ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 3 (526)

УДК 517.444

М.С. БЕСПАЛОВ

ОПЕРАТОРЫ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

1. Введение

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ — последовательность целых положительных чисел, $p_n \geq 2$; $m_0 = 1$ и $m_n = p_n m_{n-1}$. Тогда любое вещественное число $x \geq 0$ можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_{-k} m_{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \tag{1}$$

где $x_{-k} \equiv [\frac{x}{m_{k-1}}] \pmod{p_k}$, $x_k \equiv [x m_k] \pmod{p_k}$, $0 \leq x_{-k}, x_k \leq p_k - 1$, [a] — целая часть числа a и первая сумма в (1) содержит конечное число слагаемых. Записывая аналогично $y \geq 0$, введем групповую операцию $\oplus$ как операцию покоординатного сложения по соответствующему модулю

$$x \oplus y = \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k} m_{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{m_k}, \quad z_k \equiv x_k + y_k \pmod{p_k}, \quad z_{-k} \equiv x_{-k} + y_{-k} \pmod{p_k},$$

и аналогично обратную операцию $\ominus$ покоординатного вычитания. Обобщенные мультипликативные функции $\chi(x, y)$ определим с помощью равенства (см. [1])

$$\chi(x, y) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{-k} y_k + x_k y_{-k}}{p_k}\right). \tag{2}$$

Обозначим через $D(x, \xi) = \int\limits_0^{\xi} \chi(x, u) du$ ядро Дирихле обобщенных мультипликативных функций $\chi(x, y)$. Если $f \in L[0, \infty)$, то (см. [2], с. 129; [3]) функция

$$F(y) = \int_0^{\infty} f(x) \overline{\chi(x, y)} dx \tag{3}$$

существует всюду на $[0, \infty)$, g-непрерывна и при $y \to \infty$ убывает к нулю. Пространство таких функций с нормой максимум модуля будем обозначать $L^{\infty}[0, \infty)$. Функцию $F(y)$ назовем мультипликативным преобразованием Фурье функции $f(x)$ и обозначим $\mathcal{F}[f] = F$, где оператор действует из пространства $L[0, \infty)$ в пространство $L^{\infty}[0, \infty)$.

Замечание. В [2] приводится более общее, чем (2), определение обобщенных мультипликативных функций. Из свойств функций $\chi(x, y)$, которые приводились в [2]–[4], отметим следующее: $\chi(x, y) = \chi_{[x]}(y) \chi_{[y]}(x)$, где $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — периодическая мультипликативная ортонормированная на $[0, 1]$ система функций (которые можно определить для целых n по формуле (2): $\chi_n(x) = \chi(x, n)$), продолженная с периодом единица на полуось $[0, \infty)$. Более общее определение в ([2], с. 33–36) предполагает существование двух (возможно различных) последовательностей $P_1 = \{p_n\}$ и $P_2 = \{p_n^*\}$ образующих чисел, каждая из которых определяет свою групповую операцию $\oplus$ и соответствующую ей периодическую мультипликативную систему функций $\{\chi_n^{(i)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00717).

($i = 1, 2$), и позволяет определить ядро мультипликативного преобразования как скрещенное произведение данных систем $\chi(x, y) = \chi^{(2)}_{[x]}(y)\chi^{(1)}_{[y]}(x)$.

В [2] утверждения из [4] переформулированы для мультипликативных преобразований данного вида. Возможны и дальнейшие обобщения понятия мультипликативного преобразования Фурье, если вместо систем $\{\chi^{(1)}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\chi^{(2)}_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$, скрещенное произведение которых дает ядро $\chi(x, y)$, взять их перестановки, сохраняющие константы Лебега. Для системы Уолша (случай $p_n \equiv 2$) и Крестенсона–Леви (случай $p_n \equiv p \neq 2$) таковыми являются любые линейные перестановки (см. [5]). Для мультипликативной системы с различными образующими числами можно рассматривать только линейные перестановки внутри пачек. В [6] приведены также другие системы функций, обобщающие понятие мультипликативного преобразования Фурье. К перечисленным в замечании обобщениям мультипликативного преобразования Фурье обратимся в конце статьи, где отметим связанные с ними изменения в доказательствах.

Точки $x > 0$, допускающие два различных (конечное и бесконечное) разложения типа (1), назовем p_k-рациональными. Если областью определения считать "модифицированную" полуось $[0, \infty)$, где каждая p_k-рациональная точка x заменена на две точки $x - 0$ и $x + 0$, то мультипликативное преобразование Фурье можно рассматривать как преобразование Фурье на периодической нуль-мерной локально-компактной абелевой группе (определения см., напр., в [6], с. 79).

2. Три вида оператора и их эквивалентность

Для преобразования Фурье на локально-компактных группах в монографии ([7], с. 248–269) рассматривались L^p-преобразования: а именно, оператор $\mathcal{F}$ преобразования Фурье действовал в сопряженное пространство $L^{p'}$, $p' = \frac{p}{p-1}$, и определялся как продолжение с сохранением нормы оператора, рассмотренного на классе финитных функций из L^p. Ограниченность оператора $\mathcal{F}$ при $1 < p < 2$ следовала из неравенства $\|\mathcal{F}[f]\|_{p'} \le \|f\|_p$, которое выводилось с помощью интерполяционной теоремы Рисса–Торина из неравенства $\|\mathcal{F}[f]\|_\infty \le \|f\|_1$ и из формулы Фурье–Планшереля $\|\mathcal{F}[f]\|_2 = \|f\|_2$, доказательство которой см., напр., в [8].

В [4] для мультипликативных преобразований Фурье установлен аналог теоремы Титчмарша для преобразований Фурье (доказательство см. в [2]: 6.1.7, 6.3.1, 6.3.2). Здесь и далее $\|f\|_p = \|f\|_{L^p[0,\infty)}$.

Теорема A. *Если $f \in L^p[0, \infty)$, $1 < p \le 2$, то существует*

$$\mathcal{F}[f](u) = \lim_{a\to\infty}(p') \int_0^a f(x)\overline{\chi(x, u)}dx, \tag{4}$$

выполнено неравенство Хаусдорфа–Юнга $\|\mathcal{F}[f]\|_{p'} \le \|f\|_p$ и почти всюду

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty f(y)\overline{D(y, x)}dy, \tag{5}$$

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \mathcal{F}[f](y)D(y, x)dy. \tag{6}$$

В формуле (4), которую можно считать определением L^p-преобразования, $\lim(p')$ обозначает сходимость в метрике пространства $L^{p'}[0, \infty)$.

Теорема A справедлива и для оператора $\mathcal{F}^{-1}$, формально задаваемого в виде $\mathcal{F}^{-1}[f](u) = \int\limits_0^\infty f(x)\chi(x, u)dx$.

Обобщим понятие L^p-преобразований. Введем три способа определения оператора мультипликативного преобразования Фурье, действующего из пространства $L^p[0, \infty)$ в пространство $L^q[0, \infty)$ при $1 < p, q < \infty$.

Определение 1. Оператором $\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$ назовем такой оператор мультипликативного преобразования Фурье, который функции $f \in L^p[0,\infty)$ ставит в соответствие функцию
$\mathcal{F}_I[f](u) = \lim\limits_{a\to\infty}(q)\int\limits_0^a f(x)\overline{\chi(x,u)}dx.$

Определение 2. Оператором $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$ назовем оператор явного вида (5). То есть $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}[f] = F$, если $f \in L^p[0,\infty)$ и функция $F(u) = \frac{d}{du}\int\limits_0^\infty f(x)\overline{D(x,u)}dx$ принадлежит пространству $L^q[0,\infty)$.

Прежде чем ввести определение оператора $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$, установим теорему о базисе в пространстве $L^p[0,\infty)$.

