ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.518

А.Л. ЛУКАШОВ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ НА ДВУХ ОТРЕЗКАХ

Пусть E — компактное множество действительных чисел, $\mathfrak{M} = \{x_{k,n}\}_{k=1,\,n=1}^{n,\infty}$ — матрица узлов интерполирования, лежащих в E, f — произвольная непрерывная на E действительнозначная функция. Интерполяционный процесс Лагранжа $\{\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ функции f задается формулами

$$\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}, f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) l_{k,n}(\mathfrak{M}, x), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $l_{k,n}(\mathfrak{M}, x)$ — фундаментальные полиномы Лагранжа,

$$l_{k,n}(\mathfrak{M}, x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_{k,n})\omega_n'(x_{k,n})}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{2}$$

$$\omega_n(x_{k,n}) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_{k,n}), \quad n = 1, 2, \dots \tag{3}$$

Хорошо известна (напр., [1], [2]) роль функций Лебега

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, x) = \sum_{k=1}^{n} |l_{k,n}(\mathfrak{M}, x)|$$

и констант Лебега

$$\lambda_n(\mathfrak{M}) = \|\lambda_n(\mathfrak{M}, \cdot)\|_{C(E)}$$

в изучении поведения интерполяционных процессов Лагранжа. При этом к наиболее исследованным относится случай $E = [-1, 1]$ и $\omega_n(x) = T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, т. е. матрицы узлов Чебышева.

Для интерполирования рациональными функциями с фиксированными полюсами, заданными матрицей обратных величин полюсов $\mathfrak{A} = \{a_{\lambda,n}\}_{\lambda=1,\,n=1}^{n,\infty}$, интерполяционный процесс Лагранжа задается формулами (1)–(2), в которых вместо (3) нужно положить

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_{k,n})/(1 - a_{k,n}x).$$

В комплексном случае полученный процесс, который будет далее обозначаться через $\{\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, f, x)\}_{n=1}^{\infty}$, достаточно хорошо исследован для различных классов аналитических функций f (напр., [3], [4]), в то же время эта теория для действительного случая разработана значительно меньше.

В частности, для $E = [-1, 1]$ естественным аналогом узлов Чебышева являются узлы Чебышева-Маркова, т. е. $\omega_n(x) = M_n(x) = \cos\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \arccos \frac{x - a_{k,n}}{1 - a_{k,n}x}\Big)$. Такие процессы были введены В.Н. Русаком [5], и были использованы им, Е.А. Ровбой [6], [7], А.П. Старовойтовым [8] для интерполирования различных классов функций. В частности, в работе А.П. Старовойтова [8] найдена оценка соответствующих констант Лебега (многие приемы из этой работы будут использованы ниже при доказательстве теоремы).

Цель данной работы — найти оценку констант Лебега $\lambda_n(\mathfrak{M},\mathfrak{A})$ для $E=[-1,a]\cup[b,1]$, $-1<a<b<1$, матрицы $\mathfrak{M}$, задаваемой нулями рациональной функции

$$M_n(x)=\frac{P_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-a_{k,n}x)}, \tag{4}$$

наименее уклоняющейся от нуля на E в равномерной метрике среди всех дробей вида (4), где $P_n(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n$, $b_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$, а $a_{k,n}$ фиксированы. При этом потребовалось разработать специальную технику использования геометрических характеристик величин, выражающихся в эллиптических функциях.

Будем считать, что величины $a_{k,n}$, $k=1,\dots,n$, занумерованы следующим образом: $a_{1,n}=\dots=a_{\varkappa_n,n}=0$; $a_{i,n}\neq 0, i=\varkappa_n+1,\dots,n$; $a_{j,n}^{-1}\in\mathbb{C}\backslash[-1,1]$, $j=\varkappa_n+1,\dots,n$; $\operatorname{Re}a_{j,n}\geq 0, j=1,\dots,n_1$; $\operatorname{Re}a_{j,n}<0$, $j=n_1+1,\dots,n$ (возможную зависимость n_1 от n указывать не станем), причем из $\operatorname{Im}a_{j,n}>0$ следует $a_{j+1,n}=\overline{a}_{j,n}$, $j=\varkappa_n+1,\dots,n$ $(1\leq\varkappa_n\leq n_1\leq n)$. Через $C_1,C_2,\dots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от n.

