера 1.1 является пространство $X := (\mathbb{R}^n)_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, $n \geq 2$, со стандартной метрикой ρ, индуцированной вложением $(\mathbb{R}^n)_+ \subset \mathbb{R}^n$. Очевидно, это пространство подобно однородно, но вследствие неполноты и теоремы 2.1 не однородно. Построенное в теореме 1.2 пространство $((\mathbb{R}^n)_+, \rho_\lambda)$ с функцией $\lambda = 1/c$ есть модель Пуанкаре n-мерного пространства Лобачевского H^n постоянной секционной кривизны $K \equiv -1$. При этом гиперповерхности уровня функции $c(x)$, $x \in X$ (т. е. горизонтальные гиперплоскости), составляют семейство орисфер в H^n, ортогональных пучку взаимно параллельных прямых — всех вертикальных полупрямых в $(\mathbb{R}^n)_+$.

Пример 3.2. Локально компактное однородное пространство X с внутренней метрикой допускает хотя бы одно подобие, не являющееся изометрией, тогда и только тогда, когда пространство X изометрично либо некоторому конечномерному нормированному векторному пространству $\mathbb{R}^n$, либо (неабелевой) односвязной градуированной нильпотентной группе Ли G (так называемой *группе Карно* [3]) со специальной левоинвариантной неголономной внутренней метрикой ρ, определяемой левоинвариантными минимальным вполне неголономным распределением Δ на G и нормой на Δ (см. [4], [17]). Определим отображения $h(t) : X \to X$, $t \in \mathbb{R}_+$, являющиеся автоморфизмами групп Ли $\mathbb{R}^n$ или G следующим образом: $h(t)(x) = tx$, если $X = \mathbb{R}^n$, и $T_E h(t)(v) = tv$, если G — группа Карно и $v \in V(E)$ (см. пример 3.3). Здесь $T_E h(t)$ обозначает дифференциал отображения $h(t)$ в единице E группы G. В результате получим бесконечно дифференцируемую мультипликативную 1-параметрическую группу подобий $h : X \times \mathbb{R}_+ \to X$, $h(x,t) = h(t)(x)$ пространства X такую, что

$$h(ts) = h(t)h(s), \quad \alpha(h(t)) \equiv t; \quad t, s \in \mathbb{R}_+. \tag{3.1}$$

Пример 3.3. В примере 3.2 были опущены детали при рассмотрении группы Карно (G, ρ). Здесь более подробно рассматривается наиболее простой частный случай, когда G есть (мультипликативная) группа Гейзенберга $H := H^3$ всех вещественных верхних треугольных 3×3-матриц с единицами на главной диагонали.

Центр C группы H одномерен, совпадает с коммутантом $[H, H]$ группы H и состоит из матриц с нулями на диагонали, соседней с главной диагональю. Фактор-группа H/C изоморфна аддитивной векторной группе $\mathbb{R}^2$, а естественный гомоморфизм $p : H \to H/C = \mathbb{R}^2$ является гомоморфизмом групп Ли и одновременно главным расслоением со структурной группой C.

Выберем произвольно векторное подпространство $V(E)$ алгебры Ли $LH = T_E H$ (касательного пространства к H в единице E) группы Ли H, трансверсальное к векторному подпространству $T_E C$, и метрику d на $\mathbb{R}^2$, определяемую некоторой нормой на $\mathbb{R}^2$. Тогда левоинвариантное распределение, т. е. касательное векторное подрасслоение касательного расслоения TH, Δ на H, определяемое равенством $\Delta(E) = V(E)$, является горизонтальным распределением некоторой связности $\bigtriangledown$ в главном расслоении p. При этом распределение Δ вполне неголономно, т. е. наименьшее инволютивное распределение на H (см. [6]), содержащее Δ, совпадает с TH.

По известной теореме Рашевского–Чжоу [7], [8] любые две точки $x, y \in H$ можно соединить некоторой кусочно непрерывно дифференцируемой горизонтальной (т. е. касающейся распределения Δ) кривой. Наконец, упомянутое расстояние $\rho(x, y)$, $x, y \in H$, определяется как точная нижняя граница вычисляемых в метрике d длин кусочно непрерывно дифференцируемых кривых в $\mathbb{R}^2$, горизонтальные лифты которых [6] относительно главного расслоения p со связностью $\bigtriangledown$ соединяют точки x и y. Общий случай группы Карно G рассматривается совершенно аналогично с заменами подгруппы C на коммутант $[G, G]$, $\mathbb{R}^2$ на некоторое $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, с тем отличием, что $V(E)$ должно удовлетворять специальному дополнительному условию.

Во всех случаях любые две точки $x, y \in (G, \rho)$ можно соединить некоторой кратчайшей c. Если G двуступенно нильпотентна, то путь $p \circ c$ в $\mathbb{R}^m$ является решением некоторой изопериметрической задачи в смысле [9], а c — ее горизонтальным подъемом. В случае $G = H$ и евклидовой метрики d на $\mathbb{R}^2$ эта изопериметрическая задача есть классическая задача Дидоны [10]; если d определяется неевклидовой нормой, то получается вариант задачи Дидоны [5].

В заключение зададим непрерывную 1-параметрическую мультипликативную группу подобий пространства (G,ρ) и автоморфизмов группы Ли G из примера 3.2 для случая $G = H$. Выберем произвольный базис $\{X,Y,Z\}$ алгебры Ли LH с условиями $X,Y \in V(E)$, $Z = [X,Y]$. (Матричное) экспоненциальное отображение $\exp : LH \to H$ является диффеоморфизмом. Определим координаты (x,y,z) произвольного элемента $g \in H$ равенством $g = \exp(xX + yY + zZ)$. Упомянутая 1-параметрическая группа $h(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, в этих координатах определяется формулой $h(x,y,z;t) = (tx,ty,t^2z)$.

Определение 3.1. *Евклидово произведение* $(X_1,d_1)\times(X_2,d_2)$ метрических пространств (X_i,d_i), $i = 1,2$, есть декартово произведение $X = X_1 \times X_2$ множеств, снабженное метрикой

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = ((d_1(x_1,y_1))^2 + (d_2(x_2,y_2))^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Легко проверяется, что евклидово произведение пространств с внутренней метрикой снова является пространством с внутренней метрикой.

Пример 3.4. Пусть (X,ρ_X) — полное однородное пространство с внутренней метрикой, допускающее некоторое t-подобие $h(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и (Y,ρ_Y) — локально полное подобно однородное пространство с внутренней метрикой. Очевидно, евклидово произведение $(X,\rho_X)\times(Y,\rho_Y)$ есть локально полное подобно однородное (неоднородное, если (Y,ρ_Y) не однородно) пространство с внутренней метрикой.

Определение 3.2 ([11], [12]). Пусть (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) — пространства с внутренней метрикой, $f : Y \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция на Y, $\gamma = (r,s) : [0,1] \to X \times Y$ — кривая в $X \times Y$. Для разбиения $\tau : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ отрезка $[0,1]$ определим число

$$l(\gamma,\tau) = \sum_{k=1}^{n}(f^2(s(t_{k-1}))(\rho_X(r(t_{k-1}),r(t_k)))^2 + (\rho_Y(s(t_{k-1}),s(t_k)))^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Длина кривой γ определяется формулой $l(\gamma) = \lim_{\tau} l(\gamma,\tau)$, где предел берется относительно упорядочения разбиений τ по измельчению. Расстояние между точками (x_1,y_1) и (x_2,y_2) в $X\times Y$ по определению равно точной нижней границе длин кривых $l(\gamma)$ по всем кривым γ, соединяющим точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2). *Искривленное произведение* $(X,\rho_X)_f \times (Y,\rho_Y)$ пространств (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y) (с функцией f) определяется как $(X \times Y,\rho)$.

Легко проверяется, что искривленное произведение пространств с внутренней метрикой снова является пространством с внутренней метрикой. Очевидно, евклидово произведение двух пространств с внутренней метрикой есть их искривленное произведение с функцией $f \equiv 1$, так что для пространств с внутренней метрикой искривленное произведение является обобщением евклидова произведения. Заметим, что искривленное произведение пространств с внутренней метрикой является прямым обобщением искривленного произведения гладких римановых многообразий в [13]. Произведения пространств с внутренней метрикой изучались в недавних работах [14], [15].