Утверждение о том, что система функций $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является базисом пространства $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$, вытекает из неравенства

$$\|S_n(f)\|_{L^p[0,1]} \le B_p\|f\|_{L^p[0,1]}, \tag{7}$$

где $S_n(f,x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k(f)\chi_k(k)$ — частная сумма ряда Фурье по системе $\{\chi_k(k)\}$, а B_p — некоторая константа. Это неравенство установлено для системы Уолша в [9], для мультипликативных систем с ограниченными в совокупности образующими числами p_n в [10] и для произвольных мультипликативных систем в [11].

Данные результаты можно распространить на полуось $[0,\infty)$. Определим систему функций $\{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^\infty$ равенством $\psi_{k,n}(x) = \lambda_k(x)\chi_n(x)$, где

$$\lambda_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [k, k+1); \\ 0, & \text{если } x \in [0,k)\bigcup[k+1,\infty). \end{cases}$$

С помощью аналогичной системы в [8] доказана формула Фурье–Паншереля, которая для мультипликативных преобразований Фурье имеет вид

$$\int_0^\infty |f(x)|^2dx = \sum_{k,n=0}^\infty |a_{kn}|^2 = \int_0^\infty |\mathcal{F}[f](u)|^2du,$$
$$a_{kn} = \int_0^\infty f(x)\overline{\psi_{k,n}(x)}dx. \tag{8}$$

Так как двойной ряд сходится абсолютно, то система функций $\{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^\infty$ является ортонормированным базисом пространства $L^2[0,\infty)$.

Для функций из $L^p[0,\infty)$ из неравенства (7) следует существование и единственность представления в виде повторного ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty a_{kn}\psi_{k,n}(x), \tag{9}$$

где равенство и сходимость каждого ряда понимается как сходимость в метрике пространства $L^p[0,\infty)$. Однако подобное определение системы функций с двумя индексами как базиса банахова пространства было бы не корректно.

Назовем правильным методом суммирования двойного ряда $\sum\limits_{k,n=0}^\infty c_{kn}$ любой такой метод последовательного построения частных сумм, при котором не нарушается порядок следования элементов по столбцам и по строкам и каждый элемент c_{kn} достижим за конечное число шагов. Первое требование означает, что частная сумма S_m равна $S_{m-1} + c_{k_0n_0}$, где k_0 и n_0 любые, удовлетворяющие условию: все c_{kn} с номерами $k \le k_0$ и $n \le n_0$ содержатся в сумме S_m. К числу правильных методов суммирования двойных рядов относятся методы суммирования по треугольникам и по прямоугольникам.

Определение 3. Систему функций с двумя индексами $\{f_{k,n}\}_{k,n=0}^{\infty}$ назовем базисом банахова пространства X, если любая функция $f \in X$ представима единственным образом в виде двойного ряда $f = \sum\limits_{k,n=0}^{\infty} a_{kn} f_{k,n}$, сходящегося в метрике пространства X как каждый из повторных рядов и любым правильным методом суммирования двойного ряда.

Теорема 1. *Система функций $\{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$ является ортонормированным базисом пространства $L^p[0,\infty)$ при всех $1 < p < \infty$.*

Доказательство. Ортонормированность системы $\{\psi_{k,n}(x)\}$ на $[0,\infty)$ вытекает из ортонормированности системы $\{\chi_n(x)\}$ на [0,1]:

$$\int_0^{\infty} \psi_{k,n}(x)\overline{\psi_{l,m}(x)}dx = \begin{cases} 1, & \text{если } k = l \text{ и } n = m; \\ 0, & \text{если } k \neq l \text{ или } n \neq m. \end{cases}$$

Теорема будет доказана, если установим следующие два равенства:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} \psi_{k,n}(x), \tag{10}$$

$$f(x) = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{kn} \psi_{k,n}(x), \tag{11}$$

где ряды сходятся в метрике пространства $L^p[0,\infty)$ и двойной ряд (11) суммируется любым правильным методом. Существование разложений (9)–(11) вытекает из формулы (8) вычисления коэффициентов $a_{k,n}$, а единственность разложений (9)–(11) есть следствие утверждения о единственности для рядов по системе $\{\chi_n(x)\}$.

Введем обозначения $h_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{kn}\psi_{k,n}(x) = \Big(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{kn}\lambda_k(x)\Big)\chi_n(x)$ и $f(x,N) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} h_k(x)$.

Так как $|a_{kn}| \le \int\limits_k^{k+1} |f(x)|dx \le \Big(\int\limits_k^{k+1} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$, то $\|h_n\|_p^p = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_{kn}|^p \le \|f\|_p^p < \infty$.

Следовательно, для любого N имеем $f(*,N) \in L^p[0,\infty)$. Из (7) вытекает, что при всех N, K имеем $\|f(*,N)\|_{L^p[K,\infty)} \le B_p\|f\|_{L^p[K,\infty)}$. Поэтому $\|f(*,N) - f(*)\|_{L^p[K,\infty)} \le (B_p+1)\|f\|_{L^p[K,\infty)}$. Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует $K = K(\varepsilon)$, что $\|f\|_{L^p[K,\infty)} \le \frac{\varepsilon}{2(B_p+1)}$.

Для данных ε и K найдется такое $N = N(\varepsilon, K)$, что при всех $k = 0, 1, \ldots, K-1$ и $n \ge N$ имеем $\|f(*,n) - f(*)\|_{L^p[k,k+1]} \le \frac{\varepsilon}{2K}$. Следовательно,

$$\|f(*,n) - f(*)\|_p \le \|f(*,n) - f\|_{L^p[0,K]} + \|f(*,n) - f\|_{L^p[K,\infty)} \le \varepsilon.$$

Равенство (10) доказано.

Рассмотрим один из правильных методов суммирования двойного ряда — метод суммирования по квадратам. Введем следующую нумерацию пар чисел (k,n), изменяющихся от 0 до ∞: если $k < n$, то $l = l(k,n) = n^2 + k$; если $k \ge n$, то $l = l(k,n) = k^2 + k + n$. Очевидно, данное соответствие взаимнооднозначное. Пусть $\psi_l(x) = \psi_{k,n}(x)$ и $a_l = a_{kn}$, где $l = l(k,n)$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_l\psi_l(x)$. Для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$, как и ранее, находим $K = K(\varepsilon)$ и $N = N(\varepsilon, K)$. Пусть $M = \max\{K^2, N^2\}$. Тогда при всех $m \ge M$ выполнено

$$\Big\|f - \sum_{l=0}^{m} a_l\psi_l\Big\|_{L^p[0,K]} + \Big\|f - \sum_{l=0}^{m} a_l\psi_l\Big\|_{L^p[K,\infty)} \le K\frac{\varepsilon}{2K} + (B_p+1)\frac{\varepsilon}{2(B_p+1)} = \varepsilon.$$

Для произвольного правильного метода суммирования, который определяется некоторым взаимнооднозначным соответствием $(k,n) \longrightarrow l(k,n)$, выбираем $M = l(K,N)$. $\square$

Следствие 1. Система функций $\{\overline{\psi_{k,n}(u)}\}_{k,n=0}^{\infty}$ является ортонормированным базисом пространства $L^p[0,\infty)$ при любом $1 < p < \infty$.

Доказательство. Все утверждения, которые использовались, верны для комплексно-сопряженных выражений.

Следствие 2. Оператор мультипликативного преобразования Фурье осуществляет перестановку ортонормированного базиса $\{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$ по формуле $\mathcal{F}[\psi_{k,n}] = \overline{\psi_{n,k}}$, не нарушая свойства базисности системы в пространствах $L^p[0,\infty)$.