Далее, пусть $K=K(k)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода, соответствующий модулю $k=\sqrt{\frac{2(b-a)}{(1-a)(1+b)}}$. Назовем матрицу $\mathfrak{A}$ регулярной относительно E, если величины $\varphi_n(\mathfrak{A},k,a)$, задаваемые соотношениями

$$\varphi_n(\mathfrak{A},k,a)=\frac{1}{K}\int_0^{\sqrt{(1-a)/2}}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\sqrt{(1+a_{\lambda,n})(1-aa_{\lambda,n})}}{\sqrt{(1-aa_{\lambda,n}-(1+a_{\lambda,n})u^2)(1-aa_{\lambda,n}-k^2(1+a_{\lambda,n})u^2)}}du, \tag{5}$$

принимают целочисленные значения для всех $n\geq 2$. Нетрудно видеть, что для любых заданных величин $a_{1,n},\dots,a_{n-1,n}$ можно найти такие $a_{n,n}$, $n=1,2,\dots$, что матрица $\mathfrak{A}$ будет регулярной относительно E.

Нам потребуется в дальнейшем следующее представление рациональных функций (4) для регулярных относительно E матриц $\mathfrak{A}$.

Лемма 1 ([9]). *Пусть $\varphi_n(\mathfrak{A},k,a)=m\in\mathbb{N}$. Тогда рациональная функция $M_n(x)$, наименее уклоняющаяся от нуля на E среди всех функций вида (4), может быть представлена в одном из следующих видов:*

1. $$M_n(x)=\frac{M_n}{2}\left(\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{H(u-\rho_{\lambda,n})}{H(u+\rho_{\lambda,n})}+\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{H(u+\rho_{\lambda,n})}{H(u-\rho_{\lambda,n})}\right),$$

где

$$x=\frac{\operatorname{sn}^2u\cdot\operatorname{cn}^2\rho_{0,n}+\operatorname{cn}^2u\cdot\operatorname{sn}^2\rho_{0,n}}{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2\rho_{0,n}};$$

$$\operatorname{sn}^2\rho_{\lambda,n}=\frac{(1-a)(1+a_{\lambda,n})}{2(1-aa_{\lambda,n})},\quad \lambda=0,1,\dots,n;\quad -K'<\operatorname{Im}\rho_{\lambda,n}<K',\quad \lambda=1,2,\dots,n;$$

$$-K<\operatorname{Re}\rho_{\lambda,n}<0,\quad \lambda=0,1,\dots,n;\quad K'=K(k'),\quad k'=\sqrt{1-k^2};\quad a_{0,n}=0;\quad \varepsilon=\pm1;$$

$$M_n=\frac{2\varepsilon}{\prod\limits_{\lambda=\varkappa_n+1}^{n}a_{\lambda,n}}\prod_{\lambda=\varkappa_n+1}^{n}\frac{H(\rho_{0,n}+\rho_{\lambda,n})}{H(\rho_{0,n}-\rho_{\lambda,n})}\cdot\left(\frac{\Theta^2(0)\Theta_1^2(0)}{2\Theta_1^2(\rho_{0,n})\Theta^2(\rho_{0,n})}\right)^{\varkappa_n};$$

2. $$M_n(x)=M_n\cos\int_{-1}^{x}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{(x-c_{\lambda,n})\sqrt{(1-a_{\lambda,n}^2)(1-a_{\lambda,n}a)(1-a_{\lambda,n}b)}}{(1-a_{\lambda,n}x)(1-a_{\lambda,n}c_{\lambda,n})\sqrt{(1-x^2)(x-a)(x-b)}}dx,$$

где

$$c_{\lambda,n}=\frac{\sqrt{1-a_{\lambda,n}a}\,\Theta'(\rho_{\lambda,n})\sqrt{(1-a)(1+b)}-a\Theta(\rho_{\lambda,n})\sqrt{(1-a_{\lambda,n}^2)(1-a_{\lambda,n}b)}}{a_{\lambda,n}\sqrt{1-a_{\lambda,n}a}\,\Theta'(\rho_{\lambda,n})\sqrt{(1-a)(1+b)}-\Theta(\rho_{\lambda,n})\sqrt{(1-a_{\lambda,n}^2)(1-a_{\lambda,n}b)}},\quad \lambda=1,\dots,n,$$

причем $a<c_{\lambda,n}<b$ *для* $\operatorname{Im}a_{\lambda,n}=0$, *и* $c_{\lambda,n}$ *лежит на дуге окружности, проходящей через* a, b *и* $a_{\lambda,n}^{-1}$, *ограниченной точками* a *и* b *и не содержащей* $a_{\lambda,n}^{-1}$, *при* $\operatorname{Im}a_{\lambda,n}>0$ (*в этом случае* $c_{\lambda+1,n}=\overline{c}_{\lambda,n}$), $\lambda=1,\dots,n$.

