Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2015, №9, с. 46–55 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

С.А. СОЛОВЬЕВА

ОБ ОДНОМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА

Аннотация. Предложен и обоснован специальный вариант метода коллокации-подобластей приближенного решения интегральных уравнений третьего рода в общем случае нулей коэффициента в пространстве обобщенных функций.

Ключевые слова: интегральные уравнения третьего рода, пространство обобщенных функций, приближенное решение, теоретическое обоснование, метод коллокации-подобластей.

УДК: 519.642

Рассматривается линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР)

$$(Ax)(t) \equiv (Ux)(t) + (Kx)(t) = y(t), \tag{1}$$

где

$$(Ux)(t) \equiv u(t)x(t), \ \ u(t) \equiv t^{p_1}(1-t)^{p_2}\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j}, \ \ (Kx)(t) \equiv \int_0^1 K(t,s)x(s)ds, \ \ t \in I \equiv [0,1],$$

$p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $t_j \in (0,1)$, m_j $(j = \overline{1,q})$ — целые неотрицательные числа; K и y — известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами "гладкости" точечного характера, а x — искомая функция. К уравнениям вида (1) приводят многие задачи теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (например, [1] и библиография в ней; [2]). Естественными классами решений УТР, как правило, являются специальные пространства обобщенных функций. Точно решить уравнения вида (1) удается достаточно редко, поэтому задача разработки приближенных методов их решения с теоретическим обоснованием является важной и актуальной.

Ряд результатов в этой области получен в работах [3]–[9]. В [3] построена полная теория разрешимости рассматриваемых уравнений, а также предложены и теоретически обоснованы методы их приближенного решения в пространстве типа D обобщенных функций, основанных на дельта-функции Дирака, и в частных случаях нулей коэффициента $u(t)$ в пространстве типа V, построенном при помощи функционала "конечная часть интеграла по Адамару". В работах [4]–[9] разработан и обоснован ряд методов точного и приближенного решения уравнений вида (1) в пространстве типа V в наиболее общем случае нулей коэффициента $u(t)$.

В данной статье на основе идей и рассуждений работ [3]–[9] построен и обоснован в смысле ([10], гл. 1) специальный вариант метода коллокации-подобластей решения уравнений вида (1) в пространстве обобщенных функций типа V в общем случае нулей коэффициента $u(t)$.

Поступила 19.10.2013

Предложенный метод хорошо учитывает структурные свойства исходных данных, а именно, при увеличении их порядка гладкости возрастает скорость сходимости приближенных решений к точному.

1. Пространство основных функций. Пусть $C \equiv C(I)$ — пространство непрерывных на I функций с чебышевской нормой и $m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Следуя [11], будем называть тейлоровской производной порядка m в точке t_0 предел (если он существует)

$$y^{\{m\}}(t_0) = m! \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - \sum\limits_{i=0}^{m-1} y^{\{i\}}(t_0)(t-t_0)^i/i!}{(t-t_0)^m},$$

по определению $y^{\{0\}}(t_0) = y(t_0)$. Обозначим через $C\{m; t_0\}$ класс функций $y \in C$, имеющих в точке $t_0 \in (0,1)$ тейлоровские производные порядка m.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_q$ — произвольно фиксированные попарно различные точки интервала $(0,1)$. Каждой точке t_j поставим в соответствие число $m_j \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ $(j = \overline{1,q})$. Далее рассмотрим векторное пространство

$$C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} = \bigcap_{j=1}^{q} C\{m_j; t_j\},$$

где $\overline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_q)$, $\overline{\tau} = (t_1, t_2, \ldots, t_q)$ — конечные наборы соответствующих величин. Пусть $p_1 \geq 0$. Обозначим через $C\{p_1; 0\}$ пространство функций $y \in C$, имеющих правые тейлоровские производные $y^{\{i\}}(0)$ $(i = \overline{0, [p_1]})$ в точке $t = 0$, причем в случае $p_1 \neq [p_1]$ ($[\cdot]$ — целая часть) существует конечный предел

$$\lim_{t \to +0} \left\{ \left[y(t) - \sum_{i=0}^{[p_1]} y^{\{i\}}(0) t^i / i! \right] t^{-p_1} \right\}.$$

Класс $C\{p_2; 1\}$ $(p_2 \geq 0)$ вводится аналогично. Теперь образуем основное векторное пространство

$$Y \equiv V\{p_1, p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\} = C\{\overline{m}; \overline{\tau}\} \bigcap C\{p_1; 0\} \bigcap C\{p_2; 1\}.$$

Будем считать, что $C\{0, 0; \overline{0}, \overline{\tau}\} \equiv C$.

