КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Т. 123, кн. 12 *Ученые записки* 1963

А. З. ПЕТРОВ

ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ БИРКГОФА

Как показано автором статьи [2], хорошо известное в общей теории относительности утверждение Биркгофа: „Всякое центрально-симметрическое поле в пустоте — статическое" — неверно и, как общее решение вопроса, вместо него имеет место теорема: *в специальной системе координат общий вид метрики центрально-симметрического поля гравитации в пустоте может быть представлен в виде*:

$$ds^2 = \frac{1}{\psi^2}[e(\gamma^2 dx^{2^2} - dx^{4^2}) - dx^{2^2} - \sin^2 x^2 dx^{3^2}], \tag{1}$$

где функции ψ, γ *зависят только от переменных* x^1, x^4 *и определяются интегро-дифференциальными уравнениями*

$$\psi_1 = \nu\gamma,\ \psi_4^2 = c_1\psi^3 + e\psi^2 + \nu^2,\ \gamma = \psi_4\left(\nu'\int\frac{dx^4}{\psi_4^2} + \lambda\right),\ \left(\psi_i \equiv \frac{\partial\psi^2}{\partial x^i}\right), \tag{2}$$

а $\nu(x^1)$, $\lambda(x^1)$ — *произвольные функции только переменной* x^1; $c_1 = \text{const}$, $e = \pm 1$.

Доказательство этого утверждения было получено при помощи использования теории конформно-приводимых полей тяготения (1) и теории групп движений. В этой статье дается непосредственная проверка этого утверждения и выясняется когда, в частности, из (1) получается метрика Шварцшильда и указывается, при каких условиях на функции ψ, γ и при помощи каких преобразований может быть получено каноническое выражение такой метрики.

§ 1. Уравнения поля в пустоте

Вычисление для метрики (1) дает, что отличные от нуля компоненты тензора кривизны будут иметь вид:

$$R_{1414} = \frac{e}{\psi^2}\left[\frac{\gamma^2\psi_{44}}{\psi} - \gamma\gamma_{44} - \frac{\psi_{11}}{\psi} - \frac{\gamma^2\psi_4^2}{\psi^2} + \frac{\gamma\gamma_4\psi_4}{\psi} + \frac{\psi_1^2}{\psi^2} + \frac{\gamma_1\psi_1}{\gamma\psi}\right],$$

$$R_{2424} = -\frac{1}{\psi^3}\left[\psi_{44} - \frac{\psi_4^2}{\psi} + \frac{\psi_1^2}{\gamma^2\psi}\right],\quad R_{3434} = R_{2424}\cdot\sin^2 x^2;$$

$$R_{2412} = \frac{1}{\psi^3}\left(\psi_{14} - \frac{\gamma_4\psi_1}{\gamma}\right),\ R_{3431} = -R_{2412}\cdot\sin^2 x^2,$$

$$R_{2323} = \frac{e\sin^2 x^2}{\psi^4}\left(\psi_4^2 - \frac{\psi_1^2}{\gamma^2} - e\psi^2\right), \tag{3}$$

$$R_{1212} = \frac{1}{\psi^3}\left[-\psi_{11} + \frac{\psi_1^2}{\psi} + \frac{\gamma_1\psi_1}{\gamma} + \frac{\gamma(\psi\gamma_4 - \gamma\psi_4)\psi_4}{\psi}\right],\quad R_{3131} = R_{1212}\cdot\sin^2 x^2.$$

Отсюда, составляя в бивекторном пространстве (1) λ-матрицу $(R_{ab}-\lambda g_{ab})$ $(a, b=1, \ldots 6)$, найдем, во-первых, что она будет диагональна всегда, т. е. *имеет вещественные элементарные делители и характеристику простого типа* (такие поля всегда будут I типа по классификации автора [1]); кроме того; базисы элементарных делителей (стационарные кривизны) будут иметь вид:

$$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_5=\lambda_6=-\frac{1}{2}\lambda_1=-\frac{1}{2}\lambda_4\equiv e\psi^4 R_{2424}\equiv$$

$$\equiv -e\psi\left[\psi_{44}-\frac{\psi_4^2}{\psi}+\frac{\psi_1^2}{\gamma^2\psi}\right]=-\frac{ec_1}{2}\psi^3,$$

то есть характеристика имеет вид $\{(1\underline{1}\underline{1}1), \underline{(}11)\}$, что отвечает; иными словами, характеристике вида $\{1\,(11), \;\bar{1}\,(\bar{1}\,\bar{1})\}$, когда комплексно-сопряженные базисы совпадают ввиду вещественно-стационарных кривизн.