Замечание 1. В последнее время интерес к описанным в лемме 1 дробям, которые, по-видимому, были известны еще Н.И. Ахиезеру (но не выписаны им явно), возрос из-за открытых связей с ортогональными многочленами и решениями цепочек Тоды (напр., [10]–[13]).

Обозначим

$$\gamma_n(x)=\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{(x-c_{\lambda,n})\sqrt{(1-a_{\lambda,n}^2)(1-a_{\lambda,n}a)(1-a_{\lambda,n}b)}}{(1-a_{\lambda,n}x)(1-a_{\lambda,n}c_{\lambda,n})},$$

$$\gamma_n^{(1)}(x)=\sum_{\lambda=1}^{n_1}\frac{\sqrt{1-|a_{\lambda,n}|}\,|x-c_{\lambda,n}|}{1-|a_{\lambda,n}|x},$$

$$\gamma_n^{(2)}(x)=\sum_{\lambda=n_1+1}^{n}\frac{\sqrt{1-|a_{\lambda,n}|}\,|x-c_{\lambda,n}|}{1-|a_{\lambda,n}|x},$$

$$S_n(x)=-\int_{-1}^{x}\frac{\gamma_n(x)dx}{\sqrt{(1-x^2)(x-a)(x-b)}},\quad x\in E.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}\subset\{z:|z|<1\}$ — *регулярная относительно* E *матрица обратных величин полюсов, не имеющая на* $\{z:|z|=1\}$ *других предельных точек, кроме* ±1, *достигаемых ею по некасательным путям, и удовлетворяющая соотношениям*

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda=1}^{n_1}\frac{\sqrt{1-|a_{\lambda,n}|}\,t}{1-|a_{\lambda,n}|+t^2}\ge C_1\quad \textit{при}\quad \sqrt{1-\max_{1\le\lambda\le n_1}|a_{\lambda,n}|}\le t\le 1;\\ &\sum_{\lambda=n_1+1}^{n}\frac{\sqrt{1-|a_{\lambda,n}|}\,t}{1-|a_{\lambda,n}|+t^2}\ge C_2\quad \textit{при}\quad \sqrt{1-\max_{n_1+1\le\lambda\le n}|a_{\lambda,n}|}\le t\le 1;\end{aligned}\tag{6}$$

$$\min_{x\in E}\frac{\gamma_n(x)}{\sqrt{(x-a)(x-b)}\,\gamma_n((b+1)/2)}\ge C_3,\quad n=1,2,\dots\tag{7}$$

Тогда

$$\mathcal{L}_n(\mathfrak{M},\mathfrak{A})=O(\ln\|\gamma_n\|_{C(E)}).$$

Замечание 1. Условие регулярности естественно для интерполирования на двух отрезках, т. к. обеспечивает принадлежность элементов матрицы $\mathfrak{M}$ множеству E.

Замечание 2. При $a=b$ из теоремы следует упомянутый ранее результат А.П. Старовойтова [8] (условия регулярности и (7) здесь выполняются автоматически).

Замечание 3. При $a=b$ и $a_{1,n}=\dots=a_{n,n}=0$ ((6) здесь также выполнено) получаем порядковую оценку констант Лебега интерполяционного процесса Лагранжа по узлам Чебышева, которая, как показано в [14], является оптимальной по порядку для полиномиального интерполирования на отрезке. В случае рационального интерполирования (т. е. процессов

$\{\mathcal{L}_n(\mathfrak{M},\mathfrak{A},f,x)\}_{n=1}^{\infty}$) аналог этого результата, насколько известно автору, отсутствует, хотя в [15] было найдено характеристическое условие на оптимальную матрицу $\mathfrak{M}$.