Зададим в нем норму ([3], с. 57)

$$\|y\|_Y = \|Ty\|_C + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} |y^{\{i\}}(t_j)|, \tag{2}$$

где T — “характеристический” оператор класса Y:

$$(Ty)(t) = \left[y(t) - \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} y^{\{i\}}(t_j) R_{ji}(t) \right] / u(t) = \Phi(t), \tag{3}$$

$\Phi \in C$, $\Phi(t_j) \equiv \lim\limits_{t \to t_j} \Phi(t)$ $(j = \overline{1, q+2})$; $t_j \in (0,1)$ $(j = \overline{1,q})$, $t_{q+1} = 0$, $t_{q+2} = 1$, $R_{ji}(t)$ — фундаментальные полиномы Эрмита степени $m-1$ по узлам $\{t_j\}_1^{q+2}$. Здесь $m = \sum\limits_{j=1}^{q+2} m_j$, $m_{q+1} = \lambda_1 + 1$, $m_{q+2} = \lambda_2 + 1$, $\lambda_k = \lambda(p_k)$ $(k = \overline{1,2})$, $\lambda(p) = p - 1$ для целого p, иначе $\lambda(p) = [p]$. При $m_j = 0$ $(j = \overline{1, q+2})$ соответствующие слагаемые в равенствах (2) и (3) отсутствуют. В частности, если $m_1 = m_2 = \cdots = m_{q+2} = 0$, то $(Ty)(t) = y(t)$ и $\|y\|_Y = \|y\|_C$.

Имеет место ([3], с. 58)

Лемма 1. (i) *Функция $y(t)$ принадлежит классу Y тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$y(t) = u(t)\Phi(t) + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} a_{ji}R_{ji}(t), \tag{4}$$

где $\Phi(t) = (Ty)(t) \in C$, $a_{ji} = y^{\{i\}}(t_j) \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{0, m_j-1},\ j = \overline{1, q+2})$;

(ii) *пространство Y по норме (2) полно и вложено в C.*

Далее, если $\theta \in Y$ по переменной s равномерно относительно t, то будем писать, что $\theta(t,s) \in Y_s$. Обозначим также через H_l класс полиномов степени не выше l.

Лемма 2. *Пусть $\theta(t,s) \in Y_s$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует такая функция $\psi(t,s) = \psi(t,s;n) \in Y_s$, что справедливы оценки*

(i) $|(\theta-\psi)(t,s)| \le \varepsilon^t_{2n}(\theta)$ $(t, s \in I)$;

(ii) $|(\theta-\psi)^{\{i\}}_s(t,t_j)| \le c\varepsilon^t_{2n}(\theta)$ $(t \in I,\ i = \overline{0, m_j-1},\ j = \overline{1, q+2})$, *$c > 0$ — некоторая постоянная*;

(iii) $|T_s(\theta-\psi)(t,s)| \le \varepsilon^t_{2n}(\theta)$ $(t, s \in I)$,

в которых

$$\varepsilon^t_{2n}(\theta) = E^t_{2n}(h) + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} E_{2n}(g_{ji}),$$

$h(t,s) = (T_s\theta)(t,s)$, $g_{ji}(t,s) = \theta^{\{i\}}(t,t_j)$ $(i = \overline{0, m_j-1},\ j = \overline{1, q+2})$, $E_{2n}(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(t)$ полиномами из класса H_{2n} $(n \ge 1)$, $E^t_{2n}(f)$ — функционал $E_{2n}(\cdot)$, примененный по аргументу t.

