ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 5 (516)

УДК 514.76

В.В. ШУРЫГИН

ПРЕПЯТСТВИЯ К РАДИАНТНОСТИ ДЛЯ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ НАД АЛГЕБРАМИ ВЕЙЛЯ

В данной работе построены когомологические классы с коэффициентами в некоторых пучках, ассоциированных с n-мерным гладким многообразием $M_n^{\mathbf{A}}$ над локальной алгеброй Вейля $\mathbf{A}$, препятствующие существованию атласа на $M_n^{\mathbf{A}}$ с функциями перехода, являющимися $\mathbf{A}$-продолжениями вещественных диффеоморфизмов. В случае полного многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ тривиальность построенных классов эквивалентна $\mathbf{A}$-диффеоморфности многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ расслоению $\mathbf{A}$-скоростей некоторого вещественного многообразия M_n.

1. Введение

Коммутативные ассоциативные алгебры широко используются в дифференциальной геометрии начиная с работ А.П. Котельникова [1], Э. Штуди [2], В. Бляшке [3], П.А. Широкова [4]. Под влиянием работ А.П. Нордена (см., напр., [5]–[7]), в которых алгебры комплексных, двойных и дуальных чисел применялись при изучении биаксиальных, биаффинных и бипланарных пространств, линейчатой геометрии неевклидовых пространств, геометрия гладких многообразий над алгебрами становится интенсивно развивающимся научным направлением. Исследованию геометрии пространств над произвольными коммутативными ассоциативными алгебрами и их вещественных реализаций посвящены работы А.П. Широкова [8], [9], В.В. Вишневского [10], Г.И. Кручковича [11] и других авторов (ссылки на обширную литературу можно найти в работах [9], [10], а также в [12]).

А.П. Широковым [9] были обнаружены структуры гладких многообразий над локальными алгебрами на касательных расслоениях и расслоениях $\mathbf{A}$-близких точек в смысле А. Вейля [13], [14]. Гладкое многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ над локальной алгеброй $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$-гладкое многообразие) называется радиантным, если оно допускает атлас, согласованный с $\mathbf{A}$-гладкой структурой, преобразования координат которого являются $\mathbf{A}$-продолжениями вещественных диффеоморфизмов, т. е. имеют локально такой же вид, как преобразования координат на расслоениях Вейля. В [15] было доказано, что полное радиантное $\mathbf{A}$-гладкое многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ изоморфно в категории $\mathbf{A}$-гладких многообразий расслоению $\mathbf{A}$-скоростей Вейля $T^{\mathbf{A}}M_n$ некоторого вещественного многообразия M_n. Этот результат представляет собой обобщение на случай произвольной локальной алгебры теоремы Ф. Брикелла и Р.С. Кларка ([16], теорема 5), утверждающей, что полная близко касательная структура на гладком многообразии изоморфна стандартной почти касательной структуре некоторого касательного расслоения. Для случая p-касательных структур (соответствующих алгебрам высоты 1) аналогичная теорема была доказана М. де Леоном, И. Мендесом и М. Сальгадо [17].

В данной работе построены когомологические классы с коэффициентами в некоторых пучках, ассоциированных с $M_n^{\mathbf{A}}$ (в частности, с коэффициентами в пучке ростков проектируемых сечений расслоения $T_{\mathrm{tr}}^{\mathbf{A}}M_n^{\mathbf{A}}$ трансверсальных $\mathbf{A}$-скоростей на $M_n^{\mathbf{A}}$ по отношению к каноническому слоению), являющиеся препятствиями для радиантности $M_n^{\mathbf{A}}$. В случае, когда многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ является полным, тривиальность этих когомологических классов эквивалентна $\mathbf{A}$-диффеоморфности многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ расслоению $\mathbf{A}$-скоростей $T^{\mathbf{A}}M_n$ некоторого вещественного многообразия M_n. Построенные когомологические классы могут рассматриваться как обобщения классов, являющихся препятствиями к радиантности аффинных многообразий, найденными У. Голдманом и М.У. Хиршем в [18].

2. Предварительные сведения

Конечномерная коммутативная ассоциативная $\mathbf{R}$-алгебра $\mathbf{A}$ с единицей называется локальной в смысле А. Вейля или, кратко, алгеброй Вейля [13], [14], если ее радикал (множество нильпотентных элементов) $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}) = \mathring{\mathbf{A}}$ является единственным максимальным идеалом и фактор-алгебра $\mathbf{A}/\mathring{\mathbf{A}}$ изоморфна $\mathbf{R}$. Одномерное подпространство в алгебре Вейля $\mathbf{A}$, натянутое на ее единицу $1_{\mathbf{A}}$, является подалгеброй, изоморфной $\mathbf{R}$. Отождествляя эту подалгебру с $\mathbf{R}$, а $1_{\mathbf{A}}$ с $1 \in \mathbf{R}$, будем представлять алгебру $\mathbf{A}$ в виде полупрямой суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \oplus \mathring{\mathbf{A}}. \tag{1}$$

В соответствии с разложением (1) элемент $X \in \mathbf{A}$ представляется в виде $X = x + \mathring{X}$, где $x \in \mathbf{R}$, $\mathring{X} \in \mathring{\mathbf{A}}$. Символом $\pi_0^q : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ обозначается канонический эпиморфизм, отображающий X в x. Пусть $(\mathring{\mathbf{A}})^r$ — r-я степень идеала $\mathring{\mathbf{A}}$. Размерность N факторалгебры $\mathring{\mathbf{A}}/(\mathring{\mathbf{A}})^2$ называется шириной алгебры $\mathbf{A}$. Натуральное число q, определяемое соотношениями $(\mathring{\mathbf{A}})^q \neq 0$, $(\mathring{\mathbf{A}})^{q+1} = 0$, называется высотой алгебры $\mathbf{A}$. Алгебра Вейля ширины N и высоты q изоморфна факторалгебре алгебры $\mathbf{R}[[t^1, \ldots, t^N]]$ формальных степенных рядов от N переменных $t^1, \ldots, t^N$ с коэффициентами в $\mathbf{R}$. Она также изоморфна факторалгебре алгебры $\mathbf{R}(N, q) = \mathbf{R}[t^1, \ldots, t^N; q]$ срезанных многочленов степени $\leq q$ от N переменных. Для алгебры $\mathbf{R}(1, 1)$, называемой алгеброй дуальных чисел, будем использовать обозначение $\mathbf{R}(\varepsilon)$ (в [14] эта алгебра обозначается символом $\mathbf{D}$).

Эпиморфизм алгебр $\pi_0^q : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ индуцирует эпиморфизм модулей n-строк $\pi_0^q : \mathbf{A}^n \to \mathbf{R}^n$, который для простоты обозначается тем же символом π_0^q. Эпиморфизм $\pi_0^q : \mathbf{A}^n \to \mathbf{R}^n$ определяет слоение $\mathring{\mathcal{F}}$ $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{A}^n$ на классы вычетов по модулю $\mathring{\mathbf{A}}^n$, называемое *каноническим* $\mathring{\mathbf{A}}^n$-*слоением.*

Пусть $U \subset \mathbf{A}^n$ — открытое множество. Гладкое отображение $\Phi : U \to \mathbf{A}^k$ называется $\mathbf{A}$-гладким, если касательное отображение $T_X\Phi : T_X U \cong \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^k \cong T_{\Phi(X)}\mathbf{A}^k$ $\mathbf{A}$-линейно при всех $X \in U$. Если гладкое отображение $\varphi : U \to \mathbf{A}^k$ является базовым (проектируемым) [19] по отношению к каноническому $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоению, то формулой

$$Y^i = \varphi^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^i}{Dx^p} \mathring{X}^p, \tag{2}$$

где $i = 1, \ldots, k$, $p = (p_1 \ldots, p_n)$ — мультииндекс длины n, а $\mathring{X}^p = (\mathring{X})^{p_1} \cdots (\mathring{X})^{p_n}$, задается $\mathbf{A}$-гладкое отображение $\Phi : U \to \mathbf{A}^k$. Более того, всякое $\mathbf{A}$-гладкое отображение $\Phi : U \to \mathbf{A}^k$ имеет вид (2) для некоторых базовых функций $\varphi^i : U \to \mathbf{A}$, а если U — простое открытое множество [19] для канонического $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоения, то $\mathbf{A}$-гладкое отображение $\Phi : U \to \mathbf{A}^k$ единственным образом продолжается до $\mathbf{A}$-гладкого отображения $\widetilde{\Phi} : (\pi_0^q)^{-1}(\pi_0^q(U)) \to \mathbf{A}^k$ такого, что $\varphi = (\widetilde{\Phi}|\pi_0^q(U)) \circ \pi_0^q$ (см. [20]).

