ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 10 (509)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.518

С.Б. ВАКАРЧУК, А.Н. ЩИТОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЧАСТНЫМИ СУММАМИ РЯДОВ ФАБЕРА–ШАУДЕРА В МЕТРИКЕ ПРОСТРАНСТВА $\varphi(L)$

1. Пусть $\{\chi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система функций Хаара [1]. Рассмотрим введенную в [2] систему функций $\{\psi_m(x)\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$, где $\psi_0(x)\equiv 1$; $\psi_m(x)=\int\limits_0^x \chi_m(t)\mathrm{d}t$ ($m\in\mathbb{N}$, $0\leqslant x\leqslant 1$). Через $C\overset{\mathrm{def}}{=}C[0,1]$ обозначим пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций. В [2] было показано, что произвольную функцию $f(x)\in C$ можно представить в виде

$$f(x)=a_0(f)+\sum_{m=1}^{\infty}a_m(f)\psi_m(x), \tag{1}$$

где $a_0(f)=f(0)$, $a_m(f)=\int\limits_0^1\chi_m(t)\mathrm{d}f(t)$ ($m\in\mathbb{N}$). Присутствующие здесь интегралы понимаются в смысле Лебега–Стилтьеса. В [3] результат вида (1) был передоказан с использованием функций $\{\widetilde{\psi}_m(x)\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$, отличающихся от соответствующих функций $\{\psi_m(x)\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ лишь постоянными множителями, что не сыграло никакой роли при исследовании вопросов представления функций рядами. Различные свойства системы $\{\psi_m(x)\}_{m\in\mathbb{Z}_+}$ (в том числе аппроксимативные) исследованы в [4].

Всюду далее полагаем $N=2^k+i$ ($k\in\mathbb{Z}_+$; $i=\overline{1,2^k}$).

Под $S_N(f,x)=a_0(f)+\sum\limits_{m=1}^{N}a_m(f)\psi_m(x)$ ($N=1,2,\dots$) понимаем частную сумму ряда (1). В работах [4]–[6] были получены оценки сверху величины $\|f-S_N(f)\|_C$ ($N=2,3,\dots$), выраженные через модули непрерывности первого и второго порядков.

Пусть Φ — множество четных, конечных и неубывающих на $[0,\infty)$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям $\varphi(0)=0$; $\lim\{\varphi(x):x\to\infty\}=\varphi(\infty)=\infty$. Если $\varphi(x)\in\Phi$, то через $\varphi(L)$ обозначим множество всех измеримых на отрезке $[0,1]$ функций f, для каждой из которых $\|f\|_{\varphi(L)}\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_0^1\varphi(f(x))\mathrm{d}x<\infty$. Если, например, $\varphi(x)=|x|^p$, то $\varphi(L)$ в случае $1\leqslant p<\infty$ есть линейное пространство $L_p\overset{\mathrm{def}}{=}L_p[0,1]$ суммируемых на отрезке $[0,1]$ в p-й степени функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_{L_p}=\Big\{\int\limits_0^1|f(x)|^p\mathrm{d}x\Big\}^{1/p}<\infty$. Если же $0<p<1$, то величина $\|f\|_{L_p}$ не является нормой, но обозначения сохраняются и в этом случае. При $0<p<1$ класс L_p является пространством Фреше, т. е. полным линейным метрическим пространством, в котором метрику можно задать равенством $\rho_p(f,g)=\|f-g\|_{L_p}^p$.

Под $C^1\overset{\mathrm{def}}{=}C^1[0,1]$ понимаем класс непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций. Пусть $W^1H_\omega=\{f(x)\in C^1:\omega(f^{(1)},t)\leqslant\omega(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$, где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. Введем следующие вспомогательные функции:

$$\lambda(\omega;a,b;x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\begin{cases} \omega(a+b-2x), & \text{если } a \leqslant x \leqslant (a+b)/2; \\ -\omega(2x-a-b), & \text{если } (a+b)/2 \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(\omega;a,b;x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_a^x \lambda(\omega;a,b;t)\mathrm{d}t, a \leqslant x \leqslant b,$$

и обозначения $\mathcal{E}_N(W^1H_\omega,\varphi(L)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\{\|f-S_N(f)\|_{\varphi(L)} : f(x) \in W^1H_\omega\}$; $h \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2^{-(k+1)}$.