При вычислении λ-матрицы необходимо использовать уравнения поля $(R_{\alpha\beta}=0)$ и соотношения между компонентами теории кривизны, вытекающие непосредственно из формул (3). Полученный выше факт может быть получен из других соотношений, но в данном случае он следует без труда из (3).

Вычисляя компоненты тензора Риччи при помощи (3) и матрицы

$$(g^{\alpha\beta})=\begin{bmatrix} \frac{e\psi^2}{\gamma^2} & & & \\ & -\psi^2 & & \\ & & -\frac{\psi^2}{\sin^2 x^2} & \\ & & & -e\psi^2 \end{bmatrix},$$

найдем, что из 10 уравнений поля в пустоте

$$R_{\alpha\beta}=0 \tag{4}$$

шесть обращаются в тождества непосредственно или в силу других уравнений, а остальные имеют вид:

$$\begin{gathered} 3\left(\psi_{11}-\frac{\psi_1^2}{\psi}-\frac{\gamma_1\psi_1}{\gamma}-\gamma\gamma_4\psi_4+\frac{\gamma^2\psi_4^2}{\psi}\right)+\gamma\,(\psi\gamma_{44}-\gamma\psi_{44})=0 \\ -\psi_{11}+\frac{3\psi_1^2}{\psi}+\frac{\gamma_1\psi_1}{\gamma}+\gamma^2\psi_{44}-\frac{3\gamma^2}{\psi}\psi_4^2+\gamma\gamma_4\psi_4+e\psi\gamma^2=0 \\ -\psi_{11}+\frac{3\psi_1^2}{\psi}+\frac{\gamma_1\psi_1}{\gamma}+3\gamma^2\psi_{44}-\gamma\psi\gamma_{44}-\frac{3\gamma^2\psi_4^2}{\psi}+\gamma\gamma_4\psi_4=0 \\ \gamma\psi_{14}-\gamma_4\psi_1=0. \end{gathered} \tag{5}$$

Для того, чтобы убедиться, что уравнение поля (5) действительно удовлетворяется тождественно для метрики (1) при условиях (2), напишем дифференциальные следствия (2), которые получаются непосредственно, если учесть, что $\psi_4\neq 0$ (так как $\gamma\neq 0$) и, следовательно, на эту величину можно делить. Эти следствия будут иметь вид:

$$\begin{gathered} \psi_{44}=\frac{3c_1}{2}\psi^2+e\psi;\quad \psi_{11}=\nu'\gamma+\nu\gamma_1,\quad \gamma_4\psi_4=\nu'+\gamma\psi\left(\frac{3c_1}{2}\psi+e\right), \\ \gamma_{44}=\gamma\,(3c_1\psi+e). \end{gathered} \tag{6}$$

После этого, заменяя в (5) при помощи формул (2) и их дифференциальных следствий (6) ψ_1, ψ_{14}, ψ_{11}, ψ_{44}, ψ_4^2, $\psi_4\gamma_4$, γ_{44}, непосредственно придем к тождествам. Таким образом, *всякая метрика* (1) *при усло-*

виях (2) *определяет центрально-симметрическое поле тяготения в пустоте при любых функциях* λ, ν, *постоянной* c_1 *и любом значении* $e = \pm 1$. Тот факт, что метрика (1) при условии (2) определяет наиболее общий вид решения для центрально-симметрического поля в пустоте, показан в работе [2].

§ 2. Статические и псевдо-статические центрально-симметрические поля гравитации в пустоте

В зависимости от того, будет ли e в выражениях (1), (2) равняться плюс или минус единице, мы получим существенные изменения в истолковании координат x^1 и x^4 (как „временной" или „пространственной" координаты). Введем, в связи с этим, следующую терминологию. Метрику типа Шварцшильда, как обычно, будем называть „статической". Инвариантное определение такой метрики заключается в том, что оно допускает вектор Киллинга с нормой большей нуля и допускает вдоль этого вектора дискретную группу зеркальных отображений. В частности, для метрики Шварцшильда (в полярных координатах) это определение будет означать, что метрика допускает группу Ли движений G_4 с операторами

$$\left.\begin{array}{l} G_3 \left\{ \begin{array}{l} \underset{1}{\xi^\alpha} = \cos x^3\, \delta_2^\alpha - \sin x^3 \operatorname{ctg} x^2\, \delta_3^\alpha \\ \underset{2}{\xi^\alpha} = \sin x^3\, \delta_2^\alpha + \cos x^3 \operatorname{ctg} x^2\, \delta_3^\alpha \\ \underset{3}{\xi^\alpha} = \delta_3^\alpha \end{array}\right. \\ \quad\;\; \underset{4}{\xi^\alpha} = \delta_4^\alpha \end{array}\right\} G_4, \tag{7}$$