Пример 3.5. Пусть (X,ρ) — полное однородное пространство с внутренней метрикой. Тогда искривленное произведение $(X,\rho)_{1_{\mathbb{R}_+}} \times \mathbb{R}_+$ является локально полным подобно однородным пространством с внутренней метрикой. Локальная полнота проверяется достаточно легко. Отображение

$$h : ((X,\rho)_{1_{\mathbb{R}_+}} \times \mathbb{R}_+) \times \mathbb{R}_+ \to (X,\rho)_{1_{\mathbb{R}_+}} \times \mathbb{R}_+, \quad h((x,s),t) = (x,ts),$$

очевидно, является непрерывной мультипликативной 1-параметрической группой подобий пространства $(X,\rho)_{1_{\mathbb{R}_+}} \times \mathbb{R}_+$ с условиями (3.1). Для всякого движения g пространства (X,ρ) отображение $g \times 1_{\mathbb{R}_+}$ является движением искривленного произведения $(X,\rho)_{1_{\mathbb{R}_+}} \times \mathbb{R}_+$. Подобия $h(t) = h(\cdot,t)$ и движения $g \times 1_{\mathbb{R}_+}$ порождают транзитивную группу подобий рассматриваемого искривленного произведения, так что оно действительно подобно однородно.

Нетрудно проверить, что однородное пространство Y, конформно эквивалентное пространству $(X,\rho)_{1_{\mathbb{R}_+}} \times \mathbb{R}_+$ по теореме 1.2, изометрично евклидову произведению $(X,\rho)\times\mathbb{R}$.

Пример 3.6. Пусть (X,ρ) и $h(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$, те же, что в примере 3.4; k — произвольное вещественное число. Тогда искривленное произведение $(X,\rho)_f\times\mathbb{R}_+$ с функцией $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f(r)=r^k$ является локально полным подобно однородным пространством с внутренней метрикой. Отображение

$$H(t):(X,\rho)_f\times\mathbb{R}_+\to(X,\rho)_f\times\mathbb{R}_+,\quad H(t)((x,s))=(h(t^{1-k})(x),ts),$$

является t-подобием пространства $(X,\rho)_f\times\mathbb{R}_+$ при всех $t\in\mathbb{R}_+$. Для всякого движения g пространства (X,ρ) отображение $g\times 1_{\mathbb{R}_+}$ является движением пространства $(X,\rho)_f\times\mathbb{R}_+$. Подобия $H(t)$ и движения $g\times 1_{\mathbb{R}_+}$ порождают некоторую транзитивную группу подобий рассматриваемого искривленного произведения.

Пусть (X,ρ) — n-мерное евклидово пространство E^n, $n\geq 1$. Тогда для точки $(x,r)\in(E^n)_f\times\mathbb{R}_+$ радиус полноты равен $c(x,r)=r$, и соответствующее этому пространству по теореме 1.2 однородное пространство $Y(k)$ будет иметь риманову метрику

$$ds^2=\frac{r^{2k}dx^2+dr^2}{r^2}=r^{2(k-1)}dx^2+\left(\frac{dr}{r}\right)^2=e^{2(k-1)z}dx^2+dz^2,$$

где $z=\log r$, $dx^2=\Sigma_{k=1}^n(dx_k)^2$. Значит, координаты (x,z) полугеодезические. Из римановой геометрии известно, что такое пространство имеет постоянную секционную кривизну $K=-\frac{(\sqrt{G})_{zz}}{\sqrt{G}}$, где $G=e^{2(k-1)z}$, т. е. $K=-(k-1)^2$. Таким образом, $Y(k)$ является евклидовым пространством E^{n+1} при $k=1$ и $(n+1)$-мерным пространством Лобачевского кривизны $-(k-1)^2$ при $k\neq 1$.

Пример 3.7. "Плоскость Грушина" $(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}, ds^2=dr^2+\frac{1}{r^2}dz^2)$ [16] получается как частный случай примера 3.6, если взять $(X,\rho)=E^1$, $k=-1$.

Замечание 3.1. Очевидно, пример 3.1 является частным случаем примера 3.4 и частным случаем примера 3.6 при $k=0$.

Пример 3.8. Вследствие примеров 3.4 и 3.7 евклидово произведение евклидовой прямой на плоскость Грушина есть подобно однородное неоднородное риманово многообразие. В координатах $(x,r,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ линейный элемент задается выражением $ds^2=dx^2+dr^2+\frac{1}{r^2}dz^2$. Можно доказать, что это пространство не изометрично никакому искривленному произведению однородного локально компактного пространства с внутренней метрикой на $\mathbb{R}_+$ в смысле определения 3.2.

4. Подобно однородные локально компактные пространства

Следствие 1.1 утверждает, что всякое подобно однородное локально полное (компактное) пространство с внутренней метрикой конформно эквивалентно однородному полному (локально компактному) пространству с внутренней метрикой.

Этот результат вместе с детальным описанием всех однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой в серии работ [4], [17]–[20] дает надежду на решение следующей задачи.

Задача 1. Дать описание всех подобно однородных (и конформно эквивалентных им однородных) локально компактных пространств с внутренней метрикой.

С другой стороны, задача описания всех полных однородных (следовательно, и локально полных подобно однородных) пространств с внутренней метрикой представляется автору безнадежной.

В этом разделе излагаются некоторые понятия и результаты, связанные с задачей 1.

Определение 4.1 ([21]). Отображение метрических пространств $\phi : M \to N$ называется *субметрией*, если для каждого положительного числа r и каждой точки $x \in M$ образ замкнутого шара радиуса r в M с центром в точке x есть замкнутый шар радиуса r в N с центром в точке $\phi(x)$.

Пример 4.1. Очевидно, отображение евклидовых пространств $p : E^n \to E^m$, $n \geq m$, являющееся композицией ортогональной проекции и последующей изометрии, есть субметрия. Обратное утверждение доказано в статье [21].

Пример 4.2. В работе [22] была определена и исследовалась гладкая *риманова субмерсия* римановых многообразий $f : M \to N$. Ее можно определить следующим образом: C^1-отображение f является римановой субмерсией, если для каждой точки $x \in M$ его дифференциал $df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ является композицией ортогональной проекции и последующей изометрии для евклидовых пространств T_xM, $T_{f(x)}N$. Всякая субметрия римановых C^∞-многообразий является римановой $C^{1,1}$-субмерсией [23]. Обратно, всякая риманова C^1-субмерсия гладких полных римановых многообразий есть субметрия [24].

Пример 4.3. Метрическая ретракция $sh : M \to S$ открытого, т. е. некомпактного, полного связного гладкого риманова многообразия M неотрицательной секционной кривизны на его душу S, построенная в [25], является субметрией и римановой C^∞-субмерсией. В [26] было доказано, что sh есть риманова C^1-субмерсия. Следовательно, на основании упомянутых результатов из [23] и [24], sh есть субметрия и риманова $C^{1,1}$-субмерсия. С помощью этих результатов в [27] доказано, что $sh \in C^2$. Используя идеи статьи [26], Б. Уилкинг (B. Wilking) доказал, что $sh \in C^\infty$. Доказательство еще не опубликовано.

Пример 4.4. Два подмножества F_1, F_2 метрического пространства (M, ρ) называются *эквидистантными*, если для каждой точки $x_i \in F_i$, $i = 1, 2$, существует точка $x_j \in F_j$, $i \neq j$, такая, что $\rho(x_i, x_j)$ равно расстоянию $\rho(F_1, F_2)$ между множествами F_1 и F_2. *Метрическое расслоение* $\mathcal{F}$ полного метрического пространства (M, ρ) есть разбиение M на попарно изометричные (относительно метрик, индуцированных метрикой ρ) и эквидистантные замкнутые подмножества [28]. Фактор-множество $M/\mathcal{F}$ наследует естественную метрику $\rho(F_1, F_2)$, $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, для которой фактор-отображение $p : M \to M/\mathcal{F}$ является субметрией. Однако прообразы точек $\phi^{-1}(y)$, $y \in N$, общей субметрии $\phi : M \to N$ образуют разбиение $\mathcal{F}$ пространства M на замкнутые попарно эквидистантные, но вообще говоря, не изометричные подмножества. В [28] классифицированы все метрические расслоения $\mathcal{F}$ плоскости Лобачевского H^2 со связными слоями $F \in \mathcal{F}$, для которых метрическое фактор-пространство $H^2/\mathcal{F}$ изометрично $\mathbb{R}$. Среди них есть такие, для которых соответствующая субметрия $p : H^2 \to \mathbb{R}$ не является отображением класса C^2. Этот факт показывает, что упоминавшийся в примере 4.2 результат из [23] оптимален.

Пример 4.5. Из описания метризованных групп Карно (G, ρ) в примерах 3.2 и 3.3 непосредственно следует, что упоминавшееся там главное расслоение $p : (G, \rho) \to (\mathbb{R}^m, d)$ является субметрией.