Лемма 2. *В условиях теоремы найдутся постоянные C_4 и C_5 такие, что при всех $n\in\mathbb{N}$*

$$C_4\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\sqrt{1-|a_{\lambda,n}|}\,|x-c_{\lambda,n}|}{1-|a_{\lambda,n}|x}\le|\gamma_n(x)|\le C_5\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\sqrt{1-|a_{\lambda,n}|}\,|x-c_{\lambda,n}|}{1-|a_{\lambda,n}|x}. \tag{8}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что лемма следует из неравенства

$$-\frac{\pi}{2}+\delta<\varphi_\lambda(x)<\frac{\pi}{2}-\delta, \tag{9}$$

где $\delta>0$ не зависит от λ и n, а

$$\varphi_\lambda(x)=\arg\frac{\sqrt{(1-a_{\lambda,n}^2)(1-a_{\lambda,n}a)(1-a_{\lambda,n}b)}\,(x-c_{\lambda,n})}{(1-a_{\lambda,n}x)(1-a_{\lambda,n}c_{\lambda,n})}.$$

Доказательство неравенства (9) (для $\operatorname{Im}a_{\lambda,n}<0$) разобьем на несколько этапов.

1 этап. Докажем, что $\arg\frac{x-c_{\lambda,n}}{a_{\lambda,n}^{-1}-x}$ заключен между $\arg\frac{b-c_{\lambda,n}}{a_{\lambda,n}^{-1}-b}$ и $\arg\frac{1-c_{\lambda,n}}{a_{\lambda,n}^{-1}-1}$. Для этого применим отображение $w(z)=\frac{z-c_{\lambda,n}}{a_{\lambda,n}^{-1}-z}$, переводящее отрезок $[b,1]$ в дугу окружности L. Окружность L пересекает действительную ось в двух точках: $w=-1$ и $w=w(y)$, т. е. $(c_{\lambda,n}-y)/(a_{\lambda,n}^{-1}-y)$ действительное. Последнее соотношение означает ([16], гл. 1, с. 42), что y лежит на прямой, проходящей через $a_{\lambda,n}^{-1}$ и $c_{\lambda,n}$. Отсюда, из леммы 1 и того, что $\operatorname{Im}a_{\lambda,n}^{-1}>0$ и $|a_{\lambda,n}^{-1}|>1$, следует $y\in(a,b)$ и $\frac{y-c_{\lambda,n}}{a_{\lambda,n}^{-1}-y}>0$. Таким образом, точка $w=0$ находится внутри окружности L, и из определения $w(z)$ следует требуемое.

2 этап. Мы доказали, что $\varphi_\lambda(x)$ находится между

$$\arg\sqrt{\frac{(a_{\lambda,n}^{-2}-1)(a_{\lambda,n}^{-1}-a)}{a_{\lambda,n}^{-1}-b}\cdot\frac{b-c_{\lambda,n}}{a_{\lambda,n}^{-1}-c_{\lambda,n}}} \tag{10}$$

и

$$\arg\sqrt{\frac{(a_{\lambda,n}^{-1}+1)(a_{\lambda,n}^{-1}-b)}{a_{\lambda,n}^{-1}-a}\cdot\frac{1-c_{\lambda,n}}{a_{\lambda,n}^{-1}-c_{\lambda,n}}}. \tag{11}$$

Из расположения точек a, b, $c_{\lambda,n}$ и $a_{\lambda,n}^{-1}$ на одной окружности следует ([16], с. 42), что $\frac{b-c_{\lambda,n}}{a_{\lambda,n}^{-1}-c_{\lambda,n}}\Big/\frac{b-a}{a_{\lambda,n}^{-1}-a}$ является действительным числом, причем положительным, как показывают неравенства

$$0<\arg(a_{\lambda,n}^{-1}-a)<\pi\quad\text{и}\quad 0<\arg(b-c_{\lambda,n})-\arg(a_{\lambda,n}^{-1}-c_{\lambda,n})<\pi.$$

Отсюда выражение (10) равно

$$\arg\sqrt{\frac{a_{\lambda,n}^{-2}-1}{(a_{\lambda,n}^{-1}-a)(a_{\lambda,n}^{-1}-b)}}. \tag{12}$$

Аналогично (11) преобразуется к

$$\arg\sqrt{\frac{(a_{\lambda,n}^{-1}+1)(a_{\lambda,n}^{-1}-a)(a_{\lambda,n}^{-1}-b)}{a_{\lambda,n}^{-1}-1}\cdot\frac{1}{a_{\lambda,n}^{-1}-z}}, \tag{13}$$