где подгруппа $G_3 < G_4$. В этой формуле, предполагаем, что x^4 — „временная" координата. Если же x^4 имеет характер „пространственной" координаты, то, производя перенумерацию при помощи подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, мы получим метрику, допускающую также группу G_4 движений, но уже в операторном виде

$$G_4 = \left\{ G_3,\ \underset{4}{\xi^\alpha} \right\} \underset{4}{\xi^\alpha} = \delta_1^\alpha . \tag{8}$$

Такое пространство — время будет нестатическим, и в силу аналогии с (7) будем называть его „псевдо-статическим".

Выясним, когда метрика (1) при условиях (2) будет определять статическую модель вселенной Шварцшильда (случай (7) или же псевдо-статическое пространство — время (8).

Прежде всего нетрудно убедиться, используя условия (2), что метрика (1) тождественно удовлетворяет уравнениям Киллинга

$$\underset{s}{\xi^\alpha} \partial_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\tau} \partial_\beta \underset{s}{\xi^\tau} + g_{\beta\sigma} \partial_\alpha \underset{s}{\xi^\sigma} = 0 \tag{9}$$

(являющимся необходимыми и достаточными условиями того, чтобы вектор $\underset{s}{\xi^\alpha}$ для $g_{\alpha\beta}$ определял движение), если в качестве $\underset{s}{\xi^\alpha}$ взять, во-первых, три вектора (7), входящих в подгруппу G_3, во-вторых, положив $s = 4$,

$$\underset{4}{\xi^\alpha} = -\frac{\nu\psi_4}{\psi_1}\delta_1^\alpha + \nu\delta_4^\alpha \equiv -\frac{\psi_4}{\gamma}\delta_1^\alpha + \nu\delta_4^\alpha . \tag{10}$$

Таким образом, *общее центрально-симметрическое поле в пустоте всегда допускает группу движений* G_4 *с операторами* G_3 *из* (7) *и* (10).

Выясним, когда метрика (1) простым преобразованием координат сводится к метрике Шварцшильда или же к псевдо-статической метрике с операторами (8). Мы увидим, что это будет возможно только при некотором специальном выборе функций $\nu(x^1)$ и $\lambda(x^1)$ и знака $e = \pm 1$.

Допустим, что существует такое преобразование координат, которое переводит метрику (1) в метрику Шварцшильда или же в псевдо-статическую метрику, отвечающую (8). При этом, очевидно, операторы, входящие в G_3 из (7) и (10) должны перейти в операторы, определяемые векторами Киллинга (7) или (8): $x_s f = \underset{s}{\xi^\alpha} \partial_\alpha f$. Так как при этом все векторы, входящие в G_3, сохраняют свой функциональный вид, то неизвестные преобразования координат принадлежат к числу тех, которые сохраняют инвариантными компоненты векторов G_3 (в смысле вида каждой компоненты). Легко убедиться в том, что самый общий вид такого рода преобразований имеет вид:

$$x^{1'} = f(x^1,\ x^4),\quad x^{2'} = x^2 + \mathrm{k}\pi;\quad x^{3'} = x^3 + \mathrm{s}\pi,\quad x^{4'} = \theta(x^1;\ x^4), \tag{11}$$

где f и θ — произвольные функции своих аргументов, а k; s — целые числа.

Следовательно, поставленный выше вопрос сводится к тому, можно ли найти такие функции f и θ, которые бы приводили вектор (10) к виду δ_4^α или δ_1^α, а метрику (1) к метрике Шварцшильда или псевдо-статической метрике. Запишем эти условия, имея в виду; что вследствие (11)

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\sigma}\right) = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & f_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \theta_1 & 0 & 0 & \theta_4 \end{bmatrix};\quad f_1\theta_4 - f_4\theta_1 \neq 0. \tag{12}$$