Доказательство. За основу примем идею при доказательстве соответствующего утверждения в [6]. На основании (4) имеем

$$\theta(t,s) = u(s)h(t,s) + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} g_{ji}(t)R_{ji}(s).$$

Обозначим через $h^t_{2n}(t,s)$ и $g^{ji}_{2n}(t)$ алгебраические полиномы степени $2n$ наилучшего равномерного приближения для функций $h(t,s)$ (по t) и $g_{ji}(t)$ $(i = \overline{0, m_j-1},\ j = \overline{1, q+2})$ соответственно. Образуем функцию

$$\psi(t,s) = u(s)h^t_{2n}(t,s) + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} g^{ji}_{2n}(t)R_{ji}(s) \in Y_s.$$

Справедливость оценок (i)–(iii) легко показать непосредственной подстановкой.

Рассмотрим теперь линейный оператор

$$P^T_n \equiv P^T_{2n+m+1} : Y \to Y_n \equiv H^T_{2n+m+1} = U(H_{2n}) \oplus H_{m-1},$$

определенный соотношением

$$(P^T_n y)(t) = (UP_nTy)(t) + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} y^{\{i\}}(t_j)R_{ji}(t) \quad (y \in Y), \tag{5}$$

где $P_n : C \to H_{2n}$ — оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(t) \in C$ полином $(P_n\varphi)(t) \in Y$, удовлетворяющий свойствам

$$(P_n\varphi)(\nu_k) = \varphi(\nu_k) \quad (k = \overline{1, n+1}); \quad \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} (P_n\varphi)(t)dt = \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} \varphi(t)dt \quad (k = \overline{1, n}), \tag{6}$$

$\nu_k = \nu_k^{(n)} \in I$ — узлы Чебышева первого рода вида

$$\nu_k = \frac{1}{2} \cos \frac{2k-1}{2n+2}\pi + \frac{1}{2} \quad (k = \overline{1, n+1}). \tag{7}$$

Лемма 3. *Оператор* P_n^T *обладает свойствами*
(i) $(P_n^T)^2 = P_n^T$;
(ii) $\|P_n^T\|_Y \le d_1 n^2$, $n \ge 10$;
(iii) $\|y - P_n^T y\|_Y \le d_2 n^2 E_{2n}(Ty)$, $y \in Y$, $n \ge 10$;
(iv) $TP_n^T y = P_n Ty$, $y \in Y$.

Символами d_i $(i = 1, 2, \dots)$ здесь и далее обозначены некоторые константы.

Доказательство аналогично доказательству соответствующих результатов в [3].

Первое утверждение легко следует из леммы 1.4.1 [9] с учетом проективности оператора P_n в пространстве C.

Второе свойство получается из леммы 1.4.2 [9] на основе оценки ([3], с. 33)

$$\|P_n\|_C \le d_1 n^2, \quad n \ge 10.$$

Дополнительное условие на n здесь возникает, так как при выводе оценки $\|P_n\|_C$ ([3], с. 33) было использовано свойство основных функций эрмитовой интерполяции (например, [12], с. 553), справедливое при $n \ge 10$.

Третья оценка следует из теоремы 1.4.1 [9] и второго пункта данной леммы.

Наконец, четвертая формула легко выводится из (5) с учетом получаемых из (3) соотношений $TU\varphi = \varphi$ $(\varphi \in C)$ и $\ker T = H_{m-1}$.

2. Пространство обобщенных функций. Теперь на основном пространстве Y рассмотрим множество $X = \{p_1, p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\}$ обобщенных функций вида

$$x(t) = z(t) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{ji} \, \mathrm{F.\,P.}\, t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_2}(t-t_j)^{-i-1}, \tag{8}$$

где $t \in I$, $z \in C$, $\mu_k = \lambda_k - p_k + 1$ $(k = \overline{1, 2})$, $c_{ji} \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а $\mathrm{F.\,P.}\, f(t)(t-t_j)^{-i-1}$ — обобщенные функции, определенные на Y по правилу

$$(\mathrm{F.\,P.}\, f(t)(t-t_j)^{-i-1}, y) = \mathrm{F.\,P.} \int_0^1 y(t)f(t)(t-t_j)^{-i-1}dt, \quad y \in Y, \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q+2}.$$

Знак “F. P.” указывает на конечную часть интеграла по Адамару (например, [13], с. 423). В дальнейшем знак “F. P.” для краткости будем опускать.