Множество $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов ($\mathbf{A}$-гладких диффеоморфизмов) между областями $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{A}^n$ образует псевдогруппу, обозначаемую символом $\Gamma(\mathbf{A}^n)$. Всякий $\mathbf{A}$-диффеоморфизм, принадлежащий $\Gamma(\mathbf{A}^n)$, задается уравнениями вида (2) при $n = k$. Структура $\mathbf{A}$-гладкого многообразия, моделируемого $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n$, на вещественном многообразии M задается $\Gamma(\mathbf{A}^n)$-атласом, т.е. атласом $\{h_\alpha : U_\alpha \subset M \to U'_\alpha \subset \mathbf{A}^n\}_{\alpha \in A}$, карты которого принимают значения в $\mathbf{A}^n$, а преобразования координат $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ принадлежат псевдогруппе $\Gamma(\mathbf{A}^n)$. $\Gamma(\mathbf{A}^n)$-многообразие называется *n-мерным* $\mathbf{A}$-*гладким многообразием* [20]. Пусть $M_n^{\mathbf{A}}$ — n-мерное $\mathbf{A}$-гладкое многообразие. Из уравнений (2) следует, что всякий $\mathbf{A}$-диффеоморфизм $\Phi : U \to V$ из $\Gamma(\mathbf{A}^n)$ отображает слои канонического слоения $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ на $U \subset \mathbf{A}^n$ на слои $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ на $V \subset \mathbf{A}^n$. Таким образом, слоение $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ индуцирует слоение на многообразии $M_n^{\mathbf{A}}$, также называемое *каноническим* $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-*слоением*. Для обозначения этого слоения будем использовать символ $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$. Естественная структура n-мерного $\mathbf{A}$-гладкого многообразия возникает на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}M_n$ $\mathbf{A}$-скоростей [14], [20], [21] на вещественном гладком n-мерном многообразии M_n.

Пусть $M_n^{\mathbf{A}}$ и $W_k^{\mathbf{A}}$ — два $\mathbf{A}$-гладких многообразия. Гладкое отображение $f : M_n^{\mathbf{A}} \to W_k^{\mathbf{A}}$ называется $\mathbf{A}$-*гладким*, если в локальных $\mathbf{A}$-координатах на многообразиях $M_n^{\mathbf{A}}$ и $W_k^{\mathbf{A}}$ оно задается уравнениями вида (2). $\mathbf{A}$-гладкие многообразия и $\mathbf{A}$-гладкие отображения образуют категорию, обозначаемую символом $\mathbf{A}$-$\mathcal{M}an$.

Ограничения $\mathbf{A}$-диффеоморфизма $\Phi \in \Gamma(\mathbf{A}^n)$ на слои канонического $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-слоения на $\mathbf{A}^n$ задаются уравнениями вида

$$\overset{\circ}{Y}{}^i = \sum_{|p|=0}^{q} \varphi_p^i \overset{\circ}{X}{}^p, \quad \varphi_p^i \in \mathbf{A}, \quad \varphi_0^i = \overset{\circ}{Y}{}_0^i \in \overset{\circ}{\mathbf{A}}, \quad \det(\varphi_j^i) \notin \overset{\circ}{\mathbf{A}}. \tag{3}$$

Множество всех диффеоморфизмов $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n \to \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$ вида (3) образует группу Ли $D_n(\mathbf{A})$, называемую $\mathbf{A}$-аффинной дифференциальной группой [21]. Отсюда следует, что каждый слой канонического $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-слоения на $M_n^{\mathbf{A}}$ обладает естественной структурой (X, G)-многообразия в смысле У. Терстона [22], [23] для $X = \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$ и $G = D_n(\mathbf{A})$, а само многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ несет на себе структуру тангенциального $(\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n, D_n(\mathbf{A}))$-слоения (см. в этой связи работы [24] и [25], посвященные теории тангенциальных (X, G)-слоений). В дальнейшем $(\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n, D_n(\mathbf{A}))$-многообразия будем называть $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-многообразиями.

(X, G)-многообразие M называется полным, если развертывающее отображение $D : \widetilde{M} \to X$ является накрытием [22], [25]. Многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ называется полным, если слои его канонического слоения $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ являются полными $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-многообразиями.

Пусть $\pi_0^q \oplus \pi_0^q$ — прямая сумма двух экземпляров канонического эпиморфизма $\pi_0^q : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$, а $\Delta : \mathbf{R} \ni x \mapsto (x, x) \in \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ — диагональное вложение. Алгебра Вейля $\widehat{\mathbf{A}}$ определяется как обратный образ диагонали $\Delta(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ по отношению к эпиморфизму $\pi_0^q \oplus \pi_0^q$. Образ $\Delta(\mathbf{A})$ алгебры $\mathbf{A}$ при диагональном вложении $\Delta : \mathbf{A} \to \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}$ содержится в $\widehat{\mathbf{A}}$. Пусть $\widehat{\Delta} : \mathbf{A} \to \widehat{\mathbf{A}}$ — соответствующее вложение алгебры $\mathbf{A}$ в $\widehat{\mathbf{A}}$. Имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \longrightarrow \overset{\circ}{\mathbf{A}} \oplus \overset{\circ}{\mathbf{A}} \xrightarrow{i} \widehat{\mathbf{A}} \xrightarrow{p} \mathbf{R} \longrightarrow 0. \tag{4}$$

Пусть p_k $(k = 1, 2)$ — проекция алгебры $\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}$ на k-е прямое слагаемое, а i_k — вложение идеала $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$ в $\overset{\circ}{\mathbf{A}} \oplus \overset{\circ}{\mathbf{A}}$ как k-го прямого слагаемого. Для простоты композицию $p_k \circ i : \widehat{\mathbf{A}} \to \mathbf{A}$ отображения p_k и вложения $i : \widehat{\mathbf{A}} \to \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}$ будем обозначать одним символом p_k. Аналогично, композицию $i \circ i_k : \overset{\circ}{\mathbf{A}} \to \widehat{\mathbf{A}}$, где i — вложение из точной последовательности (4), будем обозначать символом i_k. Теми же символами p_k и i_k будем обозначать соответствующие отображения модулей $p_k : \widehat{\mathbf{A}}{}^n \to \mathbf{A}^n$ и $i_k : \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n \to \widehat{\mathbf{A}}{}^n$. Вложение $\widehat{\Delta} : \mathbf{A} \to \widehat{\mathbf{A}}$ позволяет рассматривать алгебру $\mathbf{A}$ как подалгебру в $\widehat{\mathbf{A}}$. Разложение (1) для алгебры $\widehat{\mathbf{A}}$ имеет вид

$$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{R} \oplus \overset{\circ}{\widehat{\mathbf{A}}} = \mathbf{R} \oplus (\overset{\circ}{\mathbf{A}} \oplus \overset{\circ}{\mathbf{A}}) \quad \widehat{X} = x + \overset{\circ}{X} + \overset{*}{X}, \tag{5}$$

а умножение элементов осуществляется по правилу

$$(x + \overset{\circ}{X} + \overset{*}{X}) \cdot (y + \overset{\circ}{Y} + \overset{*}{Y}) = xy + (x\overset{\circ}{Y} + y\overset{\circ}{X} + \overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}) + (x\overset{*}{Y} + y\overset{*}{X} + \overset{*}{X}\overset{*}{Y}).$$

Вложение $\widehat{\Delta} : \mathbf{A} \to \widehat{\mathbf{A}}$ индуцирует вложение $\widehat{\Delta}^n : \mathbf{A}^n \to \widehat{\mathbf{A}}^n$. Будем отождествлять $\mathbf{A}^n$ с $\widehat{\Delta}^n(\mathbf{A}^n) \subset \widehat{\mathbf{A}}^n$. Тогда $\mathbf{A}$-гладкое отображение $\Phi : U \to \mathbf{A}^k$, задаваемое уравнениями (2), можно единственным образом продолжить до $\widehat{\mathbf{A}}$-гладкого отображения $\widehat{\Phi} : p_1^{-1}(U) \subset \widehat{\mathbf{A}}^n \to \widehat{\mathbf{A}}^k$ такого, что $\widehat{\Phi}|\widehat{\Delta}^n(U) = \Phi$ (здесь $U = \widehat{\Delta}^n(U) \subset \widehat{\mathbf{A}}^n$). Отображение $\widehat{\Phi}$ имеет вид

$$Y^i = \widehat{\varphi}^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \widehat{\varphi}^i}{Dx^p} \mathring{\widehat{X}}^p,$$

где $\widehat{\varphi}^i = \widehat{\Delta} \circ \varphi^i \circ p_1 : p_1^{-1}(U) \to \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$, $\{x^i + \mathring{\widehat{X}}^i\} \in p_1^{-1}(U)$, $\mathring{\widehat{X}}^i \subset \mathring{\mathbf{A}} \oplus \mathring{\mathbf{A}}$.

3. Радиантные $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразия и A-гладкие многообразия

Пусть $\Gamma(\mathring{\mathbf{A}}^n)$ — псевдогруппа диффеоморфизмов между открытыми подмножествами в $\mathbf{A}$-модуле $\mathring{\mathbf{A}}^n$, порождаемая группой Ли $D_n(\mathbf{A})$, т. е. диффеоморфизмов, имеющих локально вид (3):

$$\mathring{Y}^i = \sum_{|p|=0}^{q} \varphi_p^i \mathring{X}^p, \tag{6}$$

где φ_p^i — $\mathbf{A}$-значные локально постоянные функции, а φ_0^i — $\mathring{\mathbf{A}}$-значные локально постоянные функции. По определению (см. § 2) $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразие — это гладкое многообразие, снабженное максимальным атласом, карты которого принимают значения в $\mathring{\mathbf{A}}^n$, а функции склейки принадлежат псевдогруппе $\Gamma(\mathring{\mathbf{A}}^n)$. $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразия при $n = 0, 1, 2, \ldots$ образуют категорию $\mathring{\mathbf{A}}$-$\mathcal{M}an$, морфизмами в которой являются отображения, локально (в картах $\mathring{\mathbf{A}}^n$-атласов) имеющие уравнения вида (6).