где z — точка пересечения окружности, проходящей через 1, $c_{\lambda,n}$ и $a_{\lambda,n}^{-1}$, с действительной осью, причем $a < z < b$. Следовательно, (13) заключено между

$$\arg\sqrt{\frac{(a_{\lambda,n}^{-1}+1)(a_{\lambda,n}^{-1}-a)(a_{\lambda,n}^{-1}-b)}{a_{\lambda,n}^{-1}-1}\cdot\frac{1}{a_{\lambda,n}^{-1}-a}}=\arg\sqrt{\frac{(a_{\lambda,n}^{-1}+1)(a_{\lambda,n}^{-1}-b)}{(a_{\lambda,n}^{-1}-1)(a_{\lambda,n}^{-1}-a)}} \tag{14}$$

и

$$\arg\sqrt{\frac{(a_{\lambda,n}^{-1}+1)(a_{\lambda,n}^{-1}-a)(a_{\lambda,n}^{-1}-b)}{a_{\lambda,n}^{-1}-1}\cdot\frac{1}{a_{\lambda,n}^{-1}-b}}=\arg\sqrt{\frac{(a_{\lambda,n}^{-1}+1)(a_{\lambda,n}^{-1}-a)}{(a_{\lambda,n}^{-1}-1)(a_{\lambda,n}^{-1}-b)}}. \tag{15}$$

Теперь, оценивая (12), (14) и (15) с помощью вытекающих из стремления $\{a_{\lambda,n}\}$ к ±1 по некасательным путям неравенств [8]

$$C_6(1-|a_{k,n}|x)\le|1-a_{k,n}x|\le C_7(1-|a_{k,n}|x), \tag{16}$$

$$-\frac{\pi}{2}+\varphi_0\le\arg\frac{\sqrt{1-a_{k,n}^2}}{1-a_{k,n}x}\le\frac{\pi}{2}-\varphi_0,$$

($\varphi_0>0$ не зависит от n), получим (9), а с ним и лемму. $\square$

Доказательство теоремы. Будем считать, что величина $\varphi_n(\mathfrak{A},k,a)$ равна $m_n=m$, тогда $-1<x_{n,n}<\dots<x_{m+1,n}<a<b<x_{m,n}<\dots<x_{1,n}<1$. Кроме того, пусть i, p и q выбираются из неравенств $x_{i,n}<x<x_{i-1,n}$, $x_{p+1,n}\le(a-1)/2<x_{p,n}$, $x_{q+1,n}\le(b+1)/2<x_{q,n}$.

Рассмотрим случай $i=1,\dots,q$; $k=i+1,\dots,m$, и оценим

$$|l_{k,n}(\mathfrak{M},x)|\le\frac{\sqrt{(1-x_{k,n}^2)(x_{k,n}-a)(x_{k,n}-b)}}{(x-x_{k,n})|\gamma_n(x_{k,n})|}=$$

$$=\frac{|S_n(x_{k-1,n})-S_n(x_{k,n})|\sqrt{(1-x_{k,n}^2)(x_{k,n}-a)(x_{k,n}-b)}}{(x-x_{k,n})|\gamma_n(x_{k,n})|\pi}. \tag{17}$$

Применяя теорему Лагранжа к (17), найдем

$$|l_{k,n}(\mathfrak{M},x)|\le\frac{1}{\pi}\frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{x-x_{k,n}}\cdot Z_k\cdot H_k, \tag{18}$$

где

$$Z_k=\sqrt{\frac{1-x_{k,n}^2}{1-\xi_k^2}},\quad H_k=\left|\frac{\gamma_n(\xi_k)}{\gamma_n(x_{k,n})}\right|\frac{\sqrt{(x_{k,n}-a)(x_{k,n}-b)}}{\sqrt{(\xi_k-a)(\xi_k-b)}},\quad x_{k,n}<\xi_k<x_{k-1,n}.$$

Для оценки

$$Z_k\le\sqrt{\frac{1-x_{k,n}}{1-\xi_k}}=\sqrt{1+\frac{\xi_k-x_{k,n}}{1-\xi_k}} \tag{19}$$

имеем

$$\frac{\xi_k-x_{k,n}}{1-\xi_k}\le\frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{1-\xi_k}\le\frac{\pi\sqrt{(1-\xi_k^2)(\xi_k-a)(\xi_k-b)}}{(1-\xi_k)|\gamma_n(\xi_k)|}, \tag{20}$$