Ясно, что векторное пространство X относительно нормы

$$\|x\|_X = \|z\|_C + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j-1} |c_{ji}| \tag{9}$$

является банаховым.

3. Обобщенный метод коллокации-подобластей. Пусть в УТР (1) исходные данные удовлетворяют условиям

$$y,\ K\ (\text{по } t \text{ и } s),\ K_t^{\{i\}}(t_j, s),\ K_s^{\{i\}}(t, t_j) \in Y, \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q+2}, \tag{10}$$

а x — искомая обобщенная функция вида (8). Фредгольмовость и достаточные условия непрерывной обратимости оператора $A : X \to Y$ установлены в работах [4], [9]. Там же указан метод сведения уравнения (1) к уравнению Фредгольма второго рода в пространстве непрерывных функций и системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Приближенное решение уравнения вида (1) будем искать в виде

$$x_n(t) = z_{2n}(t) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j - 1} c_{ji} t^{\mu_1} (1-t)^{\mu_2} (t - t_j)^{-i-1}, \tag{11}$$

$$z_{2n}(t) = \sum_{k=0}^{2n} c_k t^k. \tag{12}$$

Коэффициенты c_k $(k = \overline{0, 2n})$, c_{ji} $(i = \overline{0, m_j - 1},\ j = \overline{1, q+2})$ находим согласно предлагаемому методу из СЛАУ

$$(TAx_n - Ty)(\nu_k) = 0 \ \ (k = \overline{1, n+1}); \quad \int_{\nu_k}^{\nu_{k+1}} (TAx_n - Ty)(t)dt = 0 \ \ (k = \overline{1, n});$$

$$(Ax_n - y)^{\{i\}}(t_j) = 0 \ \ (i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q+2}), \tag{13}$$

где ν_k $(k = \overline{1, n+1})$ — узлы Чебышева первого рода вида (7).

Относительно вычислительной схемы (1), (11)–(13) справедлива

Теорема 1. *Пусть*

(i) *УТР* (1) *однозначно разрешимо в пространстве X при любой правой части $y \in Y$* (*например, в условиях теоремы* 3 [4]);

(ii) $h(t, s) \equiv (T_s\theta)(t, s) = (T_sT_tK)$ (*по* t), $g_{ji}(t) \equiv \theta_s^{\{i\}}(t, t_j)$ $(i = \overline{0, m_j - 1},\ j = \overline{1, q+2})$, $(Ty)(t) \in H_\alpha^r$ $(0 < \alpha \le 1,\ r - 1 \in \mathbb{N})$, *где H_α^r — класс r раз непрерывно дифференцируемых функций, производные порядка r которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α.*

Тогда при достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные на основе (11)–(13)*, существуют, единственны и сходятся к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в том смысле, что*

$$\|x^* - x_n^*\|_X \le \frac{d_3}{n^{r-2+\alpha}}. \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим УТР (1) как операторное уравнение

$$Ax \equiv Ux + Kx = y \ \ (x \in X, \quad y \in Y). \tag{15}$$

Тогда система (11)–(13) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv P_n^T A x_n = U x_n + P_n^T K x_n = P_n^T y \ \ (x_n \in X_n, \quad P_n^T y \in Y_n), \tag{16}$$

где $X_n \equiv H_{2n+m+1}^{\text{F.P.}} = H_{2n} \oplus \operatorname{span}\{t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_2}(t - t_j)^{-i-1} \mid i = \overline{0, m_j - 1},\ j = \overline{1, q+2}\} \subset X$, $Y_n \equiv H_{2n+m+1}^T \subset Y$, $P_n^T : Y \to Y_n$ — оператор, определенный соотношением (5).