Так как все вычисления приводятся совершенно аналогично в случаях (7) и (8), то ограничимся далее только рассмотрением случая приведения метрики (1) к метрике Шварцшильда. Потребуем, во-первых, чтобы в новой системе координат $\underset{4}{\xi^{\alpha'}} = \delta_4^{\alpha'}$. В силу (12) получим уравнения, которые приводят к альтернативе:

$$1)\quad \nu \neq 0,\quad f_4 = \frac{\nu\psi_4}{\gamma} f_1,\quad \theta_4 = \frac{\nu\psi_4}{\gamma}\theta_1 + \frac{1}{\nu}; \tag{13}$$

$$2)\quad \nu = 0,\quad \psi_1 = 0,\quad \psi_4^2 = c_1\psi^3 + e\psi^2,\quad \gamma = \lambda\psi_4,\quad \psi_4 \neq 0,\quad \underset{4}{\xi^\alpha} = -\frac{1}{\lambda}\delta_1^\alpha.$$

Рассмотрим сначала первый случай: $\nu \neq 0$. Здесь из условия $\underset{4}{\xi^{\alpha'}} = \delta_4^{\alpha'}$ получим:

$$f_4 = \frac{\nu\psi_4}{\gamma} f_1,\quad \theta_4 = \frac{\nu\psi_4}{\gamma}\theta_1 + \frac{1}{\nu},$$

а метрика должна иметь вид метрики Шварцшильда в полярных координатах:

$$(g_{\alpha'\beta}) = \left\| \begin{matrix} \dfrac{x^{1'}}{2m - x^{1'}} & & & \\ & -x^{1'^2} & & \\ & & -x^{1'^2}\sin^2 x^{2'} & \\ & & & \dfrac{x^{1'} - 2m}{x^{1'}} \end{matrix} \right\| =$$

$$
\equiv \left\| \begin{matrix} \frac{f}{2m-f} & & & \\ & -f^2 & & \\ & & -f^2 \sin^2 x^2 & \\ & & & \frac{f-2m}{f} \end{matrix} \right\| . \tag{14}
$$

Пользуясь формулой

$$
g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^{\beta}} g_{\sigma'\tau'};
$$

придем, в силу (14), к соотношениям:

$$
f = \frac{\overline{e}}{\psi}; \quad \theta_1 = \frac{e\overline{e}\,\nu^2\gamma}{\psi^2 (2m\,\psi - \overline{e})},
$$

$$
\theta_1^2 = \frac{\nu^2\gamma^2}{\psi^4 (2m\,\psi - \overline{e})^2} + \frac{e\overline{e}\,\gamma}{\psi^2 (\overline{e} - 2m\,\psi)}; \tag{15}
$$

$$
\nu^6 \psi_4^4 + [2e\overline{e}\,\nu^2 \psi^2 (2m\,\psi - \overline{e}) - \nu^4]\,\psi_4^2 - e\overline{e}\,\psi^2 (2m\,\psi - \overline{e}) + \frac{\psi^4}{\nu^2} (\overline{e} - 2m\,\psi)^2 = 0,
$$

где $\overline{e} = \pm 1$, но не зависит от значения e. Исключая из (15) θ и имея в виду, что $\psi_4 \neq 0$, используя (2), получим соотношение

$$
\psi^3 - \frac{\overline{e}}{2m} \psi^2 - \frac{e\overline{e}}{2m} = 0,
$$

т. е. $\psi = \text{const}$. Этот вывод невозможен, и; следовательно, предположение (1) отпадает.

Рассматривая случай 2 ($\nu = 0$), придем к выводу, что

$$
f = \frac{\overline{e}}{\psi}, \ \theta = \int \lambda (x^1)\, dx' + b, \quad b = \text{const.} \quad \psi = \psi (x^4), \tag{16}
$$

причем $\left| \frac{dx^{\alpha'}}{dx^{\sigma}} \right| \equiv \theta_1 f_4 \neq 0$. Т. е., *если взять функции f и θ вида* (16) *и наложить требование*

$$
\nu = 0, \quad c_1 = -2e\overline{e}m, \quad e = -1
$$

и затем провести перенумерацию неизвестных переменных вида $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, *то придем к метрике Шварцшильда: утверждение Биркгофа неверно, так как оно имеет место только при частном выборе функции λ и постоянных c_2 и e.*

Рассуждение для псевдо-статической метрики аналогично и приводит к выводу, что такая метрика возможна только при частном выборе функций (2). Мы опускаем эти выкладки, т. к. они могут быть без труда повторены аналогично тому, как это было сделано выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. Физматгиз, 1961.
2. Петров А. З. О теореме Биркгофа. Тематический сборник „Гравитация". Издательство Казанского университета, Казань, 1963.