Пример 4.6. Пусть группа Карно G есть группа Гейзенберга H и метрика d на $\mathbb{R}^2$ из примера 3.3 евклидова. Отождествим векторное пространство $V(E)$ с $(\mathbb{R}^2, d)$ посредством дифференциала $dp(E) : T_EH \to T_0\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$. Выберем базис $\{X, Y, Z\}$ в LH из примера 3.3 таким образом, чтобы $\{X, Y\}$ был ортонормированным базисом в $V(E)$. Тогда в упомянутых координатах (x, y, z) на H “вращения”

$$\gamma(\phi)(x, y, z) = (\cos\phi \cdot x + \sin\phi \cdot y, -\sin\phi \cdot x + \cos\phi \cdot y, z)$$

составляют непрерывную 1-параметрическую группу γ движений пространства (H, ρ). Естественная проекция $\mathrm{pr} : M := (H - \{x = y = 0)\}, \rho) \to M/\gamma$ на множество орбит группы γ, снабженное естественной фактор-метрикой, является субметрией и ее можно записать в виде

$$\mathrm{pr}(x,y,z) = (r,z) \in N := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

При этом $\mathrm{pr} : M \to (N,\ ds^2 = dr^2 + \frac{4}{r^2}dz^2)$ — субметрия [29]. Отметим, что (N, ds^2) отличается от плоскости Грушина (пример 3.7) наличием множителя 4, но внесение его под знак дифференциала показывает, что открытая полуплоскость (N, ds^2) изометрична плоскости Грушина. Как следствие, пространство орбит M/γ с естественной метрикой изометрично плоскости Грушина.

Лемма 4.1. *Пусть (X,ρ) — произвольное локально компактное неполное пространство с внутренней метрикой. Тогда для каждой точки $x \in X$ существует изометричное отображение $d : (0, c(x)] \to X$ такое, что $d(c(x)) = x$ и $c(d(t)) = t$ для всех $t \in (0, c(x)]$.*

Доказательство. По определению функции $c : X \to \mathbb{R}_+$ каждый замкнутый шар $B(x,r)$ радиуса r, $0 < r < c(x)$ (соответственно $B(x, c(x))$), является полным (соответственно неполным) локально компактным пространством с внутренней метрикой. Тогда по теореме С.Э. Кон-Фоссена [30] все шары $B(x,r)$ компактны, а любую точку $y \in B(x,r)$ можно соединить некоторой кратчайшей с точкой x.

Так как шар $B(x,c(x))$ неполный, то существует сходящаяся в себе последовательность точек $y_n \in B(x,c(x))$, не имеющая предельных точек. Так как метрика ρ внутренняя, то существует точка x_n в открытом шаре $U(x,c(x))$ с условием $\rho(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$. Очевидно, последовательность x_n фундаментальна, расходится и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x,x_n) = c(x)$. Вследствие сказанного выше, существует кратчайший путь $\xi_n(t)$, $0 < c(x) - \rho(x_n,x) \leq t \leq c(x)$, соединяющий точки x_n и x, и являющийся изометрией. Доопределим ξ_n на полуотрезке $(0, c(x) - \rho(x_n,x)]$ равенством $\xi_n(t) = x_n$.

Для любого числа $t \in (0,c(x)]$ $\rho(\xi_n(t),x) \leq c(x) - t < c(x)$, т. е. последовательность точек $\xi_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, лежит в компактном шаре $B(x,c(x)-t)$. Следовательно, из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Используя диагональный процесс Кантора, можно выбрать такую подпоследовательность n_k, $k \in \mathbb{N}$, что для всех двоично-рациональных точек $t \in (0,c(x)]$, последовательность точек $\xi_{n_k}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, сходится. Все отображения ξ_n липшицевы с константой 1. Поэтому для каждого $t \in (0,c(x)]$ последовательность точек $\xi_{n_k}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, сходится к некоторой точке $d(t)$. Полученное отображение $d : t \in (0,c(x)] \to d(t) \in X$ искомое.

Действительно, ясно, что отображение d является изометрией. Из расходимости последовательности x_n следует отсутствие предела $\lim\limits_{t\to 0} d(t)$. Поэтому для каждого числа $t \in (0,c(x)]$ $c(d(t)) \leq t < c(x)$. С другой стороны, вследствие неравенства (1.1)

$$c(x) - c(d(t)) \leq \rho(x,d(t)) = \rho(d(c(x)),d(t)) = c(x) - t,$$

откуда следует $t \leq c(d(t))$. Таким образом, $c(d(t)) = t$ для всех $t \in (0,c(x)]$. $\square$

Теорема 4.1. *Для всякого локально компактного подобно однородного неоднородного пространства X с внутренней метрикой отображение $c : X \to \mathbb{R}_+$ является субметрией.*

Доказательство. Из теоремы 2.1 вытекает, что пространство X неполное, а функция c на X конечна. Из неравенства (1.1) немедленно следуют включения $c(B(x,r)) \subset B(c(x),r)$ для всех $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$. Остается доказать обратные включения.

Пусть заданы число $r > 0$ и точка $x \in X$. Из доказательства теоремы 1.2 следует, что $c(X) = \mathbb{R}_+$ и подгруппа Γ группы подобий $\Gamma_P(X)$, состоящая из движений пространства X, действует транзитивно на каждом множестве уровня функции c. Тогда существует точка $y \in X$ такая, что $c(y) = c(x) + r$. По лемме 4.1 существует изометричное отображение $d : (0,c(y)] \to X$ такое, что $d(c(y)) = y$ и $c(d(t)) \equiv t$. Тогда $0 < c(x) < c(y)$ и $c(d(c(x))) = c(x)$. Следовательно, существует движение $\gamma \in \Gamma$ такое, что $\gamma(d(c(x))) = x$. Очевидно, отображение $D : (0, c(x)+r] \to X$, определенное формулой $D(t) = \gamma(d(t))$, изометрично и удовлетворяет условию $c(D(t)) \equiv t$, причем $D(c(x)) = x$. Тогда $D((\max(0,c(x)-r), c(x)+r]) \subset B(x,r)$ и $B(c(x),r) \subset c(B(x,r))$. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть (X,ρ) — локально компактное подобно однородное неоднородное пространство с внутренней метрикой, а (X,ρ_λ) — соответствующее (по теореме 1.2) конформно эквивалентное ему локально компактное однородное пространство с внутренней метрикой с функцией $\lambda = \frac{1}{c}$. Тогда функция $F = \log\circ c : (X,\rho_\lambda) \to \mathbb{R}$ является субметрией. Группа движений Γ_P пространства (X,ρ_λ) действует транзитивно на множестве $\mathcal{F}$ всех прообразов $F^{-1}(r)$, $r\in\mathbb{R}$, и на каждом из этих прообразов. В частности, соответствующее разбиение $\mathcal{F}$ пространства (X,ρ_λ) является метрическим расслоением.*

Доказательство. Из теоремы 2.1 вытекает, что пространство X неполное, а функция c на X конечна; из неравенства (1.1) следует, что она липшицева с константой 1.

Все утверждения теоремы, кроме первого, следуют из того факта, что группа Γ_P действует транзитивно на множестве всех прообразов $c^{-1}(r)$, $r\in\mathbb{R}_+$, на каждом из этих прообразов, и изометриями на $(X,\rho_{1/c})$ (последнее вследствие теоремы 1.2).