Действительно, пусть $x_n^* = x_n(t; c_k^*, c_{ji}^*)$ — решение уравнения (16), т. е.

$$Ux_n^* + P_n^T(Kx_n^* - y) \equiv 0.$$

Отсюда в силу (5) и (11) получаем

$$u(t)(z_n^* + P_n T(Kx_n^* - y))(t) + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1}(q_{ji} + (Kx_n^* - y)^{\{i\}}(t_j))R_{ji}(t) \equiv 0, \tag{17}$$

где

$$q_{ji} = Q_{m-1}^{\{i\}}(t_j), \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q+2},$$

$$Q_{m-1} = \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_k-1} c_{ji}^*(t-t_j)^{m_j-1-i}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{q+2}(t-t_k)^{m_k} = \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} q_{ji}R_{ji}(t) \in H_{m-1}.$$

Из леммы 1 видно, что тождество (17) эквивалентно системе

$$TUx_n^* + P_nTKx_n^* - P_nTy \equiv 0; \quad q_{ji} + (Kx_n^* - y)^{\{i\}}(t_j) = 0, \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q+2}. \tag{18}$$

Очевидно, что $P_nTKx_n^* = P_nTAx_n^* - TUx_n^*$ и $(Ux_n^*)^{\{i\}}(t_j) = q_{ji}$, $i = \overline{0, m_j - 1}$, $j = \overline{1, q+2}$. Значит, система (18) принимает вид

$$P_n(TAx_n^* - Ty) \equiv 0; \quad (Ax_n^* - y)^{\{i\}}(t_j) = 0, \quad i = \overline{0, m_j - 1}, \quad j = \overline{1, q+2},$$

откуда в силу (6) имеем (13).

Таким образом, решение операторного уравнения (16) сводится к решению СЛАУ (11)–(13). Для получения обратного утверждения необходимо провести те же рассуждения, но в обратном порядке.

Покажем теперь близость операторов A и A_n на X_n. В силу (15), (16) и леммы 3 для любого $x_n \in X_n$ имеем

$$\|Ax_n - A_nx_n\|_Y = \|Kx_n - P_n^TKx_n\|_Y \leq d_2n^2E_{2n}(TKx_n), \quad n \geq 10. \tag{19}$$

Для оценки величины $E_{2n}(TKx_n)$ построим функцию

$$\begin{aligned}
(\Psi x_n)(t) &= \int_0^1 \psi(t,s)x_n(s)\,ds = \\
&= \int_0^1 \psi(t,s)z_{2n}(s)\,ds + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} c_{ji}\int_0^1 \psi(t,s)s^{\mu_1}(1-s)^{\mu_2}(s-t_j)^{-i-1}\,ds = \\
&= \int_0^1 \psi(t,s)z_{2n}(s)\,ds + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} c_{ji}\biggl[\int_0^1 (s-t_j)^{m_j-i-1}r_j(s)(T_s\psi)(t,s)\,ds + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{q+2}\sum_{l=0}^{m_k-1}\psi_s^{\{l\}}(t,t_k)\int_0^1 s^{\mu_1}(1-s)^{\mu_2}(s-t_j)^{-i-1}R_{kl}(s)\,ds\biggr] \in H_{2n},
\end{aligned} \tag{20}$$

где $r_j(t) = \prod\limits_{j\neq k=1}^{q+2} (t-t_k)^{m_k}$, а $\psi(t,s)$ определена в лемме 2. Теперь, используя (20), лемму 2 и (9), последовательно получим

$$E_{2n}(TKx_n) \le \|TKx_n - \Psi x_n\|_C =$$
$$= \max_{t\in I}\left| \int_0^1 (\theta-\psi)(t,s) z_{2n}(s)\, ds + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} c_{ji}\left[\int_0^1 (s-t_j)^{m_j-i-1} r_j(s)(T_s(\theta-\psi))(t,s)\, ds + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{q+2}\sum_{l=0}^{m_j-1} (\theta-\psi)_s^{\{l\}}(t,t_k) \int_0^1 s^{\mu_1}(1-s)^{\mu_2}(s-t_j)^{-i-1} R_{kl}(s)\, ds\right]\right| \le$$
$$\le d_4 \varepsilon_{2n}^t(\theta)\left(\|z_{2n}\|_C + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} |c_{ji}|\right) = d_4\varepsilon_{2n}^t(\theta)\|x_n\|_X.$$