и при $\min((1-b)/2,\,1/2)\ge1-\xi_k\ge1-\max\limits_{1\le\lambda\le n_1}|a_{\lambda,n}|$ правая часть (20) не превосходит

$$\frac{2\pi\sqrt{(\xi_k-a)(\xi_k-b)}}{C_4\sqrt{1-\xi_k}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{|\xi_k-c_{j,n}|\sqrt{1-|a_{j,n}|}}{1-|a_{j,n}|\xi_k}}\le C_8\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{1-|a_{j,n}|}\sqrt{1-\xi_k}}{1-|a_{j,n}|+1-\xi_k}\right)^{-1}\le\frac{C_8}{C_1}. \tag{21}$$

При $1-\xi_k > \min((1-b)/2,\, 1/2)$ получаем

$$Z_k \le \frac{1}{\sqrt{\min\left(\dfrac{1-b}{2}, \dfrac{1}{2}\right)}}. \tag{22}$$

Для оценки Z_k при $0 \le 1-\xi_k \le 1-\max\limits_{1\le\lambda\le n_1} |a_{\lambda,n}|$ выберем θ_1 так, чтобы для $1-\theta_1 \le x \le 1$ выполнялось неравенство

$$f(x) \overset{\mathrm{df}}{=} -(1-x^2)(2x-a-b) + 2x(x-a)(x-b) \ge C_9.$$

Тогда при $x_{1,n} \ge 1-\theta_1$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_{1,n}}} \le \frac{C_{10}}{\sqrt{(1-x_{1,n}^2)(x_{1,n}-a)(x_{1,n}-b)}} = \frac{C_{10}}{\displaystyle\int_{x_{1,n}}^{1} \frac{f(x)dx}{2\sqrt{(1-x^2)(x-a)(x-b)}}} \le \frac{2C_{10}}{C_9\theta_2}, \tag{23}$$

причем $\theta_2 = F(x_{1,n})$

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x-a)(x-b)}}, \quad x \in (b,1).$$

Поскольку F убывает на $(b,1)$ и $S_n(F^{-1}(\theta_2)) - S_n(F^{-1}(0)) = \frac{\pi}{2}$, можно записать $S_n'(F^{-1}(\theta_3))\times$ $\times\frac{\theta_2}{F'(\zeta)} = \frac{\pi}{2}$, или $\theta_2 = \frac{\pi}{2\gamma_n(\zeta)}$, где $\zeta = F^{-1}(\theta_3)$, $x_{1,n} < \zeta < 1$, $0 < \theta_3 < \theta_2$.

Подставляя полученное значение в (23), имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_{1,n}}} \le \frac{2C_{10}\gamma_n(\zeta)}{C_9\pi}, \tag{24}$$

откуда с учетом (4) получаем

$$\frac{\xi_k - x_{k,n}}{1-\xi_k} \le \frac{\pi\sqrt{2(1-a)(1-b)}}{\sqrt{1-x_{1,n}}|\gamma_n(\xi_k)|} \le C_{11}\left|\frac{\gamma_n(\zeta)}{\gamma_n(\xi_k)}\right| \le$$

$$\le \frac{C_{11}C_5}{C_4} \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sqrt{1-|a_{j,n}|}\,|\zeta - c_{j,n}| \Big/ (1-|a_{j,n}|\zeta)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sqrt{1-|a_{j,n}|}\,|\xi_k - c_{j,n}| \Big/ (1-|a_{j,n}|\xi_k)} \le C_{12}\frac{1-a}{\xi_k - b} \le \frac{2C_{12}(1-a)}{b+1} \tag{25}$$

при $\xi_k - b \ge (1-b)/2$. Если же $\xi_k - b < (1-b)/2$ или $x_{1,n} < 1-\theta_1$, то

$$Z_k \le \max\left(\sqrt{\frac{2}{1-b}}, \frac{1}{\sqrt{\theta_1}}\right). \tag{26}$$

Запишем оценку

$$H_k \le (1 + C_{13}B_k)\frac{\sqrt{x_{k,n}-b}}{\sqrt{\xi_k - b}} \cdot \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-b}}, \tag{27}$$

где

$$B_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{1-|a_{j,n}|}\,|x_{k,n}-\xi_k|}{(1-|a_{j,n}|\xi_k)(1-|a_{j,n}|x_{k,n})} \Big/ \sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{1-|a_{j,n}|}\,|x_{k,n}-c_{j,n}|}{1-|a_{j,n}|x_{k,n}}.$$