Доказательство. Аналогичная формула отмечалась в [8], и ее легко проверить

$$\int_0^{\infty} \psi_{k,n}(x)\overline{\chi(x,y)}dx = \int_k^{k+1} \chi_n(x)\overline{\chi_{[y]}(x)}\ \overline{\chi_{[x]}(y)}dx = \lambda_n(y)\overline{\chi_k(y)} = \overline{\psi_{n,k}(y)}.$$

Для периодических мультипликативных функций имеет место равенство $\chi_{\widetilde{n}}(y) = \overline{\chi_n(y)}$, где $\widetilde{n} \oplus n = 0$. Взаимнооднозначное отображение $n \longrightarrow \widetilde{n}$ есть перестановка натурального ряда.

Теперь можно ввести третий способ определения оператора мультипликативного преобразования Фурье из $L^p[0,\infty)$ в $L^q[0,\infty)$ как оператора мультипликативного преобразования Фурье, использующего разложение произвольной функции $f \in L^p[0,\infty)$ по базису в виде (9)–(11). $\square$

Определение 4. Оператором $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$ назовем оператор мультипликативного преобразования Фурье такой, что для произвольной функции $f \in L^p[0,\infty)$ вида $f(x) = \sum\limits_{k,n=0}^{\infty} a_{kn}\psi_{k,n}(x)$, где a_{kn} вычислены по формуле (8), двойной ряд $\sum\limits_{k,n=0}^{\infty} a_{kn}\overline{\psi_{n,k}(u)}$ есть разложение некоторой функции $F \in L^q[0,\infty)$ по базису $\{\overline{\psi_{n,k}(u)}\}_{n,k=0}^{\infty}$.

Теорема 2. *Операторы $\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$, $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$ как операторы, действующие из пространства $L^p[0,\infty)$ в пространство $L^q[0,\infty)$, где $1 < p, q < \infty$, эквивалентны.*

Доказательство. 1. Пусть $f \in L^p[0,\infty)$ и существует $\mathcal{F}_{\mathrm{I}}[f] \in L^q[0,\infty)$. Если $\|F - F_a\|_q \longrightarrow 0$ при $a \to \infty$, то согласно неравенству Гёльдера при всех $\xi > 0$ имеем $\int\limits_0^{\xi} F(u)du = \lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_0^{\xi} F_a(u)du$.

Поэтому при всех $\xi \geq 0$

$$\int_0^{\xi} \mathcal{F}_{\mathrm{I}}[f](u)du = \lim_{a\to\infty} \int_0^{\xi}\int_0^{a} f(x)\overline{\chi(x,u)}dx = \int_0^{\infty} f(x)\overline{D(x,\xi)}dx.$$

Следовательно, $\mathcal{F}_{\mathrm{I}}[f](u) = \mathcal{F}_{\mathrm{II}}[f](u)$ при почти всех x, а значит, в метрике $L^q[0,\infty)$. Итак, оператор $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$ есть продолжение оператора $\mathcal{F}_{\mathrm{I}}$.

2. Пусть $f \in L^p[0,\infty)$ и существует $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f] \in L^q[0,\infty)$. Для ядра Дирихле известно (см. [2], с. 37; [4]) представление

$$D(x,\xi) = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{[\xi]-1} \chi_n(x) + \{\xi\}\chi_{[\xi]}(x), & \text{если } 0 \leq x < 1; \\ \chi_{[\xi]}(x) \int\limits_0^{\{\xi\}} \chi_{[x]}(y)dy, & \text{если } x \geq 1, \end{cases} \tag{12}$$

которое можно представить в виде

$$D(x,\xi) = \sum_{n=0}^{[\xi]-1} \psi_{0,n}(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^{\{\xi\}} \chi_k(y)dy\right)\psi_{k,[\xi]}(x).$$

Согласно (9) и ортонормированности функций $\psi_{k,n}(x)$ имеем

$$\int_0^{\infty} f(x)\overline{D(x,\xi)}dx = \sum_{n=0}^{[\xi]-1} a_{0n} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^{\{\xi\}} \overline{\chi_k(y)}dy\right)a_{k[\xi]}. \tag{13}$$

Представим $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f]$ в виде повторного ряда типа (9) и вычислим

$$\int_0^{\xi}\mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f](u)du=\sum_{n=0}^{[\xi]-1}\int_n^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}a_{kn}\overline{\psi_{n,k}(u)}du+\int_{[\xi]}^{\xi}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k[\xi]}\overline{\psi_{[\xi],k}(u)}du=$$
$$=\sum_{n=0}^{[\xi]-1}a_{0n}+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int_0^{\{\xi\}}\overline{\chi_k(y)}dy\Big)a_{k[\xi]}.$$

Следовательно, $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}[f]=\mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f]$ в $L^q[0,\infty)$. Итак, оператор $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$ служит продолжением оператора $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$.

3. Пусть $f\in L^p[0,\infty)$ и существует $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}[f]$. Функцию $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}[f](u)$ разложим по базису $\{\overline{\psi_{n,k}(u)}\}_{n,k=0}^{\infty}$ в $L^q[0,\infty)$: $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}[f](u)=\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}d_{kn}\overline{\psi_{n,k}(u)}$. Тогда

$$\int_0^{\xi}\mathcal{F}_{\mathrm{II}}[f](u)du=\sum_{n=0}^{[\xi]-1}d_{0n}+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int_0^{\{\xi\}}\overline{\chi_k(y)}dy\Big)d_{k[\xi]}. \tag{14}$$

Методом математической индукции докажем, что коэффициенты d_{kn} равны коэффициентам a_{kn} разложения функции $f(x)$ по базису $\{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$ в пространстве $L^p[0,\infty)$. Сначала опишем правила вычисления коэффициентов d_{kn}, приравнивая (13) и (14).

Подставляя вместо ξ числа $0,1,2,\dots$, получаем равенства $d_{00}=a_{00}$, $d_{00}+d_{01}=a_{00}+a_{01}$, $d_{00}+d_{01}+d_{02}=a_{00}+a_{01}+a_{02}$ и т. д. Индукция по первому столбцу очевидна. Подставляя числа $\xi=\frac{1}{m_1}$, $\xi=\frac{2}{m_1},\dots,\xi=\frac{m_1-1}{m_1}$, получаем систему из (m_1-1) уравнений с неизвестными $d_{10},d_{20},\dots,d_{m_1-10}$. Первые два из них следующие:

$$\frac{1}{m_1}(d_{00}+\omega d_{10}+\dots+\omega^{m_1-1}d_{m_1-10})=\frac{1}{m_1}(a_{00}+\dots+\omega^{m_1-1}a_{m_1-10}),$$
$$\frac{1}{m_1}(2d_{00}+(\omega+\omega^2)d_{10}+\dots+(\omega^{m_1-1}+\omega^{2(m_1-1)})d_{m_1-10})=\frac{1}{m_1}(2a_{00}+(\omega+\omega^2)a_{10}+\cdots),$$

где $\omega=\exp\big(-\frac{2\pi i}{m_1}\big)$. Если из каждой последующей строки вычесть предыдущую, умножить на m_1 и перенести вправо слагаемые с уже вычисленным коэффициентом d_{00}, то получим систему уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix}\omega & \omega^2 & \dots & \omega^{m_1-1}\\ \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(m_1-1)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega^{m_1-1} & \omega^{2(m_1-1)} & \dots & \omega^{(m_1-1)(m_1-1)}\end{pmatrix},$$

ранг которой равен m_1-1. Следовательно, система уравнений имеет единственное решение $d_{k0}=a_{k0}$ при $k=1,2,\dots,m_1-1$.

Аналогично рассуждаем, подставляя числа $\xi=1+\frac{1}{m_1}$, $\xi=1+\frac{2}{m_1},\dots,\xi=1+\frac{m_1-1}{m_1}$. Получим, что $d_{k1}=a_{k1}$ при $k=1,2,\dots,m_1-1$. И так далее для остальных столбцов исходной матрицы $(d_{kn})_{k,n=0}^{\infty}$.