Учитывая неравенство (19), находим

$$\varepsilon^{(n)} \equiv \|A - A_n\|_{X_n\to Y} \le d_5 n^2 \left(E_{2n}^t(h) + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} E_{2n}(g_{ji})\right).$$

Так как функции $h(t,s)$ (по t) и $g_{ji}(t)$ ($i=\overline{0,m_j-1}$, $j=\overline{1,q+2}$) принадлежат классу H_α^r ($0<\alpha\le 1$, $r-1\in\mathbb{N}$), то в силу теоремы Джексона (например, [14], с. 82)

$$\varepsilon^{(n)} \le \frac{d_6}{n^{r-2+\alpha}} \quad (0<\alpha\le 1,\quad r-1\in\mathbb{N}). \tag{21}$$

Поэтому по теореме 7 ([10], с. 19) при всех n таких, что $q_n \equiv \|A^{-1}\|\varepsilon^{(n)} < 1$, операторы $A_n:\ X_n\to Y_n$ непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности: $\|A_n^{-1}\| \le \|A^{-1}\|(1-q_n)^{-1}$ ($A_n^{-1}: Y_n \to X_n$).

Для правых частей уравнений (15), (16) в силу свойства (iii) леммы 3 имеем

$$\nu^{(n)} \equiv \|y - P_n^T y\|_Y \le d_2 n^2 E_{2n}(Ty), \quad n\ge 10,$$

или с учетом условия $Ty\in H_\alpha^r$

$$\nu^{(n)} \le \frac{d_7}{n^{r-2+\alpha}}, \quad 0<\alpha\le 1, \quad r-1\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Теперь из теоремы 7 ([10], с. 19) с учетом неравенств (21) и (22) следует оценка (14).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$tx(t) + \int_0^1 sx(s)ds = t^3\sqrt{t} + \frac{20}{9}, \quad x\in X.$$

Ясно, что $h(t,s)=0$, $g_0(t)=0$, $(Ty)(t) = t^2\sqrt{t} \in H_{1/2}^2$. Приближенное решение будем искать при $n=10$ в виде

$$x_{10}(t) = \sum_{i=0}^{20} c_i t^i + \frac{c_{21}}{t}.$$

Система (13) примет вид

$$\sum_{i=0}^{20} c_i(\nu_k)^i = (\nu_k)^{\frac{5}{2}}, \quad k=\overline{1,11}, \quad \sum_{i=0}^{20} c_i \frac{(\nu_{k+1})^{i+1} - (\nu_k)^{i+1}}{i+1} = \frac{2}{7}\big((\nu_{k+1})^{\frac{7}{2}} - (\nu_k)^{\frac{7}{2}}\big), \quad k=\overline{1,10},$$

$$\sum_{i=0}^{20} c_i \frac{1}{i+2} + 2c_{21} = \frac{20}{9},$$

где

$$\nu_k = \frac{1}{2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{22} + \frac{1}{2}, \quad k = \overline{1,11}.$$

Решая ее, получим

$$x_{10}^*(t) \approx 0.2t^2 + 1.5t^3 + 0.6t^4 - 6.6t^5 + 3.9t^6 + 15.7t^7 - 10.7t^8 - 29.0t^9 + 25.6t^{10} - 2.6t^{11} + \\ + 23.3t^{12} - 29.3t^{13} + 11.4t^{14} - 11.0t^{15} + 2.8t^{16} + 17.0t^{17} - 2.7t^{18} - 25.6t^{19} + 16.0t^{20} + \frac{0.5}{t}.$$

Поскольку $x^*(t) = t^2\sqrt{t} + \frac{1}{t}$, то, учитывая (9), найдем $\|x^* - x_{10}^*\|_X = 1,0$.

