И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 2 (501)

УДК 517.925

О.Г. АНТОНОВСКАЯ

ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ЗАДАННЫМ ОГРАНИЧЕНИЯМ, ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Известно, что центральное место в прямом методе Ляпунова занимает проблема построения функции Ляпунова [1]–[3].

При определении устойчивости и получении качественных характеристик непрерывных (дискретных) динамических систем вблизи равновесных состояний ввиду возможности линеаризации часто используются функции Ляпунова квадратичного вида, построенные для соответствующих линеаризованных систем ([3], с. 33–45; [4], с. 120–132). Кроме того, и для непрерывных, и для дискретных динамических систем может ставиться вопрос о построении квадратичной функции Ляпунова с некоторыми заданными свойствами, у которой, например, матрица имеет заданный спектр [5] или отношение наибольшего и наименьшего собственных чисел минимально [6], [7].

В прикладных динамических задачах, когда принципиальный интерес представляют уже не только качественные, но и количественные характеристики системы, возникает необходимость накладывать на функции Ляпунова ограничения другого вида [8]. В частности, при численно-аналитическом способе оценки областей притяжения асимптотически устойчивых множеств ([3], с. 33–45; [4], с. 123–128) с помощью определения знака первой производной (первой разности) квадратичной функции $V(x)$ Ляпунова на заданной поверхности уровня $V(x) = V_0$ существенным является такой выбор ее параметров, при котором выполнение неравенства $\dot{V}(x) < 0$ ($\Delta V(x) < 0$) обеспечивается с максимально возможным запасом.

В данной статье обсуждается возможность решения поставленной задачи для случая $x \in R^n$, $n \in N$, а также приводится доказательство того, что при $n = 2$ указанный выбор параметров $V(x)$, обеспечивающих максимальный запас выполнения неравенства $\dot{V}(x) < 0$ ($\Delta V(x) < 0$), может быть осуществлен с помощью явных соотношений.

1. Построение квадратичных функций Ляпунова, обладающих свойством ограниченности первой производной, для линейных дифференциальных систем

Теорема 1. *Пусть для системы дифференциальных уравнений вида*

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке научной программы Министерства образования Российской Федерации "Университеты России – фундаментальные исследования" (проекты №№ 992870, УР.03.01.027).

корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, имеют отрицательные действительные части и квадратичная форма

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_i x_j, \quad K_{ij} = K_{ji}, \tag{2}$$

является положительно-определенной. Тогда максимальное и минимальное значения первой производной

$$\dot{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij} (\dot{x}_i x_j + x_i \dot{x}_j), \quad K_{ij} = K_{ji},$$

для решений системы (1) на заданной поверхности уровня $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$ имеют вид $\delta_{\max} V_0$, $\delta_{\min} V_0$, где $\delta_{\max}$, $\delta_{\min}$ — соответственно максимальный и минимальный действительные корни уравнения

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \delta K_{11} & A_{12} - \delta K_{12} & \ldots & A_{1n} - \delta K_{1n} \\ A_{21} - \delta K_{21} & A_{22} - \delta K_{22} & \ldots & A_{2n} - \delta K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} - \delta K_{n1} & A_{n2} - \delta K_{n2} & \ldots & A_{nn} - \delta K_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

в котором

$$A_{km} = \sum_{i=1}^{n} (K_{ik} a_{im} + K_{im} a_{ik}), \quad m, k = 1, 2, \ldots, n, \quad A_{km} = A_{mk}. \tag{4}$$

При этом функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является функцией Ляпунова, если $2 \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{\mathrm{Re}\, \lambda_i\} < \delta_{\max} < 0$. Максимально возможный запас выполнения неравенства $\dot{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ на поверхности уровня $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$ достигается при $\delta_{\max} = 2 \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \{\mathrm{Re}\, \lambda_i\}$.

Доказательство. Для определения экстремальных значений первой производной функции (2) в силу (1) на заданной поверхности уровня воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа ([9], с. 470–471). Выбирая в качестве исследуемой функции

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \delta) = \dot{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \delta(V(x_1, x_2, \ldots, x_n) - V_0),$$

для определения значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и множителя Лагранжа δ приходим к системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{ij} - \delta K_{ij}) x_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Будучи системой линейных однородных уравнений относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, система (5) имеет ненулевые решения только в случае равенства нулю определителя системы. Отсюда δ может быть найдено из уравнения (3). Но каждому действительному значению δ соответствуют значения $\dot{V}/V = \delta$ и $\theta_i = x_i / x_n$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Это позволяет найти точки поверхности $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$, в которых это значение δ достигается.

Метод неопределенных множителей Лагранжа дает необходимые условия существования условных экстремумов, т. е. если минимальное и максимальное значения $\dot{V}$ на поверхности уровня $V = V_0$ существуют, то они соответствуют корням уравнения (3). При этом если корней (3) больше одного, то минимальное и максимальное значения $\dot{V}$ на сечении $V = V_0$ могут быть найдены как произведения $V_0 \delta_{\min}$ и $V_0 \delta_{\max}$.