В случае алгебры дуальных чисел $\mathbf{R}(\varepsilon)$ псевдогруппа $\Gamma(\mathring{\mathbf{R}}(\varepsilon)^n)$ является псевдогруппой аффинных преобразований

$$\dot{y}^i = \varphi_j^i \dot{x}^j + \varphi_0^i,$$

а категория $\mathring{\mathbf{R}}(\varepsilon)$-$\mathcal{M}an$ представляет собой категорию аффинных многообразий. Аффинное многообразие M_n называется *радиантным* [18], если его аффинная структура редуцируется к линейной, т. е. если максимальный атлас аффинного многообразия на M_n обладает податласом с линейными (однородными) преобразованиями координат.

Группа Ли $D_n(\mathbf{A})$ является полупрямым произведением $D_n(\mathbf{A}) = G_n^q \times \mathring{D}_n(\mathbf{A})$ дифференциальной группы G_n^q и некоторого нормального делителя $\mathring{D}_n(\mathbf{A})$ [26]. Дифференциальная группа G_n^q, рассматриваемая как множество диффеоморфизмов вида (6) с $\varphi_p^i \in \mathbf{R}$, $\varphi_0^i = 0$, является подгруппой в $D_n(\mathbf{A})$. $\mathbf{A}$-гладкий росток $\Phi : (\mathbf{A}^n, 0) \to (\mathbf{A}^n, \mathring{Y}_0)$ является $\mathbf{A}$-продолжением ростка $\varphi = \Phi|(\mathbf{R}^n, 0)$. Относя элементу $g \in D_n(\mathbf{A})$, определяемому ростком φ, элемент $\overline{g} = \tau(g) \in G_n^q$, определяемый ростком $\overline{\varphi} = \pi_0^q \circ \varphi : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$, получим эпиморфизм групп Ли

$$\tau : D_n(\mathbf{A}) \to G_n^q. \tag{7}$$

Ядро этого эпиморфизма $\ker \tau = \mathring{D}_n(\mathbf{A})$ состоит из элементов группы $D_n(\mathbf{A})$, определяемых ростками $\varphi : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{A}^n, \mathring{Y}_0)$, удовлетворяющими условию $\pi_0^q \circ \varphi = \mathrm{id} : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$.

Подгруппа $G_n^q \subset D_n(\mathbf{A})$ порождает подпсевдогруппу $\Gamma(\mathring{\mathbf{A}}^n)_{\mathrm{rad}} \subset \Gamma(\mathring{\mathbf{A}}^n)$, состоящую из диффеоморфизмов между открытыми подмножествами в $\mathring{\mathbf{A}}^n$, локально имеющими вид (6) с $\varphi_p^i \in \mathbf{R}$, $\varphi_0^i = 0$. Следующее определение обобщает понятие радиантности на $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразия.

Определение 1. $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразие $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ называется радиантным, если в максимальном атласе, задающем на $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ структуру $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразия, найдется податлас с функциями склейки, принадлежащими псевдогруппе $\Gamma(\mathring{\mathbf{A}}^n)_{\mathrm{rad}}$.

Таким образом, $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразие радиантно, если оно изоморфно в категории $\mathring{\mathbf{A}}$-$\mathcal{M}an$ некоторому $(\mathring{\mathbf{A}}^n, G_n^q)$-многообразию.

В [15] была доказана теорема, которую в терминах радиантности можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Полное связное радиантное $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразие $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ изоморфно в категории $\mathring{\mathbf{A}}$-$\mathcal{M}an$ многообразию $\mathring{\mathbf{A}}^n$.*

Псевдогруппа $\Gamma(\mathbf{A}^n)$ $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов между открытыми подмножествами $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{A}^n$ имеет подпсевдогруппу $\Gamma(\mathbf{A}^n)_{\mathrm{rad}}$, состоящую из $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов (2) с $\mathbf{R}$-значными функциями φ.

Определение 2. $\mathbf{A}$-гладкое многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ называется радиантным, если в максимальном атласе, задающем на $M_n^{\mathbf{A}}$ структуру $\mathbf{A}$-гладкого многообразия, найдется податлас с функциями склейки, принадлежащими псевдогруппе $\Gamma(\mathbf{A}^n)_{\mathrm{rad}}$.

Примером радиантного $\mathbf{A}$-гладкого многообразия является расслоение $\mathbf{A}$-скоростей Вейля $T^{\mathbf{A}}M_n$ с $\Gamma(\mathbf{A}^n)_{\mathrm{rad}}$-атласом, индуцированным атласом многообразия M_n. Другими примерами могут служить многообразия Хопфа $(\mathbf{A}^n \setminus \{0\})/G$, где G — бесконечная циклическая группа преобразований $\mathbf{A}$-модуля $\mathbf{A}^n$, порождаемая линейным оператором

$$\mathbf{A}^n \ni \{X^1, \dots, X^n\} \mapsto \{\alpha_1 X^1, \dots, \alpha_n X^n\} \in \mathbf{A}^n,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — набор вещественных чисел, удовлетворяющих условию $\alpha_i > 1$.

Для алгебры дуальных чисел $\mathbf{R}(\varepsilon)$ понятие радиантного $\mathbf{R}(\varepsilon)$-гладкого многообразия эквивалентно понятию многообразия с интегрируемой почти касательной структурой, редуцируемой к близко касательной структуре в смысле Ф. Брикелла и Р.С. Кларка [16]. В [16] была доказана теорема, утверждающая, что полная близко касательная структура на многообразии изоморфна стандартной почти касательной структуре некоторого касательного расслоения. В [17] эта теорема была обобщена на случай интегрируемых p-почти касательных структур, а именно, было доказано, что полная близко p-касательная структура на многообразии изоморфна стандартной p-почти касательной структуре расслоения N^1-скоростей Эресмана. В [15] вышеуказанная теорема была обобщена на случай произвольной локальной алгебры, а именно, была доказана теорема, которую в терминах радиантности можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Полное радиантное $\mathbf{A}$-гладкое многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ изоморфно в категории $\mathbf{A}$-$\mathcal{M}an$ расслоению $\mathbf{A}$-скоростей $T^{\mathbf{A}}M_n$ некоторого вещественного многообразия M_n.*

4. Препятствия к радиантности $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразия

Данный раздел работы посвящен построению когомологических классов, являющихся препятствиями к радиантности $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразия $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$. В случае полного многообразия $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ эти классы являются препятствиями для изоморфности $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ (в категории $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразий) $\mathbf{A}$-модулю $\mathring{\mathbf{A}}^n$. Для $\mathring{\mathbf{R}}(\varepsilon)^n$-многообразия $M_n^{\mathring{\mathbf{R}}(\varepsilon)}$ построенные классы совпадают с препятствиями к радиантности аффинных многообразий, построенными в [18].

Рассмотрим $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-многообразие $M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ с $(\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n, D_n(\mathbf{A}))$-атласом $\{h_\alpha : U_\alpha \subset M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}} \to U'_\alpha \subset \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n\}_{\alpha\in A}$. Координатные преобразования $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ имеют следующий вид (см. (6)):

$$\overset{\circ}{X}{}^i_\alpha = \sum_{|p|=0}^{q} a^i_p(\alpha,\beta)\overset{\circ}{X}{}^p_\beta, \tag{8}$$

где a^i_p и a^i_0 — локально постоянные функции со значениями в $\mathbf{A}$ и $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$ соответственно. С многообразием $M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ естественно ассоциируются следующие два локально тривиальных расслоения со стандартным слоем $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$ и структурными группами $D_n(\mathbf{A})$ и G_n^q соответственно:

1) $\pi : OM_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}} \to M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ с атласом $\{H_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U'_\alpha \times \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n\}_{\alpha\in A}$, функции перехода которого $H_\alpha \circ H_\beta^{-1}$ имеют вид

$$\{\overset{\circ}{X}{}^i_\beta, \overset{*}{X}{}^i_\beta\} \mapsto \Big\{\overset{\circ}{X}{}^i_\alpha = \sum_{|p|=0}^{q} a(\alpha,\beta)^i_p \overset{\circ}{X}{}^p_\beta,\ \ \overset{*}{X}{}^i_\alpha = \sum_{|p|=0}^{q} a(\alpha,\beta)^i_p \overset{*}{X}{}^p_\beta\Big\}, \tag{9}$$

и

2) $\widetilde{\pi} : \widetilde{O}M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}} \to M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ с атласом $\{\widetilde{H}_\alpha : \widetilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \to U'_\alpha \times \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n\}_{\alpha\in A}$, функции перехода которого $\widetilde{H}_\alpha \circ \widetilde{H}_\beta^{-1}$ имеют вид

$$\{\overset{\circ}{X}{}^i_\beta, \overset{*}{X}{}^i_\beta\} \mapsto \Big\{\overset{\circ}{X}{}^i_\alpha = \sum_{|p|=0}^{q} a(\alpha,\beta)^i_p \overset{\circ}{X}{}^p_\beta,\ \ \overset{*}{X}{}^i_\alpha = \sum_{|p|=0}^{q} \overline{a}(\alpha,\beta)^i_p \overset{*}{X}{}^p_\beta\Big\}, \tag{10}$$

где $\overline{a}^i_p = \pi^q_0(a^i_p)$.