Заметим, что для всякого спрямляемого пути $\xi=\xi(t)$, $a_1\le t\le a_2$, в X и его (неубывающей) функции длины дуги $0\le s(t)=s_\xi(t)\le a$ имеем равенство

$$\int_0^a \lambda(\chi(s))\,ds = \int_{a_1}^{a_2}\lambda(\xi(t))\,ds_\xi(t),$$

где справа стоит интеграл Римана–Стильтьеса и $\xi(t)\equiv\chi(s(t))$, а слева — интеграл из определения 1.4. Из неравенства (1.1) следует, что длины дуг пути $c\circ\xi$ не больше длин соответствующих дуг пути ξ. Радиусом полноты (см. определение 1.3) пространства $\mathbb{R}_+$ является функция $c_{\mathbb{R}_+}=1_{\mathbb{R}_+}$ (его тождественное отображение). Поэтому в обозначениях определения 1.4

$$l\left(c\circ\xi,\frac{1}{c_{\mathbb{R}_+}}\right)=\int_{a_1}^{a_2}\frac{1}{1_{\mathbb{R}_+}(c(\xi(t)))}\,ds_{c\circ\xi}(t)=\int_{a_1}^{a_2}\frac{1}{c(\xi(t))}\,ds_{c\circ\xi}(t)\le\int_{a_1}^{a_2}\frac{1}{c(\xi(t))}\,ds_\xi(t)=l\left(\xi,\frac{1}{c}\right).$$

Отсюда и из определения 1.4 следует, что для стандартной метрики r на $\mathbb{R}_+$, отображение

$$c:(X,\rho_{1/c})\to(\mathbb{R}_+,r_{1/c_{\mathbb{R}_+}})$$

нерастягивающее. Очевидно, путь $\eta(t)=t, a\le t\le b$, является кратчайшим в $(\mathbb{R}_+,r_{1/c_{\mathbb{R}_+}})$ и

$$r_{1/c_{\mathbb{R}_+}}(a,b)=l(\eta,1/c_{\mathbb{R}_+})=\int_a^b\frac{1}{t}\,dt=\log(b)-\log(a)=|\log(b)-\log(a)|.$$

Следовательно, отображение $F=\log\circ c:(X,\rho_{1/c})\to\mathbb{R}$ нерастягивающее и $F(B(x,r))\subset B(F(x),r)$ для всех $x\in X$, $r\in\mathbb{R}$. Остается доказать обратные включения.

Пусть заданы число $r>0$ и точка $x\in X$. Аналогично второй части доказательства теоремы 4.1, докажем существование точки $y\in X$ такой, что $\log\frac{c(y)}{c(x)}=r$. По лемме 4.1 существует изометричное отображение $d:(0,c(y)]\to X$ такое, что $d(c(y))=y$ и $c(d(t))\equiv t$. Тогда $0<c(x)<c(y)$ и $c(d(c(x)))=c(x)$. Следовательно, существует движение $\gamma\in\Gamma$ такое, что $\gamma(d(c(x)))=x$. Пусть $\log\frac{c(x)}{a}, a>0$. Очевидно, путь $D:[a,c(y)]\to X$, определенный формулой $D(t)=\gamma(d(t))$, изометричен и удовлетворяет условию $c(D(t))\equiv t$, причем $D(c(x))=x$. Тогда

$$B(F(x),r)=[F(x)-r,F(x)+r]=[\log(c(x))-r,\log(c(x))+r]=$$
$$=[\log(a),\log(c(y))]=[\log(c(D(a))),\log(c(D(c(y))))]=[F(D(a)),F(D(c(y)))]\subset F(D([a,c(y)])).$$

Последнее включение следует из непрерывности отображения $F\circ D$ и связности отрезка $[a,c(y)]$.

Остается доказать включение $D([a,c(y)])\subset B(x,r)\subset(X,\rho_{1/c})$. Пусть $c(x)\le t_0\le c(y)$. Тогда

$$\rho_{1/c}(x,D(t_0))=\rho_{1/c}(D(c(x)),D(t_0))\le\int_{c(x)}^{t_0}\frac{1}{c(D(t))}\,ds_D(t)=$$
$$=\int_{c(x)}^{t_0}\frac{1}{t}\,dt=\log(t_0)-\log(c(x))\le\log(c(y))-\log(c(x))=r.$$

Следовательно, $D(t_0) \in B(x,r) \subset (X, \rho_{1/c})$. Аналогично рассматривается случай $a \leq t_0 \leq c(x)$. $\square$

Утверждения следующего предложения содержатся в теоремах 5–7 статьи [2] для конечно компактного пространства, но их доказательства легко распространяются на локально компактный случай. Впрочем, все необходимое содержится в более ранних работах [31],[20].

Предложение 4.1. *Локально компактное подобно однородное пространство с внутренней метрикой допускает транзитивную метризуемую связную локально компактную (относительно компактно-открытой топологии) группу подобий.*

Доказательство. Пусть $X = (X, \rho)$ — рассматриваемое пространство, $X_\lambda = (X, \rho_\lambda)$ — соответствующее конформно эквивалентное ему однородное пространство с внутренней метрикой и транзитивной группой движений Γ_P(теорема 1.2). Вследствие полноты (теорема 2.1), локальной компактности и теоремы С.Э. Кон-Фоссена [30] пространство X_λ конечно компактно, т. е. всякое его ограниченное замкнутое подмножество компактно. Вследствие результатов в [31], [20] группа G всех движений пространства X_λ допускает полную метрику, метрическая топология которой локально компактна и совпадает с компактно-открытой топологией, так что G непрерывно действует слева на X_λ. Ясно,что замыкание $\overline{\Gamma_P}$ подгруппы Γ_P в G полно относительно индуцированной метрики, следовательно, является локально компактной топологической группой относительно метрической (компактно-открытой) топологии и действует подобиями на X. Вследствие [31], компонента связности единицы группы $\overline{\Gamma_P}$ действует транзитивно на X_λ. $\square$

Теорема 4.3. *Подобно однородное неоднородное топологическое многообразие X с внутренней метрикой ρ допускает естественную структуру C^ω-многообразия такую, что функции $c : X \to \mathbb{R}_+$ и $F = \log \circ c : X \to \mathbb{R}$ вещественно аналитичны, а множества уровня этих функций являются связными C^ω-подмногообразиями C^ω-многообразия X.*

Доказательство. Вследствие предложения 4.1 можно предполагать, что группа подобий Γ_P пространства X (движений многообразия X_λ) локально компактная связная полная относительно компактно-открытой топологии. На основании результатов Я. Сенте [32] $G := \Gamma_P$ — группа Ли. Пусть H — стабилизатор точки $x_1 \in X$ из доказательства теоремы 1.2. Тогда отображение $f : G/H \to X$, $f(gH) = g(x_1)$, корректно определяет гомеоморфизм фактор-пространства G/H группы Ли G по ее компактной подгруппе Ли H на X. Посредством f действие G на X отождествляется с каноническим левым действием G на G/H. Перенесем структуру C^ω-многообразия с G/H на X посредством гомеоморфизма f. Указанный ранее (непрерывный) гомоморфизм групп Ли $\alpha : G \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$ является согласно теореме 3.39 из [33] C^ω-отображением. В конце доказательства теоремы 1.2 было установлено равенство $\alpha(h) = c(h(x_1))$, $h \in G$. Это значит, что для канонической проекции $p : G \to G/H = X$ имеется соотношение

$$\alpha = c \circ p. \tag{4.1}$$

Вследствие предложения 2.36 в [35] $c \in C^\omega$. Из теоремы 4.1 вытекает, что функция c регулярна. Тогда множества уровня функции c, а следовательно, и F, являются C^ω-подмногообразиями C^ω-многообразия X. Пусть I — подгруппа изометрий связной группы Ли G подобий многообразия (X, ρ), S — множество уровня функции c, содержащее некоторую точку $x_0 \in X$ со стабилизатором H. Тогда

$$S = I/H. \tag{4.2}$$

На основании [34] гомоморфизм групп Ли $\alpha : G \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$ есть главное C^ω-расслоение со слоем I, тотальным пространством G и базой $\mathbb{R}_+$. Поскольку база $\mathbb{R}_+$ стягиваема, то на основании следствия 11.6 из [34] это расслоение тривиально. В частности, G вещественно аналитически диффеоморфно прямому произведению $\mathbb{R}_+ \times I$. Как следствие, I является связной группой Ли. Теперь из формулы (4.2) вытекает, что многообразие S связно. $\square$

Из теорем 4.1–4.3 и результатов статей [17], [23] непосредственно выводится

Следствие 4.1. Всякое подобно однородное неоднородное связное риманово многообразие X с непрерывным метрическим тензором есть риманово C^ω-многообразие, для которого функция c является римановой C^ω-субмерсией. Аналогичное утверждение верно для однородного риманова многообразия $X_{1/c}$ и функции F.

Замечание 4.1. Очевидно, риманово многообразие X из следствия 4.1 является (аналитическим) римановым многообразием коодности 1. Такие многообразия активно изучались в последнее время.

Следующая наша цель — характеризация связных подобно однородных неоднородных римановых многообразий и конформно эквивалентных им однородных римановых многообразий.

Теорема 4.4. *Пусть* (X, g) *— связное подобно однородное неоднородное риманово многообразие, а* $(X,\ \gamma = \frac{1}{c^2}g)$ *— соответствующее ему по теореме* 1.2 *однородное риманово многообразие;* G *— связная транзитивная группа Ли подобий (движений) многообразия* (X, g) $((X, \gamma))$, *существование которой гарантировано предложением* 4.1; I *— наибольшая подгруппа изометрий пространства* (X, g) *в группе* G; $x_0 \in c^{-1}(1)$ *и* $H \subset I$ *— стабилизатор точки* x_0 *в группе* G, *а смежный класс* $gH \in G/H$ *естественно отождествляется с точкой* $g(x_0)$.