Очевидно, (2) является функцией Ляпунова для (1), если величина $\delta_{\max}$ отрицательна. Вопрос о максимально возможном ограничении на величину $|\delta_{\max}|$ может быть решен следующим образом.

1. Пусть все корни характеристического уравнения действительны и различны, причем $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 0$. В этом случае всегда существует линейное невырожденное преобразование координат

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

приводящее систему (1) к каноническому виду ([1], с. 121)

$$\dot{\xi}_i = \lambda_i \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{6}$$

При этом квадратичные формы $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\dot{V}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перейдут соответственно в квадратичные формы

$$W(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = V\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{1j}\xi_j, \sum_{j=1}^{n} b_{2j}\xi_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} b_{nj}\xi_j\Big),$$
$$\dot{W}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \dot{V}\Big(\sum_{j=1}^{n} b_{1j}\xi_j, \sum_{j=1}^{n} b_{2j}\xi_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} b_{nj}\xi_j\Big),$$

причем $\max\limits_{V=V_0} \frac{\dot{V}}{V} = \max\limits_{W=V_0} \frac{\dot{W}}{W}$. Таким образом, не ограничивая общности рассуждений, можно предполагать, что система имеет канонический вид, т. е. величины (4) равны

$$A_{km} = (\lambda_m + \lambda_k)K_{km}, \quad m, k = 1, 2, \dots, n,$$

а уравнение (3) имеет вид

$$\begin{vmatrix} (2\lambda_1 - \delta)K_{11} & (\lambda_1 + \lambda_2 - \delta)K_{12} & \dots & (\lambda_1 + \lambda_n - \delta)K_{1n} \\ (\lambda_1 + \lambda_2 - \delta)K_{12} & (2\lambda_2 - \delta)K_{22} & \dots & (\lambda_2 + \lambda_n - \delta)K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_1 + \lambda_n - \delta)K_{1n} & (\lambda_2 + \lambda_n - \delta)K_{2n} & \dots & (2\lambda_n - \delta)K_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Будем рассматривать каждое решение δ уравнения (7) как функцию переменных K_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$, заданную неявно. Поскольку функция (2) является функцией Ляпунова, только если максимальное значение первой производной на любой ее поверхности уровня отрицательно, ограничимся рассмотрением области $\delta < 0$. Необходимые условия существования экстремума ([9], с. 418) функции δ ($\partial\delta/\partial K_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$) примут вид

$$(\lambda_i + \lambda_j - \delta)M_{ij}(\delta) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{8}$$

где $M_{ij}(\delta)$ — дополнительный минор для элемента $(\lambda_i + \lambda_j - \delta)K_{ij}$ определителя (7), при условии, что производная по δ определителя, стоящего в левой части (3), отлична от нуля.

Непосредственной подстановкой в уравнения (8) легко показать, что значения $\delta_i = 2\lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, при $K_{ii} > 0$, $K_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ обращают эти уравнения в тождества, причем производная по δ определителя (3) в этом случае отлична от нуля. Квадратичные формы с этими параметрами заведомо являются функциями Ляпунова (6), а значениям $\frac{\dot{W}}{W} = \delta_i$ соответствуют точки $\xi_i = \pm\sqrt{V_0}$, $\xi_j = 0$ $(j \neq i)$. Кроме того, преобразуя (8), можно показать, что эти уравнения приводятся к виду

$$(2\lambda_i - \delta)[(2\lambda_1 - \delta)\dots(2\lambda_{i-1} - \delta)(2\lambda_{i+1} - \delta)\dots(2\lambda_n - \delta)\Delta_i +$$
$$+ \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\dots\lambda_n P_i(\delta)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{9}$$

где $\Delta_i > 0$ есть алгебраическое дополнение элемента K_{ii} в определителе $\det \|K_{ij}\|$, а $P_i(\delta) > 0$ — полином не выше, чем $(n-2)$-й степени относительно δ с неотрицательными коэффициентами при четных степенях и неположительными — при нечетных. Это означает, что решения δ системы уравнений (8) не могут располагаться ни на одном из интервалов $\delta_i < \delta < \delta_{i+1}$,

$i = 1, 2, \ldots, n-1$, что противоречило бы i-му уравнению (8) в случае четного n и $(i+1)$-му — в случае, если n нечетно; значения δ_i могут быть корнями уравнений (9) только все одновременно, и, кроме того, при $\delta < \delta_1$ не существует решений системы. А поскольку значение $\delta_n = 2\lambda_n = 2 \max\limits_{i=1,2,\ldots,n}\{\lambda_i\}$ при $K_{ii} > 0$, $K_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ дает минимум функции δ $(d^2\delta > 0)$ ([9], с. 424), то наибольшее значение первой производной на заданном сечении $W = V_0$ $(V = V_0)$ не может быть меньше величины $2\lambda_n V_0 = 2 \max\limits_{i=1,2,\ldots,n}\{\lambda_i\}V_0 = 2 \max\limits_{i=1,2,\ldots,n}\{\operatorname{Re}\lambda_i\}V_0$.