Расслоения $OM_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ и $\widetilde{O}M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ будем называть, соответственно, *каноническим соприкасающимся* и *каноническим радиантным* расслоениями $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-многообразия $M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$.

Имеются канонические сечения $\sigma : M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}} \to OM_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ и $\widetilde{\sigma} : M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}} \to \widetilde{O}M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ этих расслоений, которые в локальных координатах задаются соответственно уравнениями $\overset{*}{X}{}^i_\alpha = \overset{\circ}{X}{}^i_\alpha$ и $\overset{*}{X}{}^i_\alpha = 0$. В последующем будем отождествлять многообразие $M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ с образом $\sigma(M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}) \subset OM_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ сечения σ.

Уравнения $d\overset{*}{X}{}^i_\alpha = 0$ определяют локально плоские связности Γ и $\widetilde{\Gamma}$ в расслоениях $OM_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ и $\widetilde{O}M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ соответственно. Эти связности порождают канонические слоения на многообразиях $OM_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ и $\widetilde{O}M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$. Если многообразие $M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ полное, то его универсальное накрывающее пространство $\widetilde{M}_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ изоморфно $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$. В этом случае расслоение $OM_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ изоморфно фундаментальному группоиду $\Pi(M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}})$ многообразия $M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ с проекцией π_0, относящей гомотопическому классу $[\gamma]$ пути $\gamma : [0,1] \to M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ его начальную точку $\gamma(0)$, и связность Γ является связностью, порождаемой связностью Гуревича [27] на пространстве $\Omega(M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}})$ путей многообразия $M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$: результатом параллельного перенесения элемента $[\gamma]$ вдоль кривой $\delta : [0,1] \to M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ с началом $\delta(0) = \gamma(0)$ является элемент $[\delta^{-1} * \gamma]$. В этой интерпретации сечение σ относит точке $x \in M_n^{\overset{\circ}{\mathbf{A}}}$ гомотопический класс постоянного пути $\gamma(t) \equiv x$.

Пусть E является $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-многообразием, изоморфным $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$, и $h : E \to \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$ — глобальная карта на E. Определим группу $D_n(E)$ $\mathbf{A}$-аффинных преобразований многообразия E следующим образом: диффеоморфизм $\varphi : E \to E$ принадлежит $D_n(\mathbf{A})$, если $h^{-1} \circ \varphi \circ h$ принадлежит $D_n(\mathbf{A})$. Таким же образом определяется подгруппа $\overset{\circ}{D}_n(E)$, соответствующая нормальному делителю $\overset{\circ}{D}_n(\mathbf{A})$. Элементы из $\overset{\circ}{D}_n(E)$ будем называть $\overset{\circ}{D}_n$-преобразованиями. Указанные определения не зависят от выбора глобальной карты h. Обозначим символами $\overset{\circ}{D}(O\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}})$ и $\overset{\circ}{D}(\widetilde{O}\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}})$ расслоения $\overset{\circ}{D}_n$-преобразований слоев расслоений $O\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{O}\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}$ соответственно. Канонические локально плоские связности в $O\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{O}\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}$ индуцируют локально плоские связности и соответствующие слоения на $\overset{\circ}{D}(O\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}})$ и $\overset{\circ}{D}(\widetilde{O}\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}})$. Пучки ростков плоских сечений расслоений $\overset{\circ}{D}(O\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}})$ и $\overset{\circ}{D}(\widetilde{O}\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}})$ обозначим соответственно символами $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ и $\overset{\circ}{\widetilde{\mathcal{D}}}$. В дальнейшем будет рассматриваться также пучок ростков локально постоянных функций на многообразии $\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}$ со значениями в группе $D_n(\mathbf{A})$. Для простоты этот пучок будет обозначаться тем же символом $D_n(\mathbf{A})$.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in B}$ — покрытие многообразия $\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}$ областями определения $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-карт (U_α, h_α). Относя каждой упорядоченной паре $\alpha, \beta \in B$ такой, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, локально постоянную функцию $\lambda_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to D_n(\mathbf{A})$, соответствующую $\mathbf{A}$-аффинному преобразованию $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ с уравнениями (8), получим коцикл λ_U, который определяет когомологический класс $[\lambda]_\mathcal{U} \in H^1(\mathcal{U}, D_n(\mathbf{A}))$ [28]. Аналогично, относя паре $\alpha, \beta \in B$ локально постоянную функцию $\widetilde{\lambda}_{\alpha\beta} = \tau \circ \lambda_{\alpha\beta}$, где $\tau : D_n(\mathbf{A}) \to G_n^q$ — естественный эпиморфизм (7) (функция $\widetilde{\lambda}_{\alpha\beta}$ соответствует $\mathbf{A}$-аффинному преобразованию, задаваемому второй группой уравнений (10)), получим когомологический класс $[\widetilde{\lambda}]_\mathcal{U} \in H^1(\mathcal{U}, D_n(\mathbf{A}))$. Эти классы $[\lambda]_\mathcal{U}$ и $[\widetilde{\lambda}]_\mathcal{U}$ не зависят от выбора $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-координат на областях покрытия $\mathcal{U}$. Действительно, если отображения $\overset{*}{h}_\alpha = g_\alpha \circ h_\alpha$, где $g_\alpha : U_\alpha \to D_n(\mathbf{A})$ — локально постоянные функции, задают другие $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-координаты на областях покрытия $\mathcal{U}$, то выполняются соотношения $\lambda^*_{\alpha\beta} = g_\alpha \circ \lambda_{\alpha\beta} \circ g_\beta^{-1}$ и $\widetilde{\lambda}^*_{\alpha\beta} = \widetilde{g}_\alpha \circ \widetilde{\lambda}_{\alpha\beta} \circ \widetilde{g}_\beta^{-1}$, где $\widetilde{g}_\alpha = \tau \circ g_\alpha$. Отнесем каждой упорядоченной паре $\alpha, \beta \in B$ такой, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, сечения $\varphi_{\alpha\beta}$ и $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}$ расслоений $\overset{\circ}{D}(OM)$ и $\overset{\circ}{D}(\widetilde{O}M)$ над пересечением $U_\alpha \cap U_\beta$, определяемые соответственно соотношениями

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = H_{\beta,x}^{-1} \circ \lambda_{\beta\alpha} \circ \widetilde{\lambda}_{\alpha\beta} \circ H_{\beta,x} = H_{\alpha,x}^{-1} \circ \widetilde{\lambda}_{\alpha\beta} \circ H_{\beta,x} \tag{11}$$

и

$$\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}(x) = \widetilde{H}_{\beta,x}^{-1} \circ \widetilde{\lambda}_{\beta\alpha} \circ \lambda_{\alpha\beta} \circ \widetilde{H}_{\beta,x} = \widetilde{H}_{\alpha,x}^{-1} \circ \lambda_{\alpha\beta} \circ \widetilde{H}_{\beta,x}, \tag{12}$$

где $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $H_{\alpha,x} = H_\alpha|(\pi^{-1}(x) : \pi^{-1}(x)) \to \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$, $\widetilde{H}_{\alpha,x} = \widetilde{H}_\alpha|(\widetilde{\pi}^{-1}(x) : \widetilde{\pi}^{-1}(x)) \to \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$. Легко проверяется, что $\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\gamma\alpha} = \mathrm{id}$, $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} \circ \widetilde{\varphi}_{\beta\gamma} \circ \widetilde{\varphi}_{\gamma\alpha} = \mathrm{id}$. В результате получаем когомологические классы $[\varphi] \in H^1(\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}, \overset{\circ}{\mathcal{D}})$ и $[\widetilde{\varphi}] \in H^1(\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}, \overset{\circ}{\widetilde{\mathcal{D}}})$. Эти классы также не зависят от выбора $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-координат. Действительно, для атласа $\{(U_\alpha, \overset{*}{h}_\alpha = g_\alpha \circ h_\alpha)\}_{\alpha\in B}$ имеем $\overset{*}{H}_{\alpha,x} = g_\alpha \circ H_{\alpha,x}$, $\overset{*}{H}{}_{\alpha,x}^{-1} = H_{\alpha,x}^{-1} \circ g_\alpha^{-1}$, откуда $\varphi^*_{\alpha\beta}(x) = \eta_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}(x) \circ \eta_\beta^{-1}$, $\widetilde{\varphi}^*_{\alpha\beta}(x) = \widetilde{\eta}_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}(x) \circ \widetilde{\eta}_\beta^{-1}$, где $\eta_\alpha = H_{\alpha,x}^{-1} \circ g_\alpha^{-1} \circ \widetilde{g}_\alpha \circ H_{\alpha,x}$, $\widetilde{\eta}_\alpha = \widetilde{H}_{\alpha,x}^{-1} \circ \widetilde{g}_\alpha^{-1} \circ g_\alpha \circ \widetilde{H}_{\alpha,x}$.