Предположим сначала, что $x_{k,n} - b \ge \theta_4$, где $\theta_4 > 0$ таково, что при $b \le x \le b+\theta_4 < 1$ справедливо неравенство $f(x) \ge C_9$. Тогда (считая для определенности $b > 0$)

$$B_k\frac{\sqrt{x_{k,n}-b}}{\sqrt{\xi_k - b}} \le \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\sqrt{1-|a_{j,n}|}\,|x_{k,n}-\xi_k|}{(1-|a_{j,n}|x_{k,n})(1-|a_{j,n}|\xi_k)} \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{1-|a_{j,n}|}}{1-|a_{j,n}|x_{k,n}} \cdot \frac{\theta_4}{\sqrt{1-b}}\right) + \frac{\sqrt{(1-b)^3}}{\theta_4 C_6}. \tag{28}$$

Теперь будем оценивать величину

$$\Lambda_{k,j} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{|\xi_k - x_{k,n}|}{1-|a_{j,n}|\xi_k} \le \frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{1-|a_{j,n}|\xi_k} = \frac{\pi\sqrt{(1-\xi_k^2)(\xi_k-a)(\xi_k-b)}}{(1-|a_{j,n}|\xi_k)|\gamma_n(\xi_k)|}. \tag{29}$$

При $0 < 1-\xi_k < 1 - \max\limits_{1\le\lambda\le n_1}|a_{\lambda,n}| < \min((1-b)/2,\ 1/2)$ из (28) получаем

$$|\Lambda_{k,j}| \le \frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{(1-a)(1+b)}\sqrt{1-\xi_k}}{(1-\max\limits_{1\le\lambda\le n_1}|a_{\lambda,n}|)|\gamma_n(\xi_k)|} \le C_{14}\Big/\sum_{j=1}^{n_1}\frac{\sqrt{1-|a_{j,n}|}\sqrt{1-\max\limits_{1\le\lambda\le n_1}|a_{\lambda,n}|}}{1-|a_{j,n}|+1-\max\limits_{1\le\lambda\le n_1}|a_{\lambda,n}|} \le \frac{C_{14}}{C_1}. \tag{30}$$

Аналогично рассматриваются возможности неравенств

$$1-\max_{1\le\lambda\le n_1}|a_{\lambda,n}| \le 1-\xi_k \le \min\Big(\frac{1-b}{2},\ \frac{1}{2}\Big) \quad \text{и} \quad 1-\xi_k > \min\Big(\frac{1-b}{2},\ \frac{1}{2}\Big).$$

Неравенства (27)–(30) означают, что при $x_{k,n}-b \ge \theta_4$

$$H_k \le C_{15}. \tag{31}$$

Пусть теперь $x_{k,n}-b \le \theta_4 \le \xi_k - b$. Тогда в силу (7), (16)

$$\frac{\sqrt{(x_{k,n}-b)(x_{k,n}-a)}}{\sqrt{\xi_k-b}}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{1-|a_{j,n}|}\,|x_{k,n}-\xi_k|}{(1-|a_{j,n}|x_{k,n})|1-a_{j,n}\xi_k|}\Big/\sum_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{1-|a_{j,n}|}\,|x_{k,n}-c_{j,n}|}{1-|a_{j,n}|x_{k,n}} \le$$

$$\le \Big(\sum_{j=1}^{n_1}\frac{\sqrt{1-|a_{j,n}|}\,\Lambda_{k,j}}{1-(b+\theta_4)} + \sum_{j=n_1+1}^{n}\frac{\sqrt{2}\sqrt{1-|a_{j,n}|}}{1-(b+\theta_4)}\Big)\Big/\Big(C_3\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1-|a_{j,n}|}\frac{b-1}{2}\sqrt{\theta_4}\Big),$$

откуда с учетом (27)–(30) снова получаем (31). Аналогично разбираются остальные варианты.