Рассмотрим теперь УТР

$$tx(t) + \int_0^1 sx(s)ds = t^6\sqrt{t} + \frac{32}{15}, \quad x \in X,$$

ядро и правая часть которого обладают лучшими, по сравнению с предыдущим уравнением, структурными свойствами, а именно, $h(t,s) = 0$, $g_0(t) = 0$, $(Ty)(t) = t^5\sqrt{t} \in H_{1/2}^5$. Неизвестные коэффициенты c_i, $i = \overline{0,21}$, будем искать из СЛАУ

$$\sum_{i=0}^{20} c_i(\nu_k)^i = (\nu_k)^{\frac{11}{2}}, \quad k = \overline{1,11}, \quad \sum_{i=0}^{20} c_i \frac{(\nu_{k+1})^{i+1} - (\nu_k)^{i+1}}{i+1} = \frac{2}{13}\big((\nu_{k+1})^{\frac{13}{2}} - (\nu_k)^{\frac{13}{2}}\big), \quad k = \overline{1,10},$$

$$\sum_{i=0}^{20} c_i \frac{1}{i+2} + 2c_{21} = \frac{32}{15}.$$

Получим

$$x_{10}^*(t) \approx -0.1t^4 + 0.4t^5 + 1.2t^6 - 0.9t^7 - 0.2t^8 + 1.9t^9 - 1.0t^{10} - 0.5t^{11} - \\ - 0.4t^{12} + 0.1t^{14} + 0.8t^{15} + 0.1t^{16} + 0.8t^{17} - 0.1t^{18} - 2.7t^{19} + 1.7t^{20} + \frac{0.9}{t}.$$

Так как $x^*(t) = t^5\sqrt{t} + \frac{1}{t}$, то с учетом (9) имеем $\|x^* - x_{10}^*\|_X = 0.2$.

Рассмотренные примеры иллюстрируют оценку (14). Действительно, при улучшении структурных свойств исходных данных существенно повышается точность приближенных решений, полученных при помощи предлагаемого метода.

Аналогичный результат наблюдается при применении обобщенных методов подобластей, моментов и коллокации (например, [5], [6], [9]). Сплайновые методы [7], [9], а также варианты метода коллокации [8], основанные на специальных полиномах, обладают свойством насыщения, т. е. улучшение структурных свойств исходных данных влияет на точность приближенных решений лишь до определенного предела. С другой стороны, предлагаемый метод применим для более узкого класса УТР по сравнению с методами, разработанными в [7], [8], так как для его использования требуется выполнение более жестких условий на ядро и правую часть.

На практике может оказаться полезной

Теорема 2. *Пусть уравнение* (1) *обладает решением вида* (8) *при данной правой части* $y \in Y$ *и существует непрерывный оператор* $A_n^{-1} = (P_n^T A)^{-1}$. *Тогда погрешность приближенного решения* $x_n^* \in X_n$, *соответствующего правой части* $y_n = P_n^T y \in Y_n$, *оценивается* *неравенством*

$$\|x_n^* - x^*\|_X \leq d_8 n^2 E_{2n}(z^*), \quad n \geq 10,$$

где $z^* = TUx^*$ *— непрерывная компонента обобщенного решения* $x^* \in X$.

Доказательство легко получается из теоремы 6 ([10], с. 17) с учетом свойства (ii) леммы 3.

Следствие. Если в условиях теоремы 2 функция $z^* \in C^{(2)}(I)$, то последовательность приближенных решений x_n^* сходится к точному решению $z^* = A^{-1}y$ по норме пространства Y.

Замечание. Поскольку $C\{0,0;\overline{0},\overline{\tau}\} \equiv C(I)$ и $V\{0,0;\overline{0},\overline{\tau}\} \equiv C(I)$, то при $p_1 = p_2 = m_j = 0$, $j = \overline{1,q}$, УТР (1) превращается в интегральное уравнение второго рода в пространстве непрерывных функций, а рассмотренный в работе метод преобразуется в метод коллокации-подобластей (например, [3], с. 122), причем $(Ty)(t) \equiv y(t)$, $\theta(t,s)(t) \equiv K(t,s)$, $h(t,s) \equiv K(t,s)$. Поэтому оценка (14) хорошо согласуется с оценкой для уравнений второго рода, полученной в ([3], с. 122).