Тогда

1) G *изоморфна некоторому полупрямому произведению групп Ли* $(\mathbb{R}, +) \leftthreetimes I$ *(с нормальной подгруппой* I*), так что:*
2) *элементы подгруппы* $(\mathbb{R}, +) \leftthreetimes \{e\}$ *коммутируют с элементами компактной подгруппы* $H \subset I$ *и* I/H *— эффективное однородное пространство группы* I;
3) $(X, \gamma) = (G/H, \gamma)$ *— однородное эффективное риманово многообразие с* G*-инвариантной римановой метрикой* γ *относительно канонического левого действия* G *на* G/H;
4) *подобно однородное неоднородное риманово многообразие* (X, g) *естественно изометрично риманову многообразию* $(G/H, c^2\gamma)$, *где* $c((t, i)H) = \exp t$ *(с учетом п.* 1)*), и является подобно однородным неоднородным римановым многообразием с транзитивной группой подобий* G *и ее наибольшей подгруппой изометрий* I, *а* $c : (G/H, g) \to \mathbb{R}_+$ *— субметрия и риманова* C^ω*-субмерсия и одновременно радиус полноты пространства* $(G/H, g)$.

Обратно, если для связной группы Ли G *и ее подгрупп* $H \subset I$ *выполняются условия* 1) *и* 2), *то однородное (эффективное) пространство* G/H *допускает такую* G*-инвариантную риманову метрику* γ, *что риманово многообразие* $(G/H, g)$ *с метрикой* g, *определенной в п.* 4), *и риманово многообразие* $(G/H, \gamma)$ *удовлетворяют условиям пп.* 3) *и* 4).

Доказательство. Необходимость. На основании следствия 4.1 римановы многообразия (X, g), (X, γ), а также римановы субмерсии и субметрии $c : (X, g) \to \mathbb{R}_+$, $F = \log \circ c : (X, \gamma) \to \mathbb{R}$ имеют класс гладкости C^ω. Хорошо известно, что группа Ли G допускает левоинвариантную и инвариантную относительно правых сдвигов на элементы из H риманову метрику μ такую, что каноническая проекция $p : (G, \mu) \to (G/H, \gamma)$ есть риманова C^ω-субмерсия (и субметрия). Тогда и композиция $F \circ p : (G, \mu) \to \mathbb{R}$ есть риманова C^ω-субмерсия и субметрия. Из формул (4.1) и $F = \log \circ c$ следует, что $F \circ p = \log \circ \alpha$ есть эпиморфизм группы Ли G на группу Ли $(\mathbb{R}, +)$ с ядром I. Поэтому прообразами $(F \circ p)^{-1}(t), t \in \mathbb{R}$, являются смежные классы группы G по ее нормальной подгруппе I. Кроме того, для левых и правых сдвигов l_{g_0}, r_{g_0} группы G на элемент $g_0 \in G$ выполняются равенства

$$(F \circ p) \circ l_{g_0} = (F \circ p) + (F \circ p)(g_0) \tag{4.3}$$

и

$$(F\circ p)\circ r_{g_0}=(F\circ p)+(F\circ p)(g_0) \tag{4.4}$$

соответственно. Из формул (4.3), (4.4) и инвариантности метрики μ на G относительно всех левых и правых сдвигов на элементы из H вытекает левая инвариантность градиента Y функции $F\circ p$ на (G,μ) и его правая инвариантность относительно элементов из H. Как следствие для всех элементов $h\in H$ выполняется

$$\mathrm{Ad}(h)(tY(e)):=d(l_h\circ r_{h^{-1}})(e)(tY(e))=tY(e),\quad t\in\mathbb{R}, \tag{4.5}$$

где d обозначает дифференциал соответствующего отображения. Из ортогональности Y множествам $(F\circ p)^{-1}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, и того факта, что $(F\circ p)$ — риманова C^{ω}-субмерсия, следует, что Y — единичное векторное поле на (G,μ). Отсюда же следует, что всякая интегральная кривая $\eta_{g_0}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, поля Y с началом в точке $g_0\in G$ есть параметризованная длиной дуги метрическая прямая в (G,μ), т. е. геодезическая, любой отрезок которой является кратчайшей, причем

$$(F\circ p)(\eta_{g_0}(t))\equiv(F\circ p)(g_0)+t. \tag{4.6}$$

В частности, интегральная кривая $\eta(t):=\eta_e(t)$, $t\in\mathbb{R}$, такого вида с началом в единице $e\in G$ есть 1-параметрическая подгруппа в G и ввиду (4.6)

$$(F\circ p)(\eta(t))\equiv t,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Отождествление $\eta(t)$ с $t\in\mathbb{R}$ и нормальность подгруппы $I\in G$ позволяют теперь установить изоморфизм групп Ли G и некоторого полупрямого произведения $(\mathbb{R},+)\leftthreetimes I$, что доказывает утверждение п. 1).

Свойство п. 3) вытекает из определения группы G и указанного в формулировке теоремы гомеоморфного отождествления G/H с (X,γ).

Поскольку отображение $I(h):G\to G$, $I(h)(g)=hgh^{-1}$, является (внутренним) автоморфизмом группы Ли G, то согласно теореме 2.17 из [35] и равенства (4.5) получаем

$$h\eta(t)h^{-1}=h\exp(tY(e))h^{-1}=\exp(\mathrm{Ad}(h)(tY(e)))=\exp(tY(e))=\eta(t)$$

для всех $t\in\mathbb{R}$. Отсюда и из утверждений пп. 1) и 3) непосредственно вытекает утверждение п. 2).

Поскольку $F=\log\circ c$, $\gamma=\frac{1}{c^2}g$, то $g=c^2\gamma$, где ввиду тождества (4.7)

$$c((t,i)H)=(\exp\circ F)(p(t,i))=(\exp\circ F)(p(\eta(t)))=\exp t.$$

Функция $c:(G/H,g)\to\mathbb{R}_+$ по определению является радиусом полноты пространства $(X,g)=(G/H,g)$ и субметрией (следовательно, и римановой C^{ω}-субмерсией) согласно теореме 4.1 и [23]. Это доказывает п. 4).

Достаточность. Пусть выполнены условия пп. 1), 2).

Докажем прежде всего существование левоинвариантной и инвариантной относительно правых сдвигов на элементы подгруппы H римановой метрики μ на G такой, что левоинвариантное векторное поле Y, касательное в e к 1-параметрической подгруппе $\eta(t)=(t,e)$, единично и ортогонально ко всем смежным классам группы G по ее нормальной подгруппе I.

Выберем сначала произвольное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на алгебре Ли T_eG группы Ли G с условием, что $(Y(e),Y(e))=1$ и $(T_eI,Y(e))=0$. Используя (единственную) биинвариантную вероятностную меру Лебега на компактной группе Ли H, определим новое $\mathrm{Ad}\,H$-инвариантное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на T_eG по формуле

$$\langle u,v\rangle:=\int_H(\mathrm{Ad}(h)u,\mathrm{Ad}(h)v)dh.$$

Из условия 2) следует формула (4.5). Тогда

$$\langle Y(e), Y(e)\rangle := \int_H (\mathrm{Ad}(h)Y(e), \mathrm{Ad}(h)Y(e))dh = \int_H (Y(e), Y(e))dh = \int_H 1\, dh = 1,$$

и для всякого вектора $u \in T_e I$

$$\langle u, Y(e)\rangle := \int_H (\mathrm{Ad}(h)u, \mathrm{Ad}(h)Y(e))dh = \int_H (\mathrm{Ad}(h)u, Y(e))dh = \int_H 0\, dh = 0.$$

В предпоследнем равенстве было использовано включение $\mathrm{Ad}(h)u \in T_e I$, вытекающее из включения подгрупп $H \subset I$. Теперь ясно, что (единственное) расширение скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ до левоинвариантной римановой метрики на G дает требуемый метрический тензор μ.

Вследствие указанных свойств левоинвариантной римановой метрики μ на G существует единственная G-инвариантная риманова метрика γ на G/H такая, что каноническая проекция $p : (G, \mu) \to (G/H, \gamma)$ является римановой C^ω-субмерсией и субметрией. Теперь из условия 2) непосредственно вытекает утверждение п. 3).