2. Теорема 1. *Пусть функция $\varphi(x) \in \Phi$ непрерывна и монотонно возрастает на полусегменте $[0,\infty)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_N(W^1H_\omega,\varphi(L)) \leqslant 2i\int_0^h \varphi(\mathcal{L}(\omega;0,h;x))\mathrm{d}x + (2^k-i)\int_0^{2h}\varphi(\mathcal{L}(\omega;0,2h;x))\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Если $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то в (2) имеет место знак равенства.

Для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $g(x)$ полагаем

$$\Omega(\omega(g);a,b;x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\begin{cases} \omega(g,a+b-2x), & \text{если } a \leqslant x \leqslant (a+b)/2; \\ -\omega(g,2x-a-b), & \text{если } (a+b)/2 \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{3}$$

Используя (3), запишем

$$\widetilde{\Omega}(\omega(g);a,b;x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_a^x \Omega(\omega(g);a,b;t)\,\mathrm{d}t, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Доказательство теоремы 1, в частности, опирается на результат, являющийся распространением леммы 6.3.2 из ([7], гл. 6, § 6.3, с. 277) на случай пространства $\varphi(L)$.

Лемма. *Пусть функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$ и функция $\varphi(x) \in \Phi$ непрерывна и монотонно возрастает на полусегменте $[0,\infty)$. Тогда для $Q(g;a,b;x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_a^x g(t)\mathrm{d}t$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ справедливо неравенство*

$$\int_a^b \varphi(Q(g;a,b;x))\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \varphi(\widetilde{\Omega}(\omega(g);a,b;x))\mathrm{d}x.$$

Следствие 1. Пусть $\varphi(x) = |x|^p$ $(0 < p < \infty)$ и $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_N(W^1H_\omega,L_p) = \left\{2i\int_0^h \mathcal{L}^p(\omega;0,h;x)\mathrm{d}x + (2^k-i)\int_0^{2h}\mathcal{L}^p(\omega;0,2h;x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}. \tag{4}$$

Полагая, например, в (4) $p=1$, получим

$$\mathcal{E}_N(W^1H_\omega,L_1) = \frac{i}{2}\int_0^h x\omega(x)\mathrm{d}x + \frac{2^k-i}{4}\int_0^{2h} x\omega(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Если в (5) $\omega_*(t) = t^\alpha$, где $0 < \alpha \leqslant 1$, то

$$\mathcal{E}_N(W^1H_{\omega_*},L_1) = \frac{i+(2^k-i)2^{\alpha+1}}{2(\alpha+2)}h^{\alpha+2}.$$

Совершив в (4) предельный переход при $p \to \infty$, получим точную оценку погрешности приближения в метрике пространства C

$$\mathcal{E}_N(W^1 H_\omega, C) = \frac{1}{4} \begin{cases} \int\limits_0^h \omega(x)\mathrm{d}x, & \text{если } N = 2^{k+1} \ \ (k \in \mathbb{Z}_+); \\ \int\limits_0^{2h} \omega(x)\mathrm{d}x, & \text{если } N = 2^k + i \ \ (k \in \mathbb{Z}_+; \ \ i = \overline{1, 2^k - 1}). \end{cases} \tag{6}$$

В частности, из (6) имеем

$$\mathcal{E}_N(W^1 H_{\omega_*}, C) = \frac{h^{\alpha+1}}{4(\alpha+1)} \begin{cases} 1, & \text{если } N = 2^{k+1}; \\ 2^{\alpha+1}, & \text{если } N = 2^k + i \ \ (k \in \mathbb{Z}_+; \ \ i = \overline{1, 2^k - 1}). \end{cases}$$

3. Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,1]$ функция, а $\varphi(x) \in \Phi$ непрерывна и монотонно возрастает на полусегменте $[0,\infty)$. Тогда имеет место неулучшаемое на классе C^1 неравенство*

$$\|f - S_N(f)\|_{\varphi(L)} \leqslant 2i \int_0^h \varphi\big(\tfrac{x}{4}\omega(f^{(1)}, h)\big)\mathrm{d}x + (2^k - i) \int_0^{2h} \varphi\big(\tfrac{x}{4}\omega(f^{(1)}, 2h)\big)\mathrm{d}x. \tag{7}$$

Доказательство теоремы 2 основано на использовании вытекающего из леммы соотношения

$$\int_a^b \varphi(Q(g; a, b; x))\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{b-a} \varphi\big(\tfrac{1}{4}\omega(g, b-a)\big)\mathrm{d}x,$$

необходимого для получения оценки сверху величины $\|f - S_N(f)\|_{\varphi(L)}$. При помощи сглаживающего оператора Стеклова далее строим последовательность функций

$$\Psi_H(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2H} \int_{x-H}^{x+H} \Psi(t)\mathrm{d}t, \quad 0 < H \ll h,$$

где $\Psi(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Big\{ \int\limits_0^x \operatorname{sgn}\big(\cos\frac{\pi t}{h}\big)\mathrm{d}t$, если $0 \leqslant x \leqslant 2ih$; $\int\limits_{2ih}^x \operatorname{sgn}\big(\cos\frac{\pi}{2h}(t - 2ih)\big)\mathrm{d}t$, если $2ih \leqslant x \leqslant 1\Big\}$, $\Psi(x+1) = \Psi(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, на которых при $H \to 0$ проверяется неулучшаемость оценки (7) на C^1.

Следствие 2. Пусть $\varphi(x) = |x|^p$ $(0 < p < \infty)$ и $f(x)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,1]$ функция. Тогда справедливо неравенство

$$\|f - S_N(f)\|_{L_p} \leqslant \frac{h^{1+1/p}}{4(p+1)^{1/p}} \big\{2i\omega^p(f^{(1)}, h) + (2^k - i)2^{p+1}\omega^p(f^{(1)}, 2h)\big\}^{1/p}, \tag{8}$$

которое является неулучшаемым на классе C^1.

Устремляя в (8) p к ∞, получим оценку погрешности приближения произвольной функции $f(x) \in C^1$ частными суммами $S_N(f, x)$ в метрике пространства C

$$\|f - S_N(f)\|_C \leqslant \frac{h}{2} \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(f^{(1)}, h), & \text{если } N = 2^{k+1} \ \ (k \in \mathbb{Z}_+); \\ \omega(f^{(1)}, 2h), & \text{если } N = 2^k + i \ \ (k \in \mathbb{Z}_+; \ \ i = \overline{1, 2^k - 1}), \end{cases}$$

неулучшаемую на классе C^1.

Литература

1. Голубов Б.И. *О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – Т. 28. – № 6. – С. 1271–1296.
2. Faber G. *Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar* // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. – 1910. – V. 19. – P. 104–113.
3. Schauder J. *Zur Theorie Stetiger Abbildungen in Funktionalraumen* // Math. Z. – 1927. – V. 26. – S. 47–65.
4. Ciesielski Z. *On Haar functions and on the Schauder basis of the space* $C_{(0,1)}$ // Bulletin de l'academie Polonaise des Sciences. Serie des sci. math., astr. et phys. – 1959. – V. 7. – № 4. – P. 227–232.
5. Матвеев В.А. *О рядах по системе Шаудера* // Матем. заметки. – 1967. – Т. 2. – № 3. – С. 267–278.
6. Логинов А.С. *Приближение непрерывных функций ломаными* // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6. – № 2. – С. 149–160.
7. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 423 с.

Академия таможенной
службы Украины

Поступила
27.08.2003