Пусть $\mathcal{V} = \{V_{\alpha'}\}_{\alpha'\in B'}$ — измельчение покрытия $\mathcal{U}$, $t : B' \to B$ — отображение такое, что $V_{\alpha'} \subset U_{t(\alpha')}$, а $t_\mathcal{V}^\mathcal{U} : H^1(\mathcal{U}, \overset{\circ}{\mathcal{D}}) \to H^1(\mathcal{V}, \overset{\circ}{\mathcal{D}})$ и $\widetilde{t}_\mathcal{V}^\mathcal{U} : H^1(\mathcal{U}, \overset{\circ}{\widetilde{\mathcal{D}}}) \to H^1(\mathcal{V}, \overset{\circ}{\widetilde{\mathcal{D}}})$ — соответствующие отображения в когомологиях [28]. Используя атлас $\{(V_{\alpha'}, h_{t(\alpha')}|V_{\alpha'})\}_{\alpha'\in B'}$, построим классы $[\varphi]_\mathcal{V} \in H^1(\mathcal{V}, \overset{\circ}{\mathcal{D}})$ и $[\widetilde{\varphi}]_\mathcal{V} \in H^1(\mathcal{V}, \overset{\circ}{\widetilde{\mathcal{D}}})$. Очевидно, $t_\mathcal{V}^\mathcal{U}([\varphi]_\mathcal{U}) = [\varphi]_\mathcal{V}$, $\widetilde{t}_\mathcal{V}^\mathcal{U}([\widetilde{\varphi}]_\mathcal{U}) = [\widetilde{\varphi}]_\mathcal{V}$. Переходя к прямым пределам, получаем классы $[\varphi] \in H^1(\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}, \overset{\circ}{\mathcal{D}})$ и $[\widetilde{\varphi}] \in H^1(\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}, \overset{\circ}{\widetilde{\mathcal{D}}})$.

Теорема 3. *Пусть $\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}$ — $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *многообразие $\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}$ радиантно;*

(ii) $[\lambda] = [\widetilde{\lambda}] \in H^1(\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}, D_n(\mathbf{A}))$;

(iii) $[\varphi] = \mathbf{1} \in H^1(\overset{\circ}{M}{}_n^{\mathbf{A}}, \overset{\circ}{\mathcal{D}})$;

(iv) $[\widetilde{\varphi}] = \mathbf{1} \in H^1(M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}, \mathring{\widetilde{\mathcal{D}}})$.

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (i). Если классы $[\lambda]$ и $[\widetilde{\lambda}]$ совпадают, то для некоторого $(\mathring{\mathbf{A}}^n, D_n(\mathbf{A}))$-атласа $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in B}$ на $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ имеет место соотношение $\widetilde{\lambda}_{\beta\alpha} = g_\beta \circ \lambda_{\beta\alpha} \circ g_\alpha^{-1}$, откуда следует, что $g_\beta \circ h_\beta \circ h_\alpha^{-1} \circ g_\alpha^{-1} = \widetilde{\lambda}_{\beta\alpha}$. Таким образом, $\{(U_\alpha, \widetilde{h}_\alpha = g_\alpha \circ h_\alpha)\}_{\alpha \in B}$ является $(\mathring{\mathbf{A}}^n, G_n^q)$-атласом на $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Если $[\varphi] = \mathbf{1}$, то для некоторого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ многообразия $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ координатными окрестностями коцикл $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ когомологичен $\mathbf{1}$. Пусть $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in B}$ — 0-коцепь на покрытии $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ с коэффициентами в пучке $\mathring{\mathcal{D}}$ такая, что $\varphi_{\alpha\beta} = \xi_\alpha \circ \xi_\beta^{-1}$. Тогда из (11) следует, что $H_{\alpha,x}^{-1} \circ \widetilde{\lambda}_{\alpha\beta} \circ H_{\beta,x} = \xi_\alpha \circ \xi_\beta^{-1}$ и $H_{\alpha,x} \circ \xi_\alpha \circ \xi_\beta^{-1} \circ H_{\beta,x}^{-1} = \widetilde{\lambda}_{\alpha\beta}$. Отождествляя $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ с $\sigma(M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}) \subset OM_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$, рассмотрим на этом многообразии атлас $\{\widetilde{h}_\alpha : U_\alpha \to \mathring{\mathbf{A}}^n\}_{\alpha \in B}$, определяемый следующим образом: $\widetilde{h}_\alpha(x) = H_{\alpha,x}(\xi_\alpha(x))$. Очевидно, этот атлас задает на $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ структуру $(\mathring{\mathbf{A}}^n, G_n^q)$-многообразия.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Как и в предыдущем пункте, имеем $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \zeta_\alpha \circ \zeta_\beta^{-1}$. Тогда из (12) получаем $\widetilde{H}_{\alpha,x} \circ \zeta_\alpha \circ \zeta_\beta^{-1} \circ \widetilde{H}_{\beta,x}^{-1} = \lambda_{\alpha\beta}$, откуда следует, что соотношения $\overset{*}{H}_\alpha(X) = (h_\alpha(x), \widetilde{H}_{\alpha,x}(\zeta_\alpha(X))$, где $X \in \pi^{-1}(x)$, определяют атлас на $\widetilde{O}M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ с функциями перехода $\overset{*}{H}_\alpha \circ \overset{*}{H}{}_\beta^{-1}$ вида (9). Отображения $\overset{*}{H}{}_\alpha^{-1} \circ H_\alpha$ определяют эквивалентность расслоений $\psi : OM_n^{\mathring{\mathbf{A}}} \to \widetilde{O}M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$, и набор карт $\{\widetilde{h}_\alpha : U_\alpha \to \mathring{\mathbf{A}}^n\}_{\alpha \in B}$, определенных соотношениями $\widetilde{h}_\alpha(x) = \widetilde{H}_{\alpha,x}(\psi(x))$, является $(\mathring{\mathbf{A}}^n, G_n^q)$-атласом на многообразии $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$.

Очевидно, из (i) следуют (ii), (iii) и (iv). $\square$

Теорема 4. *Пусть $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ — полное связное $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *многообразие $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ изоморфно $\mathring{\mathbf{A}}^n$*;

(ii) $H^1(M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}, D_n(\mathbf{A})) = \mathbf{1}$;

(iii) $H^1(M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}, \mathring{\mathcal{D}}) = \mathbf{1}$;

(iv) $H^1(M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}, \mathring{\widetilde{\mathcal{D}}}) = \mathbf{1}$.

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (i). По теореме 1 полное связное радиантное $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразие изоморфно $\mathring{\mathbf{A}}^n$. Поскольку $H^1(M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}, D_n(\mathbf{A})) = \mathbf{1}$, то $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ изоморфно радиантному многообразию, поэтому $M_n^{\mathring{\mathbf{A}}}$ изоморфно $\mathring{\mathbf{A}}^n$.

Аналогично получаем импликации (iii) $\Rightarrow$ (i) и (iv) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ гладкого многообразия W_k называется *хорошим* ([29], с. 52), если все непустые пересечения $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ диффеоморфны $\mathbf{R}^n$. Хорошие покрытия образуют кофинальное подмножество в множестве всех открытых покрытий гладкого многообразия W_k, т. е. в каждое открытое покрытие многообразия W_k можно вписать некоторое хорошее покрытие. Для многообразия $\mathring{\mathbf{A}}^n$ можно выбирать хорошие покрытия, состоящие из открытых координатных кубов. Пусть $[\eta] \in H^1(\mathring{\mathbf{A}}^n, D_n(\mathbf{A}))$. Для некоторого хорошего покрытия многообразия $\mathring{\mathbf{A}}^n$ открытыми координатными кубами $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ класс $[\eta]$ определяется классом $[\eta]_{\mathcal{U}} \in H^1(\mathcal{U}, D_n(\mathbf{A}))$. Пусть $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ — некоторый коцикл, порождающий класс $[\eta]_{\mathcal{U}}$. Функции $\eta_{\alpha\beta}$ постоянны, отождествим их с соответствующими элементами группы $D_n(\mathbf{A})$. Выберем область U_{α_0} и положим $\xi_{\alpha_0} : U_{\alpha_0} \to e \in D_n(\mathbf{A})$. Затем для каждого $\beta \in B$ выберем $x_\beta \in U_\beta$ и путь $\gamma : [0, 1] \to \mathring{\mathbf{A}}^n$, соединяющий x_{α_0} и x_β. Пусть области $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n} = U_\beta$ покрывают образ

$\gamma([0,1])$ и $U_{\alpha_k} \cap U_{\alpha_{k+1}} \neq \emptyset$. Положим $g_\beta = \eta_{\beta\alpha_{n-1}} \circ \eta_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}} \circ \cdots \circ \eta_{\alpha_1\alpha_0}$ и определим постоянные отображения $\xi_\beta : U_\beta \to g_\beta \in D_n(\mathbf{A})$. Ясно, что отображение ξ_β не зависит от выбора пути γ и областей $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_{n-1}}$ и имеет место соотношение $\xi_\beta = \eta_{\beta\alpha} \circ \xi_\alpha$. Таким образом, $[\eta]_{\mathcal{U}} = \mathbf{1}$ и, следовательно, $[\eta] = \mathbf{1}$.