Далее, подставляя числа вида $\xi=\frac{s}{m_2}$, где в качестве s берем все не делящиеся на p_2 числа от 1 до m_2-1, находим следующие (m_2-m_1) неизвестных: $d_{k0}=a_{k0}$ при $k=m_1,m_1+1,\dots,m_2-1$. При этом пользуемся тем, что получаемая (после переноса в правую часть уравнений столбцов с уже вычисленными коэффициентами d_{kn}) матрица невырождена, т. к. является частью матрицы дискретного мультипликативного преобразования Фурье (см. [1]). И так далее.

Порядок вычисления коэффициентов d_{kn} можно организовать по квадратам $(d_{kn})_{k,n=0}^{m_s-1}$.

Так как $d_{kn}=a_{kn}$ при всех $k,n\geq 0$, то из (13), (14) вытекает, что $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}[f]=\mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f]$ в метрике пространства $L^q[0,\infty)$. Итак, оператор $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$ есть продолжение оператора $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$. Значит, операторы $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$ и $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$ эквивалентны.

4. Пусть $f \in L^p[0,\infty)$ и существует $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f]$, т. е. справедливы разложения (9)–(11) и аналогично для $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f]$ с теми же коэффициентами a_{kn}. Если

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in [0,M); \\ 0 & \text{при } x \in [M,\infty), \end{cases}$$

то $F(u,M) = \mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f_M](u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{M-1} a_{kn}\overline{\psi_{n,k}(u)}$.

Отметим, что $f_M \in L[0,\infty)$ и для $f_M(x)$ существует мультипликативное преобразование Фурье (3), которое почти всюду на $[0,\infty)$ совпадает с функцией $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f_M](u)$. Это следует из эквивалентности операторов $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$ и $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$ и того, что при $p=1$ остаются в силе все утверждения теоремы A за исключением (6).

Обозначим $h_k(u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{kn}\overline{\psi_{n,k}(u)}$. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство сходимости повторного ряда (10) в теореме 1. Так как $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f] \in L^q[0,\infty)$, то при всех k имеем $h_k \in L^q[0,\infty)$, при всех M имеем $F(\cdot,M) \in L^q[0,\infty)$ и $\|F(\cdot,M) - \mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f]\|_q \to 0$ при $M \to \infty$. $\square$

3. Оператор кручения (четвертый вид)

В [12] (а в [13], [14] для преобразований более общего вида) найдены собственные функции оператора $\mathcal{F}$ мультипликативного преобразования Фурье и перечислены все его собственные значения: 1, i, -1, $-i$. Выделим два основных случая мультипликативных преобразований Фурье, для которых действие оператора $\mathcal{F}$ в базисе из собственных функций имеет разный вид.

Сначала изучим наиболее простой и интересный с практической точки зрения случай преобразования Уолша (образующие числа тождественно равны двум), когда рассматриваются пространства действительнозначных функций.

Теорема 3. *Пространство $L^2[0,\infty)$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных дополнений $L^2[0,\infty) = L^2_+[0,\infty) \oplus L^2_-[0,\infty)$, инвариантных относительно оператора $\mathcal{F}$ преобразования Уолша: $\mathcal{F}[f] = f$ для любой $f \in L^2_+[0,\infty)$ и $\mathcal{F}[f] = -f$ для любой $f \in L^2_-[0,\infty)$; $L^2_+[0,\infty)$ есть образ оператора $(I+\mathcal{F}) : L^2[0,\infty) \to L^2[0,\infty)$, а пространство $L^2_-[0,\infty)$ есть образ оператора $(I-\mathcal{F}) : L^2[0,\infty) \to L^2[0,\infty)$, где I — тождественный оператор; система функций $\{\psi_{n,n}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{k,n}+\psi_{n,k})\}_{k,n=0\ (k<n)}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $L^2_+[0,\infty)$, а система функций $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{k,n}-\psi_{n,k})\}_{k,n=0\ (k<n)}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L^2_-[0,\infty)$.*

Доказательство. В случае преобразований Уолша функции $\psi_{k,n}(x)$ принимают значения 0, 1 и -1. Поэтому $\mathcal{F}[\psi_{n,k}] = \psi_{k,n}$ и, следовательно, $\mathcal{F}^2[f] = f$ для любой $f \in L^2[0,\infty)$. Тогда $(I+\mathcal{F})\mathcal{F} = (\mathcal{F}+I)$, $(I-\mathcal{F})\mathcal{F} = -(I-\mathcal{F})$. Представим произвольную $f \in L^2$ в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 = 1/2(f+\mathcal{F}[f])$, $f_2 = 1/2(f-\mathcal{F}[f])$. Тогда $\mathcal{F}[f_1] = f_1$ и $\mathcal{F}[f_2] = -f_2$, а

$$4(f_1,f_2) = (f+\mathcal{F}[f], f-\mathcal{F}[f]) = f^2 - (\mathcal{F}[f])^2 = 0.$$

Согласно равенству Парсеваля переход от безусловного ортонормированного базиса $\{\psi_{n,k}\}_{k,n=0}^{\infty}$ пространства $L^2[0,\infty)$ к безусловному ортонормированному базису $\{g^+_{nn}, g^+_{kn}, g^-_{kn}\}_{k,n=0\ (k<n)}^{\infty}$, где $g^+_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{k,n}+\psi_{n,k})$, $g^+_{nn} = \psi_{n,n}$, $g^-_{kn} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{k,n}-\psi_{n,k})$, очевиден. Пространство $L^2_+[0,\infty)$ является замыканием линейной оболочки $\{\ g^+_{kn}\}$, а пространство $L^2_-[0,\infty)$ является замыканием линейной оболочки $\{g^-_{kn}\}$.

Отметим, что операторы $P_+ = 1/2(I+\mathcal{F})$, $P_- = 1/2(I-\mathcal{F})$ суть операторы ортогонального проектирования в $L^2[0,\infty)$ на пространства $L^2_+[0,\infty)$ и $L^2_-[0,\infty)$ соответственно. А именно, $P^2_+ = P_+$, $P^2_- = P_-$, $P_+(P_-) = 0$, $\ker P_+ = L^2_-[0,\infty)$, $\ker P_- = L^2_+[0,\infty)$, $\operatorname{Im} P_+ = L^2_+[0,\infty)$,

$\operatorname{Im} P_- = L^2_-[0,\infty)$. Действия проекторов на функциях базиса:

$$P_+[\psi_{k,n}] = P_+[\psi_{n,k}] = \frac{1}{\sqrt{2}} g^+_{kn}, \quad P_+[\psi_{n,n}] = \psi_{n,n} = g^+_{nn},$$
$$P_-[\psi_{k,n}] = \frac{1}{\sqrt{2}} g^-_{kn}, \quad P_-[\psi_{n,k}] = -\frac{1}{\sqrt{2}} g^-_{kn}, \quad P_-[\psi_{n,n}] = 0.$$

Данный базис из собственных функций преобразования Уолша предложен в [15]. Введем нумерацию $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ этого базиса. Пусть $v_0 = \psi_{0,0}$, $v_{n^2+2n} = \psi_{n,n}$, $v_{n^2+2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{k,n} + \psi_{n,k})$, $v_{n^2+2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{k,n} - \psi_{n,k})$, где $0 \le k < n$.

Теорема 4. *Система функций $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L^p[0,\infty)$ при любом $1 < p < \infty$.*

При $p \neq 2$ этот базис не является безусловным.