В заключение приведем следующие важные для приложения факты.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *справедливы следующие утверждения*:

(i) *обобщенный метод коллокации-подобластей устойчив относительно малых возмущений системы* (11)–(13);

(ii) *пусть существует число обусловленности* η *для точного уравнения* (1), *тогда хотя бы при достаточно больших* n *существуют числа обусловленности* η_n *приближенного уравнения* (16), *причем* $\eta_n \leq c\eta$ $(1 \leq c \leq 1 + \varepsilon,\ \varepsilon > 0)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \eta$.

Доказательство следует из теорем 11 и 13 ([10], с. 22–25) с учетом того факта, что при выполнении условий теоремы 1 аппроксимирующие операторы A_n при достаточно больших n непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности.

Литература

[1] Bart G.R., Warnock R.L. *Linear integral equations of the third-kind,* SIAM J. Math. Anal. **4** (4), 609–622 (1973).

[2] Кейз К.М., Цвайфель П.Ф. *Линейная теория переноса* (Мир, М., 1972).

[3] Габбасов Н.С. *Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2006).

[4] Габбасов Н.С., Соловьева С.А. *К теории разрешимости интегральных уравнений третьего рода*, Матер. Второй Всеросс. научн. конф. "Матем. моделирование и краевые задачи", ч. 3: "Дифференц. уравнения и краевые задачи", Самара, 29–31 мая 2005 г. (Изд-во СамГТУ, Самара, 2005), с. 68–72.

[5] Соловьева С.А. *Обобщенный метод подобластей для одного класса интегральных уравнений третьего рода*, Матер. Третьей Всеросс. науч. конф. "Матем. моделирование и краевые задачи", ч. 3: "Дифференц. уравнения и краевые задачи", Самара, 1–3 июня 2006 г. (Изд-во СамГТУ, Самара, 2006), с. 209–212.

[6] Габбасов Н.С., Соловьева С.А. *Обобщенный метод моментов для одного класса интегральных уравнений третьего рода*, Дифференц. уравнения **42** (10), 1416–1423 (2006).

[7] Габбасов Н.С., Соловьева С.А. *О сплайн-методе решения интегральных уравнений третьего рода*, Изв. вузов. Матем., № 3, 3–11 (2007).

[8] Габбасов Н.С., Соловьева С.А. *О специальных вариантах метода коллокации для одного класса интегральных уравнений третьего рода*, Изв. вузов. Матем., № 8, 27–33 (2012).

[9] Соловьева С.А. *О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода в пространстве обобщенных функций*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук (КГУ, Казань, 2007).

[10] Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1980).

[11] Пресдорф З. *Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек*, Матем. исследования **7** (1), 116–132 (1972).

[12] Натансон И.П. *Конструктивная теория функций* (Гостехиздат, М., Л., 1949).

[13] Эдвардс Р. *Функциональный анализ*, 2-е изд. (Мир, М., 1971).
[14] Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций* (Изд-во ЛГУ, Л., 1977).

С.А. Соловьева

доцент, кафедра математики,
Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета,
пр. Мира, д. 68/19, г. Набережные Челны, 423810, Россия,

e-mail: solovjeva_sa@mail.ru

S.A. Solov'eva

On one polynomial method of solving integral equations of the third kind

Abstract. We propose and substantiate special variant of the method of collocation-subdomains for approximate solving integral equations of the third kind in the general case of zeros of the coefficient in the space of distributions.

Keywords: integral equation of the third kind, space of distributions, approximate solution, theoretical substantiation, collocation-subdomain method.

S.A. Solov'eva

Associate Professor, Chair of Mathematics,
Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga Region) Federal University,
68/19 Mira Ave., Naberezhnye Chelny, 423810 Russia,

e-mail: solovjeva_sa@mail.ru