Аналогичным образом получаются импликации (i) $\Rightarrow$ (iii) и (i) $\Rightarrow$ (iv). $\square$

5. Препятствия к радиантности A-гладкого многообразия

Рассматриваем $\mathbf{A}$-гладкое n-мерное многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ с $\mathbf{A}^n$-атласом $\{h_\alpha : U_\alpha \subset M^{\mathbf{A}} \to U'_\alpha \subset \mathbf{A}^n\}_{\alpha \in A}$. Преобразования координат $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ имеют вид

$$\{X_\beta^i\} \mapsto \left\{X_\alpha^i = \varphi_{\alpha\beta}^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi_{\alpha\beta}^i}{D x_\beta^p} \mathring{X}_\beta^p\right\},$$

где $\varphi_{\alpha\beta}^i$ — проектируемые $\mathbf{A}$-значные функции по отношению к каноническому $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоению на $\mathbf{A}^n$. С многообразием $M_n^{\mathbf{A}}$ естественно ассоциируются следующие два расслоенных пространства со стандартным слоем $\mathring{\mathbf{A}}^n$ и структурными группами $D_n(\mathbf{A})$ и G_n^q соответственно:

1) *каноническое соприкасающееся* $\mathring{\mathbf{A}}^n$*-расслоение* $\pi : O^V M_n^{\mathbf{A}} \to M_n^{\mathbf{A}}$ с атласом $\{H_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U'_\alpha \times \mathring{\mathbf{A}}^n\}_{\alpha \in A}$ и функциями перехода $H_\alpha \circ H_\beta^{-1}$, имеющими вид

$$\{X_\beta^i, \overset{*}{X}{}_\beta^i\} \mapsto \left\{X_\alpha^i = \varphi_{\alpha\beta}^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi_{\alpha\beta}^i}{D x_\beta^p} \mathring{X}_\beta^p, \quad \overset{*}{X}{}_\alpha^i = \mathring{\varphi}_{\alpha\beta}^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi_{\alpha\beta}^i}{D x_\beta^p} \overset{*}{X}{}_\beta^p\right\}, \tag{13}$$

2) расслоение $\widetilde{\pi} : \widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}} \to M_n^{\mathbf{A}}$ с атласом $\{\widetilde{H}_\alpha : \widetilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \to U'_\alpha \times \mathring{\mathbf{A}}^n\}_{\alpha \in A}$ и функциями перехода $\widetilde{H}_\alpha \circ \widetilde{H}_\beta^{-1}$, имеющими вид

$$\{X_\beta^i, \overset{*}{X}{}_\beta^i\} \mapsto \left\{X_\alpha^i = \varphi_{\alpha\beta}^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi_{\alpha\beta}^i}{D x_\beta^p} \mathring{X}_\beta^p, \quad \overset{*}{X}{}_\alpha^i = \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \bar{\varphi}_{\alpha\beta}^i}{D x_\beta^p} \overset{*}{X}{}_\beta^p\right\}, \tag{14}$$

где функции $\overline{\varphi}_{\alpha\beta}^i$ и $\mathring{\varphi}_{\alpha\beta}^i$ представляют собой компоненты функций $\varphi_{\alpha\beta}^i$, соответствующие разложению $\mathbf{A} = \mathbf{R} \oplus \mathring{\mathbf{A}}$.

Расслоение $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}}$ будем называть *каноническим радиантным расслоением* $\mathbf{A}$-гладкого многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$, оно естественно изоморфно расслоению $T_{\mathrm{tr}}^{\mathbf{A}} M_n^{\mathbf{A}}$ трансверсальных $\mathbf{A}$-скоростей для канонического $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоения на $M_n^{\mathbf{A}}$.

Имеются канонические сечения $\sigma : M_n^{\mathbf{A}} \to O^V M_n^{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{\sigma} : M_n^{\mathbf{A}} \to \widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}}$, в локальных координатах определяемые соответственно уравнениями $\overset{*}{X}{}_\alpha^i = \mathring{X}_\alpha^i$ и $\overset{*}{X}{}_\alpha^i = 0$. В последующем будет удобно отождествлять многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ с образом $\sigma(M_n^{\mathbf{A}}) \subset O^V M_n^{\mathbf{A}}$ сечения σ.

Имеются канонические локально плоские частичные [30] связности Γ и $\widetilde{\Gamma}$ в расслоениях $O^V M_n^{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}}$ с параллельным перенесением вдоль слоев канонических $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоений, определяемым уравнениями $d\overset{*}{X}{}_\alpha^i = 0$ в обоих случаях. Эти связности порождают слоения на многообразиях $O^V M_n^{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}}$, которые являются поднятыми слоениями [30], [19] по отношению к каноническому $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоению на $M_n^{\mathbf{A}}$. Таким образом, $O^V M_n^{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}}$ являются слоеными расслоениями [30], [19]. Поднятые слоения, порождаемые связностями Γ и $\widetilde{\Gamma}$, будем называть *поднятыми* $\mathring{\mathbf{A}}^n$*-слоениями.*

Из уравнений (13) и (14) следует, что каждое из расслоений $O^V M_n^{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}}$ несет на себе структуру n-мерного гладкого многообразия над локальной алгеброй $\widehat{\mathbf{A}}$, получаемой из алгебры $\mathbf{A}$ удвоением идеала $\mathring{\mathbf{A}}$ (см. (5)). Это позволяет определить над многообразием $M_n^{\mathbf{A}}$ пучки ростков $\widehat{\mathbf{A}}$-гладких послойных $\overset{\circ}{D}_n$-преобразований расслоений $O^V M_n^{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}}$. Обозначим эти пучки, соответственно, символами $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$. В локальных координатах сечения пучков $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ задаются уравнениями следующего вида:

$$\{X^i, \overset{*}{X}{}^i\} \mapsto \Big\{Y^i = X^i, \overset{*}{Y}{}^i = \overset{*}{X}{}^i + \overset{\circ}{\varphi}{}^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \overset{\circ}{\varphi}{}^i}{Dx^p} \overset{*}{X}{}^p\Big\}, \tag{15}$$

где $\overset{\circ}{\varphi}{}^i$ — гладкие $\overset{\circ}{\mathbf{A}}$-значные функции, локально зависящие только от вещественных координат x^j.

Отметим, что пучок $\widetilde{\mathcal{S}}$ изоморфен пучку ростков проектируемых по отношению к поднятому $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-слоению сечений расслоения трансверсальных $\mathbf{A}$-скоростей $T_{\mathrm{tr}}^{\mathbf{A}} M_n^{\mathbf{A}}$.

Рассмотрим покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ областями определения $\mathbf{A}^n$-карт и каждой упорядоченной паре $\alpha, \beta \in B$ такой, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, отнесем следующие локальные $D_n(\mathbf{A})$-преобразования расслоений $O^V M_n^{\mathbf{A}}$ и $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}}$ соответственно:

$$\varphi_{\alpha\beta} = H_\alpha^{-1} \circ \widetilde{H}_\alpha \circ \widetilde{H}_\beta^{-1} \circ H_\beta, \quad \widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \widetilde{H}_\alpha^{-1} \circ H_\alpha \circ H_\beta^{-1} \circ \widetilde{H}_\beta. \tag{16}$$

Поскольку $\varphi_{\alpha\beta} = H_\beta^{-1} \circ (H_\beta \circ H_\alpha^{-1}) \circ (\widetilde{H}_\alpha \circ \widetilde{H}_\beta^{-1}) \circ H_\beta$ и $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \widetilde{H}_\beta^{-1} \circ (\widetilde{H}_\beta \circ \widetilde{H}_\alpha^{-1}) \circ (H_\alpha \circ H_\beta^{-1}) \circ \widetilde{H}_\beta$, а преобразования $(H_\beta \circ H_\alpha^{-1}) \circ (\widetilde{H}_\alpha \circ \widetilde{H}_\beta^{-1})$ и $(\widetilde{H}_\beta \circ \widetilde{H}_\alpha^{-1}) \circ (H_\alpha \circ H_\beta^{-1})$ имеют вид (15), то $\varphi_{\alpha\beta}$ и $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}$ являются сечениями, соответственно, пучков $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ над пересечением $U_\alpha \cap U_\beta$. Как и в предыдущем разделе, получаем два когомологических класса $[\varphi]_{\mathcal{U}} \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ и $[\widetilde{\varphi}]_{\mathcal{U}} \in H^1(\mathcal{U}, \widetilde{\mathcal{S}})$, которые не зависят от выбора $\mathbf{A}^n$-координат на областях $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$. Переходя к прямым пределам, получим, соответственно, классы $[\varphi] \in H^1(M_n^{\mathbf{A}}, \mathcal{S})$ и $[\widetilde{\varphi}] \in H^1(M_n^{\mathbf{A}}, \widetilde{\mathcal{S}})$.