Доказательство. Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ найдем n из условия $n^2 \le m < (n+1)^2$. Если $c_i = \int\limits_0^{\infty} f(x) v_i(x)dx$ — коэффициенты Фурье по системе $\{v_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, то частные суммы по этой же системе имеют вид

$$V_m(f;x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i v_i(x) = V_{n^2}(f;x) + \sum_{i=n^2}^{m-1} c_i v_i(x)$$

(сумма отсутствует, если верхний индекс меньше нижнего).

Коэффициенты c_i выражаются через коэффициенты Фурье по системе $\{\psi_{n,k}\}_{k,n=0}^{\infty}$:

$$c_i = \begin{cases} a_{nn}, & \text{если } i = n^2 - 1,\ n \in \mathbb{N}; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{kn} + a_{nk}), & \text{если } i = n^2 + 2k,\ k,n \in \mathbb{N},\ k < n; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{kn} - a_{nk}), & \text{если } i = n^2 + 2k + 1,\ k,n \in \mathbb{N},\ k < n. \end{cases}$$

Отсюда $c_{n^2+2j} v_{n^2+2j} + c_{n^2+2j+1} v_{n^2+2j+1} = a_{jn}\psi_{j,n} + a_{nj}\psi_{n,j}$.

Следовательно, $V_{n^2}(f) = \sum\limits_{i=0}^{n^2-1} c_i v_i(x) = \sum\limits_{l,j=0}^{n-1} a_{lj}\psi_{l,j} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} S_n(f_i;x)$, где $f_i(x) = f(x)\lambda_i(x)$.

Для номеров вида $m = n^2 + 2k$, где $0 < k < n$, частная сумма

$$V_m(f) = V_{n^2}(f) + \sum_{j=0}^{k-1} (a_{jn}\psi_{j,n} + a_{nj}\psi_{n,j}) = \sum_{i=0}^{k-1} S_{n+1}(f_i) + \sum_{i=k}^{n-1} S_n(f_i) + S_k(f_n)$$

соответствует одному из методов суммирования по квадратам, доказательство для которого приведено в теореме 1. Так как $a_{kn} \to 0$ при стремлении хотя бы одного из индексов к ∞, то добавление промежуточных номеров $m = n^2 + 2k + 1$ не влияет на сходимость $V_m(f;x)$ к $f(x)$ в $L^p[0,\infty)$.

Для преобразований Уолша введем функции

$$\varphi_{-n}(x) = \begin{cases} 2^n, & \text{если } x \in [0, 2^{-n}); \\ 0, & \text{если } x \in [2^{-n}, \infty), \end{cases} \qquad \varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, 2^n); \\ 0, & \text{если } x \in [2^n, \infty). \end{cases}$$

В этих обозначениях $\mathcal{F}[\varphi_{-n}] = \varphi_n$, $\mathcal{F}[\varphi_n] = \varphi_{-n}$, т. к. $\varphi_{-n} = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} \psi_{0,k}$, $\varphi_n = \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} \psi_{k,0}$.

Функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}} \varphi_{-n}(x)$ служит примером функции такой, что $f \in L^p[0,\infty)$ при $1 < p < 2$, $f \notin L^2[0,\infty)$, $\mathcal{F}[f] \in L^q[0,\infty)$ при $q > 2$, $\mathcal{F}[f] \notin L^2[0,\infty)$. Следовательно, функции $f_1 = P_+[f]$, $f_2 = P_-[f]$ не принадлежат пространству $L^p[0,\infty)$ при любом p. $\square$

Теперь рассмотрим случай мультипликативного преобразования Фурье, для которого все образующие числа нечетные. К этому случаю относятся, в частности, преобразования Крестенсона–Леви с образующими числами $p_n \equiv p$, где $p \neq 2$ простое. В этом случае каждая пачка чисел от m_{r-1} до $m_r - 1$ включительно делится на две равные полупачки: левая — от m_{r-1} до $M_{r-1} - 1$, правая — от M_{r-1} до $m_r - 1$, где $M_{r-1} = m_{r-1}(\frac{p_r+1}{2})$.

Обозначим через $\widetilde{k}$ унарную операцию вычисления обратного элемента относительно операции $\oplus$: $k \oplus \widetilde{k} = 0$. Очевидно, $\widetilde{\widetilde{k}} = k$. Необходимость рассмотрения двух случаев возникла именно из-за отличия данной операции при четных и нечетных образующих числах.

Лемма 1. *Если $k \neq 0$, то $k \neq \widetilde{k}$. При этом числа k, $\widetilde{k}$ находятся в разных половинах (левой и правой) одной и той же пачки.*

Доказательство вытекает из анализа старших разрядов в формуле (1) для данных чисел.

В этих обозначениях формула $\mathcal{F}[\psi_{k,n}] = \overline{\psi_{n,k}}$ из следствия 2 примет вид $\mathcal{F}[\psi_{k,n}] = \psi_{n,\widetilde{k}}$.

Следовательно, оператор $\mathcal{F}$ мультипликативного преобразования Фурье есть оператор четвертого порядка: $\mathcal{F}^4 = \mathrm{I}$ — тождественный оператор. А именно, $\mathcal{F} : \psi_{k,n} \to \psi_{n,\tilde{k}} \to \psi_{\tilde{k},\tilde{n}} \to \psi_{\tilde{n},k} \to \psi_{k,n}$.

Лемма 2. *Орбита $\omega(k,n)$ любого нетривиального ($k^2 + n^2 \neq 0$) элемента $\psi_{k,n}(x)$ стандартного базиса относительно оператора $\mathcal{F}$ состоит ровно из четырех различных функций $\omega(k,n) = \{\psi_{k,n}(x), \psi_{n,\tilde{k}}(x), \psi_{\tilde{k},\tilde{n}}(x), \psi_{\tilde{n},k}(x)\}$.*

Доказательство проведем, анализируя индексы.

Случай $k = 0$: $(0,n), (n,0), (0,\widetilde{n}), (\widetilde{n},0)$ — различные пары чисел. Случай $n = 0$ дает тот же набор пар: $(k,0), (0,\widetilde{k}), (\widetilde{k},0), (0,k)$. Случай $k = n$: $(n,n), (n,\widetilde{n}), (\widetilde{n},\widetilde{n}), (\widetilde{n},n)$ — различные пары чисел. Случай $k = \widetilde{n}$ дает тот же набор пар.

Общий случай — $k \neq 0$, $n \neq 0$, $k \neq n$, $k \neq \widetilde{n}$ проверяется по предыдущей лемме.

Принадлежность к одной орбите для функций стандартного базиса есть отношение эквивалентности, которое позволяет разбить все функции базиса на классы эквивалентности $\omega(k,n)$.

Обозначим через $\omega_{k,n} = \{(k,n), (n,\widetilde{k}), (\widetilde{k},\widetilde{n}), (\widetilde{n},k)\}$ соответствующие классы эквивалентности на множестве пар целых неотрицательных чисел, тривиальный класс $\omega_{0,0} = \{(0,0)\}$. Остальные классы эквивалентности перенумеруем одной из этих пар по следующему правилу. Класс $\omega_{k,n}$ считаем записанным в канонической форме, если

1) $k < m_{r-1} \leq n < \widetilde{n}$ (для случая индексов из разных пачек),
2) $k < \widetilde{k}$ и $n < \widetilde{n}$ (для случая индексов из одной пачки $m_{r-1} \leq k, \widetilde{k}, n, \widetilde{n} < m_r$). При этом пару (k,n) назовем канонической. Множество всех канонических пар (включая тривиальную) обозначим Г. Тогда

$$\bigcup_{k=0}^{M_{r-1}-1} \bigcup_{n=m_{r-1}}^{M_{r-1}-1} \omega(k,n) = \{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{m_r-1} \setminus \{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{m_{r-1}-1},$$

где $M_{r-1} = m_{r-1}(\frac{p_r+1}{2})$. Следовательно, $\bigcup_{(k,n)\in\Gamma} \omega(k,n) = \{\psi_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$.