Определим эпиморфизм групп Ли $\alpha : G \to (\mathbb{R}_+, \cdot)$ формулой $\alpha(t, i) = \exp t$ с ядром I. Из инвариантности α относительно левых и правых сдвигов на элементы нормальной подгруппы I, а поэтому и подгруппы $H \subset I$ следует существование вещественной функции $c : G/H \to \mathbb{R}$ с условием (4.1). В частности,

$$c((t, i)H) = c(p(t, i)) = \alpha(t, i) = \exp t, \tag{4.8}$$

как в п. 4). Согласно предложению 2.36 из [35] $c \in C^\omega$. Множествами уровня функции c являются орбиты подгруппы $I \subset G$ относительно канонического левого действия G на G/H.Определим новую C^ω-функцию $F = \log \circ c : G/H \to \mathbb{R}$ и новый C^ω-эпиморфизм групп Ли $\beta = \log \circ \alpha : G \to (\mathbb{R}, +)$, $\beta(t, i) = t$. Очевидно, $\beta = F \circ p$ в силу (4.1), и выполнены соотношения (4.3).

По построению векторное поле Y на (G, μ) единично, левоинвариантно, ортогонально смежным классам группы G по подгруппе I, т. е. множествам уровня функции β, и порождает 1-параметрическую подгруппу $\eta(t) = (t, e)$. Поэтому Y совпадает с градиентом функции $\beta = \beta(t, i) = t$ на основании левой инвариантности последнего согласно соотношений (4.3), $\beta = F \circ p$ и левой инвариантности метрики μ. Отсюда же следует, что отображение $(G, \mu) \to \mathbb{R}$ есть субметрия и риманова C^ω-субмерсия, а интегральные кривые поля Y — метрические прямые, параметризованные длиной дуги. Поскольку $p : (G, \mu) \to (G/H, \gamma)$ и $\beta = F \circ p : (G, \mu) \to \mathbb{R}$ — субметрии, то и отображение $F : (G/H, \gamma) \to \mathbb{R}$ — субметрия (и риманова C^ω-субмерсия), причем интегральные кривые градиента $\overline{Y}$ функции F на $(G/H, \gamma)$ являются метрическими прямыми, параметризованными длиной дуги. Отсюда и из соотношения $\beta = F \circ p$ вытекает, что для любого элемента $z \in G$ $dp(z)(Y(z)) = \overline{Y}(p(z))$.

Рассмотрим теперь риманово C^ω-многообразие $(G/H, g) = (G/H, c^2\gamma)$. Выполняется (4.8), как в п. 4). Пусть $x_0 = H \in G/H$, $x = h_1(x_0)$, $y = h(x)$; $h, h_1 \in G$. Тогда в силу (4.1)

$$c(y) = c(h(x)) = c(h(h_1(x_0))) = c(p(hh_1)) = \alpha(hh_1) = \alpha(h)\alpha(h_1) = \alpha(h)c(p(h_1)) = \alpha(h)c(x),$$

т. е. $\frac{c(h(x))}{c(x)} = \alpha(h)$ не зависит от выбора точки $x \in G/H$. Поскольку отображение $h : (G/H, \gamma) \to (G/H, \gamma)$ есть движение, то отображение $h : (G/H, g) \to (G/H, g)$ является $\alpha(h)$-подобием. Таким образом, G —транзитивная группа подобий риманова многообразия $(G/H, g)$ с подгруппой движений I. Осталось доказать, что c — радиус полноты риманова многообразия $(G/H, g)$.

Предварительно доказывается

Лемма 4.2. *Векторное поле $\frac{1}{c}\overline{Y}$ является единичным градиентом функции c на римановом многообразии $(G/H, g)$.*

Доказательство. По определению градиента ∇f вещественной гладкой функции на римановом многообразии (M, g) для всякого гладкого пути $\xi : (a, b) \to M$ должно выполняться равенство

$$f(\xi(t))'(t_0) = g(\nabla f(\xi(t_0)), \xi'(t_0)).$$

С учетом равенства $c = \exp \circ F$ и уже доказанного факта, что $\overline{Y}$ — градиент функции F на римановом многообразии $(G/H, \gamma)$, получаем для всякого гладкого пути ξ в $(G/H, g)$

$$c(\xi(t))'(t_0) = F(\xi(t))'(t_0) \exp(F(\xi(t_0))) = \gamma(\nabla F(\xi(t_0)), \xi'(t_0)) c(\xi(t_0)) = g\left(\frac{1}{c}\overline{Y}(\xi(t_0)), \xi'(t_0)\right).$$

При этом $g(\frac{1}{c}\overline{Y}, \frac{1}{c}\overline{Y}) = \gamma(\overline{Y}, \overline{Y}) \equiv 1$. $\square$

Максимальные интегральные кривые векторного поля $\frac{1}{c}\overline{Y}$ являются перепараметризациями максимальных интегральных кривых векторного поля $\overline{Y}$, являющимися, как сказано выше, всюду определенными на $\mathbb{R}$ метрическими прямыми в $(G/H, \gamma)$. Считая интегральные кривые поля $\frac{1}{c}\overline{Y}$ (поля $\overline{Y}$) параметризованными, вследствие чего параметру $t = 1$ (соответственно $t = 0$) сопоставляется некоторая точка $x_1 \in G/H$ такая, что $c(x_1) = 1$ (соответственно $F(x_1) = (\log \circ c)(x_1) = 0$), получаем, что через каждую точку $x \in G/H$ проходит максимальная интегральная кривая $\xi_x(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, векторного поля $\frac{1}{c}\overline{Y}$ такая, что $c(\xi_x(t)) \equiv t$. Отсюда и из леммы 4.2 непосредственно следует $c : (G/H, g) \to \mathbb{R}_+$ — субметрия и риманова C^ω-субмерсия, а всякий отрезок пути ξ_x — кратчайшая в $(G/H, g)$, параметризованная длиной дуги со сдвигом. Тогда, поскольку не существует предела $\xi_x(t)$ при $t \to 0$ в $(G/H, g)$ и $\xi_x(c(x)) = x$, то радиус полноты пространства $(G/H, g)$ в точке x не превосходит $c(x)$. С другой стороны, если $0 < r < c(x)$, то вследствие леммы 4.2 для любой точки y в замкнутом шаре $B(x, r)$ выполнено неравенство $0 < c(x) - r \leq c(y) \leq c(x) + r$. Поэтому $B(x, r)$ есть некоторое замкнутое ограниченное подмножество в полном локально компактном пространстве с внутренней метрикой $(G/H, \gamma)$. Следовательно, по теореме С.Э. Кон-Фоссена, этот шар компактен и, значит, радиус полноты пространства $(G/H, g)$ в точке x равен $c(x)$. $\square$

Из теоремы 4.4 и ее доказательства непосредственно вытекают следующие два утверждения.

Предложение 4.2. *Связная эффективная транзитивная группа Ли G подобий подобно однородного неоднородного риманова многообразия $(G/H, g)$ допускает такую риманову C^ω-метрику ν, что левые сдвиги группы G действуют на (G, ν) подобиями, но, вообще говоря, не изометриями, каноническая проекция $p : (G, \nu) \to (G/H, g)$ является субметрией и римановой C^ω-субмерсией, причем для соответствующих по теореме* 1.2 *конформно эквивалентных однородных римановых метрик γ и μ на G/H и G, проекция $p : (G, \mu) \to (G/H, \gamma)$, также является субметрией и римановой C^ω-субмерсией.*

Следствие 4.2. Всякая связная односвязная разрешимая группа Ли размерности $n \geq 1$ с левоинвариантной римановой метрикой (G, μ) допускает такую конформно эквивалентную риманову метрику ν, что левые сдвиги группы группы G действуют на (G, ν) подобиями, но, вообще говоря, не изометриями.

Замечание 4.2. Следствие 4.2 показывает, что в настоящее время недоступна *классификация* связных подобно однородных неоднородных римановых многообразий.

Задача 2. Дать характеризацию подобно однородных неоднородных многообразий с внутренней метрикой и конформно эквивалентных им однородных многообразий с внутренней метрикой, похожую на характеризацию из теоремы 4.4.

Теорема 4.5. 1. *Всякое локально компактное подобно однородное неоднородное пространство с внутренней метрикой (X, ρ) является обратным метрическим пределом последовательности (X_n, ρ_n) подобно однородных неоднородных многообразий X_n с внутренней метрикой*

ρ_n и собственных субметрий $p_{nm} : (X_m, \rho_m) \to (X_n, \rho_n)$, $n \leq m$, являющихся ассоциированными расслоениями со связными слоями, где $p_{nk} = p_{nm} \circ p_{mk}$ для $n \leq m \leq k$, т. е.