Теорема 5. *Для n-мерного $\mathbf{A}$-гладкого многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ радиантно;*

(ii) $[\varphi] = \mathbf{1} \in H^1(M_n^{\mathbf{A}}, \mathcal{S})$;

(iii) $[\widetilde{\varphi}] = \mathbf{1} \in H^1(M_n^{\mathbf{A}}, \widetilde{\mathcal{S}})$;

(iv) *существует проектируемое сечение слоеного расслоения $O^V M_n^{\mathbf{A}}$.*

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (i). Если $[\varphi] = \mathbf{1}$, то для некоторого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ координатными областями коцикл, порождаемый преобразованиями $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$, когомологичен $\mathbf{1}$. Пусть $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in B}$ — 0-коцепь на покрытии $\{U_\alpha\}_{\alpha \in B}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{S}$ такая, что $\varphi_{\alpha\beta} = \xi_\alpha \circ \xi_\beta^{-1}$. Отождествляя $M_n^{\mathbf{A}}$ с $\sigma(M_n^{\mathbf{A}}) \subset O^V M_n^{\mathbf{A}}$, из (16) получим, что атлас $\{H_\alpha \circ \xi_\alpha : \sigma(U_\alpha) \to \mathbf{A}^n\}_{\alpha \in B}$ определяет радиантную структуру на $M_n^{\mathbf{A}}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Аналогично предыдущему пункту доказательства имеем $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \zeta_\alpha \circ \zeta_\beta^{-1}$. Тогда из (16) аналогично соответствующему пункту теоремы 3 следует, что отображения $H_\alpha^{-1} \circ \widetilde{H}_\alpha \circ \zeta_\alpha$ определяют корректно $\widehat{\mathbf{A}}$-гладкую эквивалентность расслоений $\psi : \widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}} \to O^V M_n^{\mathbf{A}}$ и набор $\mathbf{A}^n$-карт $\{\widetilde{H}_\alpha \circ \zeta_\alpha^{-1} \circ \widetilde{H}_\alpha^{-1} \circ H_\alpha | \sigma(U_\alpha) \to \mathbf{A}^n\}_{\alpha \in B}$ есть $\Gamma'(\mathbf{A}^n)$-атлас на $M_n^{\mathbf{A}}$.

Ясно, что из (i) следуют (ii) и (iii).

(iv) $\Leftrightarrow$ (i). Из предыдущих рассуждений следует, что для того чтобы многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ было радиантным, необходимо и достаточно, чтобы существовала $\widehat{\mathbf{A}}$-гладкая эквивалентность $\psi : \widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}} \to O^V M_n^{\mathbf{A}}$ расслоений над $M_n^{\mathbf{A}}$. Если такая эквивалентность существует, отображение $\sigma^* = \psi \circ \widetilde{\sigma}$ является проектируемым сечением расслоения $O^V M_n^{\mathbf{A}}$. Обратно, проектируемое сечение $\sigma^* : M_n^{\mathbf{A}} \to O^V M_n^{\mathbf{A}}$ определяет единственный $\widehat{\mathbf{A}}$-гладкий диффеоморфизм $\psi : \widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{A}} \to O^V M_n^{\mathbf{A}}$ такой, что $\psi \circ \widetilde{\sigma} = \sigma^*$. Действительно, если над координатной окрестностью U, являющейся простым открытым множеством для канонического $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-слоения на $M_n^{\mathbf{A}}$, сечение σ^* задается уравнениями $\{x^i, \overset{\circ}{X}{}^i\} \mapsto \{x^i, \overset{\circ}{X}{}^i, \overset{*}{X}{}^i = \sigma^i(x^j)\}$, то ψ над U имеет вид

$$\{x^i, \overset{\circ}{X}{}^i, \overset{*}{X}{}^i\} \mapsto \left\{x^i, \overset{\circ}{X}{}^i, \sigma^i(x^j) + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \sigma^j}{Dx^p} \overset{*}{X}{}^p\right\}. \quad \square$$

Следует отметить, что наличие проектируемого сечения оказывает существенное влияние на строение (X, G)-слоения и в общем случае. Так в [24] было доказано, что если каноническое расслоение полного (X, G)-слоения допускает проектируемое сечение, то это (X, G)-слоение образовано слоями локально тривиального расслоения.

Теорема 6. *Для полного* $\mathbf{A}$*-гладкого многообразия* $M_n^{\mathbf{A}}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $M_n^{\mathbf{A}}$ $\mathbf{A}$*-диффеоморфно расслоению* $\mathbf{A}$*-скоростей* $T^{\mathbf{A}} M_n$ *некоторого вещественного многообразия* M_n;

(ii) $H^1(M_n^{\mathbf{A}}, \mathcal{S}) = \mathbf{1}$;

(iii) $H^1(M_n^{\mathbf{A}}, \widetilde{\mathcal{S}}) = \mathbf{1}$.

Доказательство. $(\mathrm{ii}), (\mathrm{iii}) \Rightarrow (\mathrm{i})$. По теореме 5 каждое из условий (ii) и (iii) влечет изоморфность многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ некоторому радиантному многообразию. Поскольку многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ является полным, то по теореме 2 оно $\mathbf{A}$-диффеоморфно расслоению $\mathbf{A}$-скоростей $T^{\mathbf{A}} W_n$ некоторого вещественного многообразия W_n.

$(\mathrm{i}) \Rightarrow (\mathrm{ii}), (\mathrm{iii})$. В случае $M_n^{\mathbf{A}} = T^{\mathbf{A}} W_n$ пучки $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ совпадают. Пусть $[\eta] \in H^1(T^{\mathbf{A}} W_n^{\mathbf{A}}, \mathcal{S})$. Рассмотрим на многообразии W_n некоторый атлас $\{(V_a, h_a)\}_{a\in A}$ такой, что покрытие $\mathcal{V} = \{V_a\}_{a\in A}$ является хорошим (см. [29], с. 52). Этот атлас порождает $\mathbf{A}^n$-атлас $\{(V_a^{\mathbf{A}}, h_a^{\mathbf{A}})\}_{a\in A}$ на расслоении $T^{\mathbf{A}} W_n$, где $V_a^{\mathbf{A}} = T^{\mathbf{A}} V_a = (\pi_0^q)^{-1}(V_a)$, $\pi_0^q : T^{\mathbf{A}} W_n \to W_n$ — проекция расслоения $\mathbf{A}$-скоростей, а $h_a^{\mathbf{A}} : V_a^{\mathbf{A}} \to \mathbf{A}^n$ — $\mathbf{A}$-продолжение отображения h_a. Преобразования координат $h_b^{\mathbf{A}} \circ (h_a^{\mathbf{A}})^{-1}$ являются $\mathbf{A}$-продолжениями преобразований координат $h_b \circ (h_a)^{-1}$. Класс $[\eta]$ определяется классом $[\eta]_{\mathcal{U}} \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ для некоторого покрытия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in B}$ многообразия $T^{\mathbf{A}} W_n$, вписанного в покрытие $\mathcal{V}^{\mathbf{A}} = \{V_a^{\mathbf{A}}\}_{a\in A}$. Пусть для определенности $U_\alpha \subset V_{a(\alpha)}^{\mathbf{A}}$ и $t : B \ni \alpha \mapsto t(\alpha) = a(\alpha) \in A$ — соответствующее отображение индексных множеств. Рассмотрим коцикл $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ на покрытии $\mathcal{U}$, задающий класс $[\eta]_{\mathcal{U}}$. По этому коциклу можно построить расслоение $\overset{*}{\pi} : \overset{*}{O}{}^V T^{\mathbf{A}} W_n \to T^{\mathbf{A}} W_n$ со стандартным слоем $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$ и структурной группой $D_n(\mathbf{A})$, определяемое атласом $\overset{*}{H}_\alpha : U_\alpha \times \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n \to \widehat{\mathbf{A}}{}^n$ с функциями перехода

$$\overset{*}{H}_\alpha \circ \overset{*}{H}{}_\beta^{-1} = H_\alpha \circ \eta_{\alpha\beta} \circ H_\beta^{-1}, \tag{17}$$

где $\{H_\alpha : U_\alpha \times \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n \to \widehat{\mathbf{A}}{}^n\}_{\alpha\in B}$ — атлас канонического соприкасающегося расслоения $O^V T^{\mathbf{A}} W_n$ с функциями перехода $H_\alpha \circ H_\beta^{-1}$, имеющими вид (13) для атласа $\{h_{a(\alpha)}^{\mathbf{A}} : U_\alpha \to \mathbf{A}^n\}_{\alpha\in B}$ на $T^{\mathbf{A}} W_n$. Функции склейки $\overset{*}{H}_\alpha \circ \overset{*}{H}{}_\beta^{-1}$ проектируемы относительно канонического $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-слоения на $T^{\mathbf{A}} W_n$ и определяют на $\overset{*}{O}{}^V T^{\mathbf{A}} W_n$ структуру полного $\widehat{\mathbf{A}}$-гладкого многообразия. Сквозная проекция

$$\widehat{\pi}_0^q : \overset{*}{O}{}^V T^{\mathbf{A}} W_n \xrightarrow{\overset{*}{\pi}} T^{\mathbf{A}} W_n \xrightarrow{\pi_0^q} W_n$$

является локально тривиальным расслоением с односвязными слоями, следовательно, по теореме 3 из [31] имеется $\widehat{\mathbf{A}}$-диффеоморфизм

$$\Phi : \overset{*}{O}{}^V T^{\mathbf{A}} W_n \to T^{\widehat{\mathbf{A}}} W_n \cong O^V T^{\mathbf{A}} W_n,$$

перестановочный с проектированием на W_n. Пусть $\Phi_\alpha = \Phi|\overset{*}{\pi}{}^{-1}(U_\alpha) : \overset{*}{\pi}{}^{-1}(U_\alpha) \to T^{\widehat{\mathbf{A}}} W_n$ — ограничение $\widehat{\mathbf{A}}$-диффеоморфизма Φ. Для непустого пересечения $U_\alpha \cap U_\beta$, учитывая (17) и то, что $\Phi_\alpha = \Phi_\beta$ на $\overset{*}{\pi}{}^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, получаем

$$\eta_{\alpha\beta} = H_\alpha^{-1} \circ \overset{*}{H}_\alpha \circ \overset{*}{H}{}_\beta^{-1} \circ H_\beta = (H_\alpha^{-1} \circ \overset{*}{H}_\alpha \circ \Phi_\alpha^{-1}) \circ (\Phi_\beta \circ \overset{*}{H}{}_\beta^{-1} \circ H_\beta) = \zeta_\alpha \circ \zeta_\beta^{-1},$$