Теорема 3′. *Пространство $L^2[0,\infty)$ можно представить в виде прямой суммы четырех взаимно ортогональных пространств функций*

$$L^2[0,\infty) = L_0^2 \oplus L_1^2 \oplus L_2^2 \oplus L_3^2,$$

инвариантных относительно оператора $\mathcal{F}$ как преобразования из $L^2[0,\infty)$ в $L^2[0,\infty)$: $\mathcal{F}[f] = (-i)^l f$ для любой $f \in L_l^2$, $l = 0,1,2,3$.

Операторы $\mathcal{A}_l = 1/4(I + i^l\mathcal{F} + (i^l\mathcal{F})^2 + (i^l\mathcal{F})^3)$ являются проекторами (идемпотентными эрмитовыми операторами) из пространства $L^2[0,\infty)$ на пространства L_l^2 соответственно.

Ортонормированным базисом пространства L^2_l служит система функций $\{g^{(l)}_{k,n}\}$, где $l = 0,1,2,3$, пары (k,n) пробегают множество канонических значений Γ с одним исключением, тривиальной паре $(0,0)$ соответствует одна функция $g^{(0)}_{0,0} = \psi_{0,0}$, а для остальных $g^{(l)}_{k,n} = 2\mathcal{A}_l[\psi_{k,n}]$.

Доказательство. Так как оператор $\mathcal{F}$ действует из $L^2[0,\infty)$ в $L^2[0,\infty)$, то и операторы $\mathcal{A}_l$ действуют из $L^2[0,\infty)$ в $L^2[0,\infty)$. Обозначим $L^2_l = \operatorname{Im}\mathcal{A}_l$. Заметим, что $I = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$.

Равенство Планшереля $(f,g) = (\mathcal{F}[f],\mathcal{F}[g])$ влечет $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$, откуда вследствие равенства $\mathcal{F}^4 = I$ получаем $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^3$, $(\mathcal{F}^3)^* = \mathcal{F}$, $(\mathcal{F}^2)^* = \mathcal{F}^2$.

Следовательно, операторы $\mathcal{A}_l$ эрмитовы:

$$\mathcal{A}^*_l = 1/4(I^* + (i^l\mathcal{F})^* + ((i^l\mathcal{F})^2)^* + ((i^l\mathcal{F})^3)^*) = 1/4(I + (-i)^l(\mathcal{F})^3 + ((-i)^l\mathcal{F})^2 + (-i)^{3l}\mathcal{F}) = \mathcal{A}_l.$$

Рассмотрим композицию операторов $\mathcal{A}_l$ и $\mathcal{A}_j$:

$$\mathcal{A}_l\mathcal{A}_j = 1/16(I + i^l\mathcal{F} + i^{2l}\mathcal{F}^2 + i^{3l}\mathcal{F}^3 + i^j\mathcal{F} + i^{l+j}\mathcal{F}^2 + i^{2l+j}\mathcal{F}^3 + i^{3l+j}\mathcal{F}^4 + i^{2j}\mathcal{F}^2 + i^{l+2j}\mathcal{F}^3 +$$
$$+ i^{2l+2j}\mathcal{F}^4 + i^{3l+2j}\mathcal{F}^5 + i^{3j}\mathcal{F}^3 + i^{l+3j}\mathcal{F}^4 + i^{2l+3j}\mathcal{F}^5 + i^{3l+3j}\mathcal{F}^6) = 1/4(1 + i^{j-l} + i^{2(j-l)} + i^{3(j-l)})\mathcal{A}_l.$$

Следовательно, операторы $\mathcal{A}_l$ ортогональны ($\mathcal{A}_l\mathcal{A}_j = 0$ если $l \neq j$) и идемпотентны ($(\mathcal{A}_l)^2 = \mathcal{A}_l$). Согласно ([7], B57) операторы $\mathcal{A}_l$ проективные.

Аналогично проверяется, что

$$\mathcal{F}\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0, \quad \mathcal{F}\mathcal{A}_1 = -i\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{F}\mathcal{A}_2 = -\mathcal{A}_2, \quad \mathcal{F}\mathcal{A}_3 = i\mathcal{A}_3.$$

Легко проверить, что ортонормированный базис пространства $L^2[0,\infty)$ (предложенный в [13]) из собственных функций

$$g^{(0)}_{0,0} = \psi_{0,0}, \quad g^{(l)}_{k,n} = 2\mathcal{A}_l[\psi_{k,n}] = 1/2(\psi_{k,n}(x) + i^l\psi_{n,\tilde{k}}(x) + i^{2l}\psi_{\tilde{k},\tilde{n}}(x) + i^{3l}\psi_{\tilde{n},k}(x)),$$

где $(k,n) \in \Gamma \setminus (0,0)$, для каждого $l = 0,1,2,3$ составляет ортонормированный базис соответствующего пространства L^2_l. $\square$

Итак, установили, что оператор $\mathcal{F}$ есть оператор кручения в $L^2[0,\infty)$. Для любой $f \in L^2[0,\infty)$ существует представление $f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$ такое, что $f_l = \mathcal{A}_l[f] \in L^2_l \subset L^2[0,\infty)$ и $\mathcal{F}[f] = f_0 + if_1 - f_2 - if_3$, $\mathcal{F}^2[f] = f_0 - f_1 + f_2 - f_3$, $\mathcal{F}^3[f] = f_0 - if_1 - f_2 + if_3$. Будем считать, что это четвертая форма оператора $\mathcal{F}$, наиболее удобная и наглядная в пространстве $L^2[0,\infty)$. Однако в пространствах $L^p[0,\infty)$ она не применима, что иллюстрируется аналогичным примером, как и для преобразования Уолша, т. к. функции f_l не обязаны принадлежать $L^p[0,\infty)$ при $p \neq 2$.

Справедливо аналогичное спектральное разложение ([16], с. 316) оператора обычного преобразования Фурье как оператора кручения.

Предложим нумерацию $\{v_n(x)\}_{n=0}^\infty$ базиса пространства $L^2[0,\infty)$ из собственных функций оператора $\mathcal{F}$: $v_{2m_{r-1}(p_r-1)k+4n+m^2_{r-1}-4m_{r-1}+l} = g^{(l)}_{k,n}$, где $(k,n) \in \Gamma \setminus (0,0)$, $v_0 = \psi_{0,0}$.

Теорема 4′. *Система функций $\{v_n(x)\}_{n=0}^\infty$ является базисом пространства $L^p[0,\infty)$ при любом $1 < p < \infty$.*

При $p \neq 2$ этот базис не является безусловным.

Схема доказательства. Выделим частные суммы по системе $\{v_n(x)\}$, являющиеся частными суммами по системе $\{\psi_{k,n}(x)\}$ по квадратам: $V_{m^2_r}(f;x) = \sum\limits_{i,j=0}^{m_r-1} a_{ij}\psi_{i,j}(x)$. Они совпадают с усреднением m_r-срезки функции f по интервалам r-го ранга.