а) $X = \varprojlim\{X_n, p_{nm}\}$ *(обратный предел последовательности множеств и связывающих их отображений) как множество;*

б) *естественная проекция $p_n : (X, \rho) \to (X_n, \rho_n)$ является собственной субметрией;*

в) $p_n = p_{nm} \circ p_m$, *если $n \leq m$;*

г) $\rho_n \circ (p_n \times p_n) \to \rho$ *при $n \to \infty$ равномерно на каждом компактном подмножестве в $X \times X$.*

2. *Все субметрии p_n; p_{nm}, $n \leq m$, сохраняют значения радиусов полноты (соответствующих пространств).*

3. *Множества уровня функции c на локально компактном подобно однородном неоднородном пространстве с внутренней метрикой (X, ρ) линейно связны и локально линейно связны.*

Доказательство. Основные линии доказательства следуют работе [20].

1. Пусть G — локально компактная связная метризуемая транзитивная группа подобий пространства X (см. предложение 4.1) с компактным стабилизатором H некоторой точки $x_0 \in X$. Пространство X естественно гомеоморфно фактор-пространству G/H. По теореме Ямабе [36] существует невозрастающая последовательность компактных нормальных подгрупп H_n такая, что фактор-группа $G_n = G/H_n$ — группа Ли и пересечение всех подгрупп H_n есть тривиальная подгруппа $\{e\}$. Если $N_n := [H_n]_e$ — компонента связности единицы топологической группы H_n, то N_n — нормальная подгруппа в G, а пространство орбит $X_n := X/N_n$ пространства $X = G/H$ относительно действия подгруппы N_n на X является многообразием на основании предложения 3.1 в [20]. При этом каноническое действие группы G на X_n непрерывно и транзитивно и имеет ядро неэффективности

$$\gamma_n := \bigcap_{g \in G} N_n g H g^{-1},$$

причем (напр., согласно предложению 2.1 из [20])

$$X_n = G/N_n H = (G/\gamma_n)/(N_n H/\gamma_n).$$

Связная группа $G_n := G/\gamma_n$, будучи локально компактной, непрерывной, эффективной и транзитивной группой преобразований многообразия X_n, является группой Ли [32].Последовательность подгрупп N_n не возрастает и ее пересечение есть тривиальная подгруппа $\{e\}$. Последнее утверждение вследствие компактности N_n эквивалентно тому, что для всякой окрестности U единицы e существует номер k такой, что $N_n \subset U$ для всех $n \geq k$. На основании леммы 1.1 в [20] пересечение невозрастающей последовательности подгрупп γ_n есть подгруппа $\{e\}$. Следовательно, G есть *обратный предел групп Ли* G_n, связанных естественными эпиморфизмами групп Ли $q_{nm} : G_m \to G_n$, $n \leq m$, индуцируемых включениями $\gamma_m \subset \gamma_n$. Аналогично, включение $\{e\} \subset \gamma_n$ индуцирует эпиморфизм топологических групп $q_n : G \to G_n$.

Вследствие компактности, подгруппа N_n действует изометриями на X. Теперь из нормальности подгруппы N_n легко выводится, что разбиение пространства X на орбиты группы N_n есть разбиение на компактные попарно эквидистантные подмножества в X (см. пример 4.4); при этом α-подобие из G переводит орбиты на орбиты таким образом, что расстояние между образами орбит равно расстоянию между исходными орбитами, умноженному на число α. Это позволяет определить внутреннюю метрику ρ_n на X_n (расстояние между орбитами-точками в метрике ρ_n по определению равно расстоянию между этими же орбитами-множествами в метрике ρ) таким образом, что естественная проекция $p_n : (X, \rho) \to (X_n, \rho_n)$ является субметрией, а естественное транзитивное действие группы Ли G_n на (X_n, ρ_n) есть действие метрическими подобиями. Свойства 1 а) и 1 г) легко выводятся из свойств последовательности N_n и определения пространств (X, ρ_n) аналогично тому, как это сделано в [20].

На основании предыдущего абзаца и аналогично ему, индуцированное включением $N_m \subset N_n$, $n \leq m$, разбиение орбит подгруппы N_n на орбиты подгруппы N_m приводит к естественной проекции $p_{nm} : (X_m, \rho_m) \to (X_n, \rho_n)$, также являющейся субметрией. Очевидно, $p_{nk} = p_{nm} \circ p_{mk}$ для $n \leq m \leq k$.

Напомним, что отображение $p : X \to Y$ топологических пространств называется *собственным*, если прообраз всякого компактного подмножества в Y относительно отображения p компактен в X. Очевидно, все отображения p_n; p_{nm}, $n \leq m$, собственны.

2. Из уже цитированной теоремы С.Э. Кон-Фоссена и того факта, что все отображения p_n; p_{nm}, $n \leq m$, являются (собственными) субметриями, следует, что эти отображения не уменьшают (не увеличивают) радиусов полноты соответствующих пространств. Другими словами, для соответствующих функций c_n на X_n выполняются соотношения $c_n \circ p_n = c$ и $c_n \circ p_{nm} = c_m$, $n \leq m$.

На основании уже доказанных утверждений для всех $n \in \mathbb{N}$ пространство (X_n, ρ_n) является подобно однородным, но не однородным топологическим многообразием с внутренней метрикой.

3. Пусть I (соответственно I_n) — подгруппа изометрий связной группы G (группы Ли G_n) подобий пространства (X, ρ) (многообразия (X_n, ρ_n)), F (соответственно F_n) — множество уровня функции c (соответственно c_n), содержащее упомянутую точку $x_0 \in X$ ($x_n = p_n(x_0) \in X_n$). Вследствие уже доказанного п. 2

$$F_n = p_n(F) = p_{nm}(p_m(F)) = p_{nm}(F_m), \quad n \leq m. \tag{4.9}$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_n = F/N_n = (I/H)/N_n = I/HN_n = (I/\gamma_n)/(HN_n/\gamma_n)(= I_n/(HN_n/\gamma_n)) = \\ = ((I/\gamma_m)/(\gamma_n/\gamma_m))/((HN_n/\gamma_m)/(\gamma_n/\gamma_m)) = I_m/(HN_n/\gamma_m). \end{aligned}$$

Из этих равенств и [34] следует, что естественная проекция $s_{nm} : I_m \to F_n = I_m/(HN_n/\gamma_m)$ есть (однородное) главное C^ω-расслоение со структурной группой Ли HN_n/γ_m, тотальным пространством I_m и базой F_n. Согласно теореме 4.3 X_n допускает естественную структуру C^ω-многообразия, относительно которой F_n является связным C^ω-подмногообразием. Группа Ли HN_n/γ_m естественным образом действует на фактор-пространстве $P := (HN_n/\gamma_m)/(HN_m/\gamma_m)$ слева. Тогда ассоциированное с расслоением s_{nm} C^ω-расслоение $E(F_n, P, HN_n/\gamma_m, I_m)$ (см. [6]) со стандартным слоем P может быть отождествлено по предложению 5.5 в [6] с проекцией $p_{nm} : F_m \to F_n$. Слой P этой проекции равен

$$(HN_n/\gamma_m)/(HN_m/\gamma_m) = HN_n/HN_m = N_n/N_m$$

(достаточно понимать равенства как гомеоморфизмы). В последнем равенстве мы воспользовались нормальностью подгруппы N_m. Поскольку топологическая группа N_n связна, то слоевое многообразие P связно.

Совершенно так же доказывается, что отображение $p_{nm} : X_m \to X_n$, $n \leq m$, является (однородным) ассоциированным C^ω-расслоением с тем же слоем P, что и раньше.

Теперь все утверждения п. 1 доказаны.

Из доказательства теоремы 4.3 следует, что связная транзитивная группа Ли G_n подобий многообразия (X_n, ρ_n) гомеоморфна прямому произведению $\mathbb{R}_+ \times I_n$. Поэтому группа Ли I_n связна. Из уже доказанного и (4.9) следует, что подпространство $F \subset X$ является топологическим обратным пределом последовательности однородных фактор-многообразий F_n связных групп Ли I_n, связанных собственными (однородными) ассоциированными расслоениями $p_{nm} : F_m \to F_n$, $n \leq m$, со связными слоями. Кроме того, топологическая группа I является обратным пределом связных групп Ли I_n, связанных собственными C^ω-эпиморфизмами $q_{nm} : I_m \to I_n$, $n \leq m$, и потому связна. Теперь применение рассуждений из доказательства теоремы 3.1 в [20] позволяет ввести в однородных пространствах $F_n = I_n/(H/\gamma_n)$ I_n-инвариантные римановы метрики d_n таким образом, что отображения $p_{nm} : (F_m, d_m) \to (F_n, d_n)$, $n \leq m$, являются римановыми C^ω-субмерсиями и существует равномерный предел d функций $d_n \circ (p_n \times p_n)$

на $F \times F$. При этом d есть I-инвариантная совместимая с топологией внутренняя метрика на F. Следовательно, F линейно связно и локально линейно связно. $\square$

Весьма правдоподобно следующее усиление п. 3 теоремы 4.5.