2. Пусть все значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны, но среди них есть комплексно-сопряженные. И пусть $\operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2 < \cdots < \operatorname{Re}\lambda_n < 0$. В этом случае рассуждения будут аналогичными приведенным выше с той лишь разницей, что коэффициенты первой производной после перехода к каноническим переменным будут содержать $\operatorname{Re}\lambda_i$ вместо λ_i, если λ_i — комплексное число, а коэффициенты $K_{ii} > 0$, соответствующие комплексно-сопряженным λ_i, $\overline{\lambda}_i$, равны между собой.

3. Случай кратных корней характеристического уравнения имеет место по непрерывности.

Таким образом, максимально возможный запас выполнения неравенства $\dot{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ на поверхности $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$ будет достигаться при $\delta_{\max} = 2 \max\limits_{i=1,2,\ldots,n}\{\operatorname{Re}\lambda_i\}$, где λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — корни характеристического уравнения, соответствующего состоянию равновесия $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. При этом функция Ляпунова (2), удовлетворяющая ограничению $\max\limits_{V=V_0}\frac{\dot{V}}{V} = 2 \max\limits_{i=1,2,\ldots,n}\{\operatorname{Re}\lambda_i\}$, соответствует условию $\delta_{\max} = 2 \max\limits_{i=1,2,\ldots,n}\{\operatorname{Re}\lambda_i\}$. $\square$

Замечание. В случае $n = 2$ ввиду малой размерности задачи решения уравнения (3) могут быть получены в явном виде [10].

2. Построение квадратичных функций Ляпунова, обладающих свойством ограниченности первой разности, для линейных точечных отображений

Теорема 2. *Пусть дано линейное точечное отображение вида*

$$\overline{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

такое, что корни $z_1, z_2, \ldots, z_n$ характеристического уравнения, соответствующего неподвижной точке $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, лежат внутри круга единичного радиуса. Пусть положительно-определенная квадратичная форма определена соотношением (2)*. Тогда максимальное и минимальное значения первой разности*

$$\Delta V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) - V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

на заданной поверхности уровня $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$ равны соответственно $\delta_{\max}V_0$, $\delta_{\min}V_0$, где $\delta_{\max}$, $\delta_{\min}$ — максимальный и минимальный действительные корни уравнения вида (3)*, в котором*

$$A_{km} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}a_{ik}a_{jm} - K_{km}, \quad m, k = 1, 2, \ldots, n, \quad A_{km} = A_{mk}.$$

При этом $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является функцией Ляпунова, если $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n}\{|z_i|^2 - 1\} < \delta_{\max} < 0$. Максимально возможный запас выполнения неравенства $\Delta V(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ на поверхности уровня $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$ достигается при $\delta_{\max} = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n}\{|z_i|^2 - 1\}$.

Доказательство теоремы 2 подобно доказательству теоремы 1. При этом величины A_{km}, $k, m = 1, 2, \ldots, n$, — коэффициенты квадратичной формы $\Delta V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а в случае, когда точечное отображение задано в каноническом виде и все корни характеристического уравнения действительны и различны,

$$A_{km} = (z_1 z_2 - 1)K_{km}, \quad k, m = 1, 2, \ldots, n.$$

Замечание к теореме 1 справедливо и для теоремы 2.

Литература

1. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* – М.–Л.: Изд-во техн.-теор. лит., 1950. – 472 с.
2. Четаев Н.Г. *Устойчивость движения.* – 3-е изд. – М.: Физматгиз, 1966. – 207 с.
3. Косякин А.А., Шамриков Б.М. *Колебания в цифровых автоматических системах.* – М.: Наука, 1983. – 334 с.
4. Барбашин Е.А. *Функции Ляпунова.* – М.: Наука, 1970. – 240 с.
5. Хусаинов Д.Я., Юнькова Е.А. *Об одном методе нахождения решения матричного уравнения Ляпунова с заданным спектром* // Укр. матем. журн. – 1984. – Т. 36. – № 4. – С. 528–531.
6. Сарыбеков Р.А. *Экстремальные квадратичные функции Ляпунова систем уравнений второго порядка* // Сиб. матем. журн. – 1977. – Т. 18. – № 5. – С. 1159–1167.
7. Комаров Ю.А., Хусаинов Д.Я. *Некоторые замечания об экстремальной функции Ляпунова для линейных систем* // Укр. матем. журн. – 1983. – Т. 35. – № 6. – С. 750–753.
8. Пропой А.И. *О проблеме устойчивости движения* // Автоматика и телемеханика. – 2000. – № 4. – С. 51–60.
9. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1. – М.: Наука, 1969. – 607 с.
10. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. *Квадратичная функция Ляпунова при условии ограничения величины ее первой производной* // Вестн. ННГУ. Сер. матем. моделир. и оптимал. управление. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2001. – Вып. 1. – С. 56–64.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
Нижегородского государственного университета

Поступили
первый вариант 26.09.2001
окончательный вариант 22.05.2002