Для предложенной нумерации ведущим индексом соответствующей канонической пары (k,n) считаем k, который фиксирует выбранный целочисленный интервал. Для частных сумм с промежуточными (между m^2_{r-1} и m^2_r) номерами возможны три различных случая: $k = 0$, $1 \leq k < m_{r-1}$, $m_{r-1} \leq k < M_{r-1}$. В силу равенства $\psi_{n,\tilde{k}} = \overline{\psi_{n,k}}$ отдельные частные суммы на отдельных целочисленных интервалах рассматриваем по сопряженной системе, которая также является системой сходимости в L^p. При $k = 0$ на начальном интервале идет чередование $1, \widetilde{1}, 2, \widetilde{2}, \ldots, p_1 - 1, \widetilde{(p_1 - 1)}, \ldots$ Поэтому $V_s - V_{m_{r-1}^2}$ рассматриваем на нулевом интервале как две частные суммы по основной и сопряженной системам, которые анализируем как суммы по различным подпачкам и внутри симметричных подпачек. Для случая $1 \le k < m_{r-1}$ основная модельная ситуация возникает для номера, предшествующего номеру, соответствующему канонической паре $(M_{r-2}, 0)$, когда на всех целочисленных интервалах участка $[1, m_{r-1})$ берутся частные суммы по полупачкам (слева начальные полупачки, а справа конечные полупачки). Этот случай сводится к правильному методу суммирования по прямоугольникам, если на интервалах справа рассматривать частные суммы вида $S_{m_r} + S_{m_{r-1}} - S_{M_{r-1}}$, а не $S_{M_{r-1}}$, как слева. В третьем случае используется тот же прием с той разницей, что на отдельном интервале переход на сопряженную систему не в середине пачки, а в произвольной точке.

4. Единственность, замкнутость и неограниченность оператора

Теорема единственности L^p-преобразований (для преобразований Фурье на локально-компактных группах) приведена в [7]. Для операторов мультипликативных преобразований Фурье, действующих из пространства $L^p[0,\infty)$ в пространство $L^q[0,\infty)$, $1 < p, q < \infty$, установим следующие две теоремы единственности.

Теорема 5. *Если $f \in L^p[0,\infty)$ и $\mathcal{F}[f](u) = 0$ в метрике пространства $L^q[0,\infty)$, где $1 < p, q < \infty$, то $f(x) = 0$ в метрике пространства $L^p[0,\infty)$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}$ и применим свойство единственности разложения функций из $L^q[0,\infty)$ по базису $\{\psi_{n,k}(u)\}_{k,n=0}^{\infty}$. Для $p = 1$ и $q = \infty$ теорема 5 установлена в [8].

Теорема 6. *Пусть $f \in L^p[0,\infty) \bigcap L^r[0,\infty)$ и $F_1(u) = \mathcal{F}[f](u)$ для оператора $\mathcal{F} : L^p[0,\infty) \to L^q[0,\infty)$, а $F_2(u) = \mathcal{F}[f](u)$ для оператора $\mathcal{F} : L^r[0,\infty) \to L^s[0,\infty)$, где $1 < p, q, r, s < \infty$. Тогда $F_1(u)$ почти всюду на $[0,\infty)$ совпадает с $F_2(u)$.*

Доказательство следует из применения оператора $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$.

Теорема 6 остается в силе, если $p = 1$, $q = \infty$ и рассмотрен $\mathcal{F}$ вида (3). Аналогично доказываются теоремы единственности для оператора $\mathcal{F}^{-1}$.

При $1 < p \le 2$ оператор L^p-преобразования, т. е. действующий в сопряженное пространство, является непрерывным, его норма равна 1. Действительно, в [4] показана неулучшаемость неравенства Хаусдорфа–Юнга $\|\mathcal{F}[f]\|_{p'} \le \|f\|_p$ для мультипликативных преобразований Фурье. В ([7], с. 730) отмечено, что любая L^p-максимальная функция имеет вид (в наших обозначениях) $\lambda\chi(x,y)\varphi_{n,l}(x)$. Здесь λ — произвольное комплексное число, $y \in [0,\infty)$, n целое, а l целое неотрицательное. Функции $\varphi_{n,l}(x)$ определим на $[0,\infty)$ при $k \ge 0$:

$$\varphi_{k,l}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in I_{-k}(l) = [lm_k, (l+1)m_k); \\ 0, & \text{если } x \notin I_{-k}(l), \end{cases}$$
$$\varphi_{-k,l}(x) = \begin{cases} m_k, & \text{если } x \in I_k(l) = [\frac{l}{m_k}, \frac{l+1}{m_k}); \\ 0, & \text{если } x \notin I_k(l). \end{cases} \tag{15}$$

Далее (теорема 8) установим, что при $p \ne q'$ или $p > 2$ оператор $\mathcal{F}$ из $L^p[0,\infty)$ в $L^q[0,\infty)$ является неограниченным. Покажем также, что при всех $1 < p, q < \infty$ оператор $\mathcal{F}$ замкнутый.

Теорема 7. *Пусть $\|f_k - f\|_p \to 0$ и $\|F_k - F\|_q \to 0$ при $k \to \infty$, где $F_k = \mathcal{F}[f_k]$. Тогда $F = \mathcal{F}[f]$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathcal{F}_{\mathrm{II}}$. Так как $D(\cdot,\xi) \in L^p[0,\infty)$ при $1 < p < \infty$ (см. [2], [4]), то согласно неравенству Гёльдера $\left|\int\limits_0^\infty [f_k(x) - f(x)]\overline{D(x,\xi)}dx\right| \le \|f_k - f\|_p \|\overline{D(\cdot,\xi)}\|_{p'}$ при $k \to \infty$ для всех $\xi \ge 0$ имеет место сходимость $\int\limits_0^\xi \mathcal{F}[f_k](u)du \to \int\limits_0^\infty f(x)\overline{D(x,\xi)}dx$.

С другой стороны, т. к. $F(u) = \lim\limits_{k\to\infty}(q)F_k(u)$, то $\int\limits_0^\xi F_k(u)du \to \int\limits_0^\xi F(u)du$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\int\limits_0^\xi F(u)du = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{D(x,\xi)}dx$ при всех $\xi \ge 0$. Значит, $F(u) = \mathcal{F}_{\mathrm{II}}[f](u)$.

Теорема 8. *Для любого* $1 < p < \infty$ *существуют функции* $f, g \in L^p[0,\infty)$ *такие, что*

а) *для всех* $\varepsilon > 0$ *имеем* $f \notin L^{p-\varepsilon}[0,\infty)$ *и* $g \notin L^{p+\varepsilon}[0,\infty)$;

б) $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \in L^{p'}[0,\infty)$;

в) *для всех* $\delta > 0$ *имеем* $\mathcal{F}[f] \notin L^{p'+\delta}[0,\infty)$, $\mathcal{F}[g] \notin L^{p'-\delta}[0,\infty)$.

Для любого $q > 2$ *существует* $\varphi \in L^q[0,\infty)$ *такая, что* $\mathcal{F}[\varphi] \notin L^{q'}[0,\infty)$. *Более того, функцию* $\varphi(x)$ *можно выбрать так, что для всех* $1 \le r \le \infty$ *выполнено* $\mathcal{F}[\varphi] \notin L^r[0,\infty)$.

Доказательство. Будем использовать обозначение интервалов n-го ранга $I_n(l)$ и функций $\varphi_n(x) = \varphi_{n,0}(x)$ из (15). Согласно предыдущей теореме о замкнутости оператора $\mathcal{F}$ искомые функции можно представить в виде рядов по функциям $\varphi_n(x)$. Пусть $a_n \ge 0$ и $\sum\limits_{n=0}^\infty a_n < \infty$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n\varphi_n(x)$. Обозначим $d_\nu = \sum\limits_{k=\nu}^\infty a_k$. Тогда $f(x) = d_\nu$, если $x \in [m_{\nu-1}, m_\nu)$, и $f(x) = d_0$, если $x \in [0,1)$.