где

$$\zeta_\alpha = (H_\alpha^{-1} \circ \overset{*}{H}_\alpha \circ \Phi_\alpha^{-1}) : O^V T^{\mathbf{A}} W_n|\pi^{-1}(U_\alpha) \to O^V T^{\mathbf{A}} W_n|\pi^{-1}(U_\alpha)$$

— сечение пучка $\mathcal{S}$ над U_α. Таким образом, $[\eta_{\alpha\beta}] = \mathbf{1}$ и, следовательно, $[\eta] = \mathbf{1}$. $\square$

В случае алгебр высоты $q = 1$, т. е. алгебр $\mathbf{R}(N,1)$ срезанных многочленов степени 1, пучки $\mathcal{S}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}$ являются абелевыми, и препятствия для радиантности многообразий над $\mathbf{R}(N,1)$ могут быть представлены в терминах (слоеных) d_F-когомологических классов методом, аналогичным примененному в [18] при изучении аффинных расслоений. А именно, для многообразия $M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$ связность Γ в $O^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$ является аффинной частичной [30] связностью, ковариантная производная $\nabla\sigma$ в связности Γ является 1-формой со значениями в сечениях расслоения $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$, и препятствие к радиантности может быть представлено как класс $[\nabla\sigma] \in H_F^{1,0}(M_n^{\mathbf{R}(N,1)}, \widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)})$, где $H_F^{1,0}(M_n^{\mathbf{R}(N,1)}, \widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)})$ — группа d_F-когомологий для канонического слоения (см. [19]) форм со значениями в сечениях расслоения $\widetilde{O}^V M_n^{\mathbf{R}(N,1)}$, имеющего проектируемые функции перехода.

Если радиантное многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ не является полным, то когомологическое множество $H^1(M_n^{\mathbf{A}}, \mathcal{S})$ может быть нетривиальным. В качестве примера рассмотрим многообразие Хопфа $M_1^{\mathbf{R}(\varepsilon)} = (\mathbf{R}(\varepsilon) \setminus \{0\})/G$, где G — бесконечная циклическая группа, порождаемая линейным оператором $\mathbf{R}(\varepsilon) \setminus \{0\} \ni X \mapsto 2X \in \mathbf{R}(\varepsilon) \setminus \{0\}$. Пусть $X = x^1 + \varepsilon x^2$ — разложение элемента алгебры $\mathbf{R}(\varepsilon)$ по базису $\{1, \varepsilon\}$. Каноническое слоение на $M_1^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$ порождается слоением $\mathbf{R}(\varepsilon)$ на прямые $x^1 = \mathrm{const}$. Рассмотрим открытые подмножества

$$U_1 = \{X = x^1 + \varepsilon x^2 \in \mathbf{R}(\varepsilon), \ \ \tfrac{9}{4} < (x^1)^2 + (x^2)^2 < 9\},$$
$$U_2 = \{X = x^1 + \varepsilon x^2 \in \mathbf{R}(\varepsilon), \ \ 1 < (x^1)^2 + (x^2)^2 < 4\}.$$

Каноническая проекция $\pi : \mathbf{R}(\varepsilon) \setminus \{0\} \to M_1^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$ отображает их на открытые подмножества $V_a = \pi(U_a)$, $a = 1, 2$, в $M_1^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$, которые образуют покрытие многообразия $M_1^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$. Отображения $h_a = (\pi|U_a)^{-1} : V_a \to U_a$ определяют $\mathbf{R}(\varepsilon)$-атлас на $M_1^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$. Пучок $\mathcal{S}$ в случае многообразия $M_1^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$ изоморфен пучку проектируемых слоевых векторных полей. Обозначим символом $\mathcal{S}'$ ограничение этого пучка на слой

$$\mathbf{S}^1 = \{X = \varepsilon x^2 \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}(\varepsilon), \ x^2 > 0\}/G.$$

Пусть $\beta : H^1(M_1^{\mathbf{R}(\varepsilon)}, \mathcal{S}) \to H^1(\mathbf{S}^1, \mathcal{S}')$ — отображение, порождаемое ограничениями коциклов на $\mathbf{S}^1$. Рассмотрим на покрытии $\{V_a\}_{a=1,2}$ многообразия $M_1^{\mathbf{R}(\varepsilon)}$ класс $[v]$ из $H^1(M_1^{\mathbf{R}(\varepsilon)}, \mathcal{S})$, определяемый в локальной карте (V_1, h_1) следующим векторным полем v на $V_1 \cap V_2$: $v(X) = 0$ на $\pi(\{X \in V_1, \ \frac{9}{4} < (x^1)^2 + (x^2)^2 < 4\})$, $v(X) = 1$ на $\pi(\{X \in V_1, \ 4 < (x^1)^2 + (x^2)^2 < 9\})$. Поскольку $\beta[v] \neq 0$, то $H^1(M_1^{\mathbf{R}(\varepsilon)}, \mathcal{S}) \neq 0$.

Литература

1. Котельников А.П. *Винтовое счисление и некоторые его приложения к геометрии и механике.* – Казань, 1895. – 216 с.
2. Study E. *Geometrie der Dymamen.* – Leipzig, 1902. – 603 S.
3. Бляшке В. *Дифференциальная геометрия.* – М.–Л.: ОНТИ–НКТП СССР, 1935. – 330 с.
4. Широков П.А. *Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в римановых пространствах* // Изв. Казанск. физ.-матем о-ва. – 1925. – Сер. 2. – Т. 25. – С. 48–55.
5. Норден А.П. *О параллельном перенесении дуальных векторов* // – Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1950. – Т. 110. – Вып. 3. – С. 95–103.
6. Норден А.П. *О комплексном представлении тензоров бипланарного пространства* // – Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1954. – Т. 114. – Вып. 8. – С. 45–53.
7. Норден А.П. *О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 12. – С. 84–94.

8. Широков А.П. *Об одном типе G-структур, определяемых алгебрами* // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ АН СССР. М., 1966. – Т. 1. – С. 425–456.
9. Широков А.П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ. – 1981. – Т. 12. – С. 61–95.
10. Вишневский В.В. *Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации* // Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прилож. – М.: ВИНИТИ. – 2002. – Т. 73. – С. 6–64.
11. Кручкович Г.И. *Гиперкомплексные структуры на многообразиях.* I // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – 1972. – Вып. 16. – МГУ. – С. 174–201.
12. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1984. – 264 с.
13. Weil A. *Théorie des points proches sur les variététes différentiables* // Colloque internat. centre nat. rech. sci., Strasbourg. – 1953. – V. 52. – P. 111–117.
14. Kolář I., Michor P.W., Slovák J. *Natural operations in differential geometry.* – Springer, 1993. – 427 p.
15. Шурыгин В.В. *Многообразия над локальными алгебрами эквивалентные расслоениям струй* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 10. – С. 68–79.
16. Brickell F., Clark R.S. *Integrable almost tangent structures* // J. Different. Geom. – 1974. – V. 9. – № 4. – P. 557–563.
17. León M. de, Méndes I., Salgado M. *Integrable p-almost tangent manifolds and tangent bundles of p^1-velocities* // Acta Math. Hung. – 1991. – V. 58. – № 1–2. – P. 45–54.
18. Goldman W., Hirsch M.W. *The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1984. – V. 26. – № 2. – P. 629–649.
19. Molino P. *Riemannian foliations.* – Birkhäuser, 1988. – 343 p.
20. Shurygin V.V. *The structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras* // Lobachevskii J. of Math. – 1999. – V. 5. – P. 29–55.
21. Шурыгин В.В. *Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля* // Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прилож. – М.: ВИНИТИ. – 2002. – Т. 73. – С. 162–236.
22. Thurston W.P. *The geometry and topology of 3-manifolds.* – Princeton Univ. Lecture Notes, 1978/1979.
23. Апанасов Б.Н. *Геометрия дискретных групп и многообразий.* – М.: Наука, 1991. – 432 с.
24. Малахальцев М.А. *(X, G)-слоения* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 7. – С. 55–65.
25. Inaba T., Masuda K. *Tangentially affine foliations and leafwise affine functions on the torus* // Kodai Math. J. – 1993. – V. 16. – P. 32–43.
26. Шурыгин В.В. *Расслоения струй как многообразия над алгебрами* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ.– 1987. – Т. 19. – С. 3–22.
27. Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр* IV. *Дифференциальная геометрия.* – М.: Наука, 1988. – 496 с.
28. Хирцебрух Ф. *Топологические методы в алгебраической геометрии.* – М.: Мир, 1973. – 280 с.
29. Ботт Р., Ту Л.В. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии.* – М.: Наука, 1989. – 336 с.
30. Kamber F.W., Tondeur Ph. *Foliated bundles and characteristic classes* // Lect. Notes in Math. Springer 1975. – V. 493. – 208 p.
31. Шурыгин В.В. *О строении полных многообразий над алгебрами Вейля* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 11. – С. 88–97.

Казанский государственный университет

Поступила
27.12.2004