Итак, из (17)–(25) и (31) при $i=1,2,\dots,q$; $k=i+1,i+2,\dots,m$ имеем

$$|l_{k,n}(\mathfrak{M},x)| \le C_{16}\frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{x-x_{k,n}}. \tag{32}$$

Подобным образом найдем, что (32) справедливо и при $i=1,2,\dots,q$; $k=m+2,\dots,n$; $k=i=2,3,\dots,q+1$, кроме того, для $i=3,\dots,q+1$; $k=1,2,\dots,i-2$

$$|l_{k,n}(\mathfrak{M},x)| \le \frac{C_{17}}{i-k-1},$$

а при $k=m+1$

$$|l_{k,n}(\mathfrak{M},x)| \le C_{18}.$$

Из полученных неравенств с учетом соотношения $|l_{1,n}(\mathfrak{M},x)| \le 1+\sum\limits_{k=2}^{n}|l_{k,n}(\mathfrak{M},x)|$ найдем оценку

$$\sum_{k=1}^{n}|l_{k,n}(\mathfrak{M},x)| \le C_{19}\ln(i+1) + 2C_{16}\sum_{\substack{k=i+2\\k\ne m+1}}^{n}\frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{x-x_{k,n}}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что (см. также (24))

$$\sum_{\substack{k=i+2\\k\ne m+1}}^{n}\frac{x_{k-1,n}-x_{k,n}}{x-x_{k,n}} = \sum_{\substack{k=i+2\\k\ne m+1}}^{n}\int_{x_{k,n}}^{x_{k-1,n}}\frac{d\theta}{x-x_{k,n}} \le \sum_{\substack{k=i+2\\k\ne m+1}}^{n}\int_{x_{k,n}}^{x_{k-1,n}}\frac{d\theta}{x-\theta} \le \int_{x_{n,n}}^{x_{i+1,n}}\frac{d\theta}{x-\theta} -$$

$$-\int_{x_{m+1,n}}^{b}\frac{d\theta}{x-\theta} \le \ln\frac{2}{x_{i,n}-x_{i+1,n}} = \ln\frac{2\gamma_n(\xi_{i+1})}{\sqrt{(1-\xi_{i+1}^2)(\xi_{i+1}-a)(\xi_{i+1}-b)}} \le \ln\|\gamma_n\|^2_{C(E)}.$$

Автор глубоко благодарен своему покойному учителю, профессору А.А. Привалову за постановку задачи.

Литература

1. Привалов А.А. *Теория интерполирования функций.* Кн. 1. – Саратов: Изд-во СГУ, 1990. – 230 с.
2. Турецкий А.Х. *Теория интерполирования в задачах.* – Минск: Вышэйш. школа, 1968. – 318 с.
3. Ибрагимов И.И. *Методы интерполяции функций и некоторые их применения.* – М.: Наука, 1971. – 518 с.
4. Уолш Дж.Л.*Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.* – М.: Ин. лит., 1961. – 508 с.
5. Русак В.Н. *Об интерполировании рациональными функциями с фиксированными полюсами* // ДАН БССР. – 1962. – Т. 6. – № 9. – С. 548–550.
6. Ровба Е.А. *Приближение выпуклых функций интерполяционными рациональными функциями с фиксированным числом полюсов* // ДАН БССР. – 1977. – Т. 21. – № 9. – С. 781–783.
7. Ровба Е.А. *О рациональной интерполяции функции* $|x|$ // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1989. – № 5. – С. 39–46.
8. Старовойтов А.П. *О рациональной интерполяции с фиксированными полюсами.* – Ред. журн. “Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук.” – Минск, 1983. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.05.83, № 2735-83.
9. Лукашов А.Л. *О задаче Чебышева-Маркова на двух отрезках.* – Сарат. ун-т. – Саратов, 1989. – 56 с. – Деп. в ВИНИТИ 01.11.89, № 6615-В89.
10. Аптекарев А.И. *Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода* // Матем. сб. – 1984. – Т. 125. – № 2. – С. 231–258.
11. Peherstorfer F. *Orthogonal and Chebyshev polynomials on two intervals* // Acta Math. Hung. – 1990. – V. 55. – № 3–4. – P. 245–278.
12. Peherstorfer F. *Elliptic orthogonal and extremal polynomials* // Proc. London Math. Soc. – 1995. – V. 70. – P. 605–624.
13. Содин М.Л., Юдицкий П.М. *Алгебраическое решение задач Е.И. Золотарева и Н.И. Ахиезера о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – Харьков, 1991. – Вып. 56. – С. 56–64.
14. Бернштейн С.Н. *Собрание сочинений.* Т. 1. *Конструктивная теория функций.* – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 582 с.
15. Kilgore T.A. *A note on optimal interpolation with rational functions* // Acta sci. math. – 1988. – V. 52. – P. 113–116.
16. Привалов И.И. *Введение в теорию функций комплексного переменного.* – 12-е изд. – М.: Наука, 1977. – 444 с.

Саратовский государственный университет

Поступила 25.07.1997