Гипотеза. *Всякое локально компактное подобно однородное неоднородное пространство с внутренней метрикой* (X, ρ) *гомеоморфно прямому топологическому произведению* $F \times \mathbb{R}_+$ *(следовательно,* $F \times \mathbb{R}$*), где* F *— произвольное множество уровня функции* c *на* (X, ρ)*. В обозначениях теоремы* 4.5 *топологическая группа* G *гомеоморфна прямому топологическому произведению* $I \times \mathbb{R}_+$ *(следовательно,* $I \times \mathbb{R}$*).*

Замечание 4.3. Справедливо некоторого рода обращение теоремы 4.5, формулировка и доказательство которого аналогичны формулировке и доказательству теоремы 2.2 в [20]. Теорема 4.5 и ее обращение показывают, что в некотором смысле изучение локально компактных подобно однородных неоднородных пространств с внутренней метрикой сводится к изучению подобно однородных неоднородных многообразий с внутренней метрикой.

Замечание 4.4. В случае римановых C^∞-многообразий первое утверждение теоремы 1.2 является следствием следующего результата Д.В.Алексеевского:

всякое связное конформно однородное, т.е. допускающее транзитивную группу конформных C^∞*-диффеоморфизмов, риманово* C^∞*-многообразие конформно эквивалентно однородному риманову* C^ω*-многообразию.*

Это утверждение основано на следующих двух результатах.

1) Связное риманово C^∞-многообразие размерности $n \geq 1$, допускающее существенную группу конформных преобразований, конформно эквивалентно стандартной сфере S^n или евклидову пространству E^n [37], [38]. Здесь множество A конформных преобразований риманова C^∞-многообразия (M^n, g) называется *несущественным*, если (M^n, g) (гладко) конформно эквивалентно риманову многообразию, для которого все преобразования из A являются движениями.

2) Всякое связное конформно плоское конформно однородное риманово C^∞-многообразие конформно эквивалентно некоторому однородному риманову многообразию из списка, приведенного в [39].

Е.Д. Родионов и В.В. Славский при некоторых определениях, которые не будем здесь приводить, доказали в статье ([40], теорема 4.1):

связное локально конформно однородное риманово C^∞*-многообразие конформно эквивалентно локально однородному риманову* C^ω*-многообразию.*

Литература

1. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
2. Сосов Е.Н. *О конечной компактности и полноте некоторых пространств отображений с метрикой Буземана* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 11. – С. 62–68.
3. Pansu P. *Metriques de Carnot–Caratheodory et quasiisometries des espaces symetrique de rang une* // Ann. of Math. – 1989. – V. 119. – P. 1–60.
4. Берестовский В.Н. *Однородные пространства с внутренней метрикой*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Новосибирск, 1990. – 269 с.
5. Берестовский В.Н. *Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметриксы плоскости Минковского* // Сиб. матем. журн. – 1994. – Т. 35. – № 1. – С. 3–11.
6. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
7. Рашевский П.К. *О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией* // Учен. зап. Московск. пед. ин-та. – 1938. – Т. 3. – Вып. 2. – С. 83–94.
8. Chow W.L. *Systeme von linearen partiellen differential Gleichungen erster Ordnung* // Math. Ann. – 1939. – V. 117. – P. 98–105.

9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1974. – 479 с.
10. Берестовский В.Н., Зубарева И.А. *Формы сфер специальных неголономных левоинвариантных внутренних метрик на некоторых группах Ли* // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 731–748.
11. Alexander S.B., Bishop R.L. *Warped product of Hadamard spaces* // Manuscripta Math. – 1998. – V. 96. – P. 487–505.
12. Chen C.-H. *Warped product of metric spaces of curvature bounded from above* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – V. 351. – P. 4727–4740.
13. Bishop R.L., O'Neill B. *Manifolds of negative curvature* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 145. – P. 1–49.
14. Bernig A., Foertsch T., Schroeder V. *Non standard metric products* // Beiträge Algebra Geom. – 2003. – V. 44. – № 2. – P. 499–510.
15. Foertsch T., Schroeder V. *Products of hyperbolic metric spaces* // Geom. Dedicata. – 2003. – V. 102. – P. 197–212.
16. Грушин В.В. *Об одном классе гипоэллиптических операторов* // Матем. сб. – 1970. – Т. 83. – № 3. – С. 456–473.
17. Берестовский В.Н. *Однородные пространства с внутренней метрикой* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 301. – № 2. – С. 268–271.
18. Берестовский В.Н. *Однородные многообразия с внутренней метрикой.* I // Сиб. матем. журн. – 1988. – Т. 29. – № 6. – С. 17–29.
19. Берестовский В.Н. *Однородные многообразия с внутренней метрикой.* II // Сиб. матем. журн. – 1989. – Т. 30. – № 2. – С. 14–28.
20. Берестовский В.Н. *О структуре однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой* // Сиб. матем. журн. – 1989. – Т. 30. – № 1. – С. 23–34.
21. Берестовский В.Н. *Субметрии пространственных форм неотрицательной кривизны* // Сиб. матем. журн. – 1987. – Т. 28. – № 4. – С. 44–56.
22. O'Neill B. *The fundamental equations of a submersion* // Mich. Math. J. – 1966. – V. 13. – P. 459–469.
23. Berestovskii V.N., Guijarro L. *A metric characterization of Riemannian submersions* // Ann. Global Anal. Geom. – 2000. – V. 18. – P. 577–588.
24. Berestovskii V.N. *A metric characterization of Riemannian submersions for A.D. Alexandrov manifolds of bounded curvature* // Siberian Adv. Math. – 2003. – V. 13. – № 4. – P. 11–16.
25. Шарафутдинов В.А. *Теорема Погорелова–Клингенберга для многообразий, гомеоморфных* R^n // Сиб. матем. журн. – 1977. – Т. 18. – № 4. – С. 915–925.
26. Perelman G. *Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll* // J. Diff. Geom. – 1994. – V. 40. – P. 209–212.
27. Guijarro L. *On the metric structure of nonnegatively curved manifolds* // Pac. J. Math. 2000. – V. 196. – № 2. – P. 429–444.
28. Вайнштейн А.Г., Горелик Е.М., Ефремович В.А. *Расслоение плоскости Лобачевского* // ДАН СССР. – 1978. – Т. 241. – № 2. – С. 269–271.
29. Файзуллин Р.Р. *О связи неголономной метрики на группе Гейзенберга с метрикой Грушина* // Сиб. матем. журн. – 2003. – Т. 44. – № 6. – С. 1377–1384.
30. Кон-Фоссен С.Э. *Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом.* – М.: Физматгиз, 1959. – 303 с.
31. Берестовский В.Н. *Однородные G-пространства Буземана* // Сиб. матем. журн. – 1982. – Т. 23. – № 2. – С. 3–15.
32. Szenthe J. *On the topological characterization of transitive Lie group actions* // Acta Sci. Math. – 1974. – V. 36. – № 3/4. – P. 323–344.
33. Уорнер Ф. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли.* – М.: Мир, 1987. – 302 с.
34. Стинрод Н. *Топология косых произведений.* – М.: Ин. лит., 1953. – 274 с.
35. Адамс Дж. *Лекции по группам Ли.* – М.: Наука, 1979. – 144 с.

36. Yamabe H. *A generalization of a theorem of Gleason* // Ann. of Math. – 1953. – V. 58. – № 2. – P. 351–365.
37. Алексеевский Д.В. S^n *и* E^n *– единственные римановы пространства, допускающие существенное конформное преобразование* // УМН. – 1973. – Т. 28. – № 5. – С. 225–226.
38. Алексеевский Д.В. *Группы конформных преобразований римановых пространств* // Матем. сб. – 1972. – Т. 89. – № 2. – С. 280–296.
39. Алексеевский Д.В., Кимельфельд Б.Н. *Классификация однородных конформно плоских римановых многоообразий* // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24. – №1. – С. 103–110.
40. Rodionov E.D., Slavskii V.V. *Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces* // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 2002. – V. 43. – № 2. – P. 271–282.

Омский филиал
Института математики
Сибирского отделения
Российской Академии наук

Поступила
31.08.2004