Поэтому $f \in L^p[0,\infty)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty |f(x)|^p dx = d_0^p + \sum_{\nu=1}^\infty (m_\nu - m_{\nu-1})d_\nu^p < \infty. \tag{16}$$

Требование $f \notin L^{p-\varepsilon}[0,\infty)$ эквивалентно условию

$$\sum_{\nu=1}^\infty (m_\nu - m_{\nu-1})d_\nu^{p-\varepsilon} = \infty. \tag{17}$$

Так как при $n \ge 0$ имеем $\varphi_n = \sum\limits_{k=0}^{m_n-1}\psi_{k,0}$, $\varphi_{-n} = \sum\limits_{k=0}^{m_n-1}\overline{\psi_{0,k}}$, то $\mathcal{F}[\varphi_n] = \varphi_{-n}$ и $\mathcal{F}[\varphi_{-n}] = \varphi_n$. Поэтому $\mathcal{F}[f](u) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n\varphi_{-n}(u)$ или $\mathcal{F}[f](u) = \sum\limits_{s=0}^k a_s m_s$ при $u \in [\frac{1}{m_{k+1}}, \frac{1}{m_k})$. Следовательно,

$$\int_0^\infty |\mathcal{F}[f](u)|^q du = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k+1}}\right)\left(\sum_{s=0}^k a_s m_s\right)^q. \tag{18}$$

Для искомой функции $f(x)$, заданной последовательностью $d_k = k^{-1}m_k^{\frac{-1}{p}}$, выполнено (16) и (17): $\sum\limits_{\nu=1}^\infty (m_\nu - m_{\nu-1})d_\nu^p < \sum\limits_{\nu=1}^\infty \frac{1}{\nu^p} < \infty$,

$$\sum_{\nu=1}^\infty (m_\nu - m_{\nu-1})d_\nu^{p-\varepsilon} = \sum_{\nu=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{p_\nu}\right)\frac{m_\nu^\varepsilon}{\nu^{p-\varepsilon}} = \infty.$$

Так как $a_k = d_k - d_{k+1}$, то $a_k m_k < d_k m_k$. Далее

$$d_{k-1}m_{k-1} = \frac{k}{k-1}p_k^{\frac{-1}{p'}}d_k m_k \le \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)2^{\frac{-1}{p'}}d_k m_k.$$

Поэтому при $k \ge k_0$, где k_0 фиксировано,

$$\sum_{s=0}^{k} d_s m_s \le C_1(k_0) + \sum_{s=k_0}^{k} \Big(1 + \frac{1}{k_0 - 1}\Big) 2^{\frac{k_0-k}{p'}} d_k m_k \le C_2 d_k m_k.$$

Отсюда

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{p'}^{p'} \le \sum_{k=0}^{k_0-1} \Big(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k+1}}\Big)\Big(\sum_{s=0}^{k} d_s m_s\Big)^{p'} +$$

$$+ \sum_{k=k_0}^{\infty} \Big(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k+1}}\Big)(C_2 d_k m_k)^{p'} \le C_3 + C_4 \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{p'}} < \infty.$$

С другой стороны,

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{p'+\delta}^{p'+\delta} \ge \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k+1}}\Big)\Big(\frac{m_k^{1-\frac{1}{p}}}{k} - \frac{m_k^{1-\frac{1}{p}}}{(k+1)p_{k+1}^{\frac{1}{p}}}\Big)^{p'+\delta} \ge$$

$$\ge \sum_{k=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{p_{k+1}}\Big) m_k^{\frac{\delta}{p'}} \Big(\frac{1}{k(k+1)}\Big)^{p'+\delta} = \infty.$$

Пусть $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_{-n}(x)$, где $d_k = k^{-1} m_k^{\frac{-1}{p'}}$. Тогда $\mathcal{F}[g](u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(u)$ и задача сводится к уже рассмотренной функции $f(x)$.

Пусть $q > 2$ и $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, где $a_n = n^{\frac{-1}{q'}} m_n^{\frac{-1}{q}}$. Тогда $a_{n+1} = \frac{1}{p_{n+1}^{\frac{1}{q}}} (\frac{n}{n+1})^{\frac{1}{q'}} a_n < 2^{\frac{-1}{q}} a_n$ и, следовательно, $d_\nu = \sum\limits_{k=\nu}^{\infty} a_k < \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{-k}{q}} a_\nu = (1 - 2^{\frac{-1}{q}})^{-1} a_\nu$. Поэтому

$$\|\varphi\|_q^q = d_0^q + \sum_{\nu=1}^{\infty} (m_\nu - m_{\nu-1}) d_\nu^q \le d_0^q + \sum_{\nu=1}^{\infty} (m_\nu - m_{\nu-1})(m_\nu \nu^{\frac{q}{q'}})^{-1} (1 - 2^{\frac{-1}{q}})^{-q} < \infty.$$

С другой стороны,

$$\|\mathcal{F}[\varphi]\|_{q'}^{q'} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k+1}}\Big)\Big(\sum_{s=1}^{k} a_s m_s\Big)^{q'} \ge \sum_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{p_{k+1}}\Big) \frac{1}{m_k} \Big(\frac{m_k^{1-\frac{1}{q}}}{k^{\frac{1}{q'}}}\Big)^{q'} \ge \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Сумма построенных выше функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ есть пример функции, формально вычисленное мультипликативное преобразование Фурье которой не принадлежит ни одному из пространств $L^r[0, \infty)$. $\square$

5. О равенстве Планшереля

Теорема 9. *Если $f, G \in L^p[0, \infty)$, $1 \le p \le 2$, то выполнено обобщенное равенство Планшереля $\int\limits_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx = \int\limits_0^\infty F(x)\overline{G(x)}dx$, где $F(x) = \mathcal{F}[f](x)$ и $g(x) = \mathcal{F}^{-1}[G](x)$.*

Доказательство (в [4] более подробное). При $p = 1$ очевидно,

$$\int_0^\infty \overline{G(x)} \Big(\int_0^\infty f(y)\overline{\chi(y,x)}dy\Big) dx = \int_0^\infty f(y) \Big(\int_0^\infty \overline{G(x)}\ \overline{\chi(y,x)}dx\Big) dy.$$

Если $1 < p \le 2$, то $\mathcal{F}[f](x) = \lim\limits_{a\to\infty}(p')F(x,a)$, где $F(x,a) = \int\limits_0^a f(u)\overline{\chi(u,x)}du$. В равенстве $\int\limits_0^b F(x,a)\overline{G(x)}dx = \int\limits_0^a f(u)\overline{g(u,b)}du$, где $g(u,b) = \int\limits_0^b G(x)\chi(u,x)dx$, перейдем к пределу по $a \to \infty$, затем по $b \to \infty$.

Замечание. Если $p>2$, то теорема 9 неверна. А именно, существуют $f,G\in L^p[0,\infty)$ такие, что $g=\mathcal{F}^{-1}[G]\notin L^{p'}[0,\infty)$ и $f\overline{g}\notin L[0,\infty)$. При построении примера полагаем $p_k=\mathrm{const}$.

Пусть $f(x)=(\frac{m_k}{k\ln^2 k})^{\frac{1}{p}}$, если $x\in[\frac{1}{m_{k+1}},\frac{1}{m_k})$, $k=2,3,\ldots$, и $f(x)=0$, если $x\in[\frac{1}{m_2},\infty)$. Пусть $g(x)=(\frac{m_k}{k})^{\frac{1}{p'}}$, если $x\in[\frac{1}{m_{k+1}},\frac{1}{m_k})$, $k=1,2,3,\ldots$, и $g(x)=0$, если $x\in[\frac{1}{m_1},\infty)$.

Тогда $\|f\|_p^p=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{m_k}{k\ln^2 k}(\frac{1}{m_k}-\frac{1}{m_{k+1}})<\infty$, $\|g\|_{p'}^{p'}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{m_k}{k}(\frac{1}{m_k}-\frac{1}{m_{k+1}})=\infty$, но $g\in L^{p'-\varepsilon}$ для $\varepsilon>0$.

Если для $g(x)$ воспользуемся представлением $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_{-n}(x)$, то $\sum\limits_{k=1}^{n}a_km_k=(\frac{m_n}{n})^{\frac{1}{p'}}$ и $\mathcal{F}[g](u)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(u)$ (существует как мультипликативное L^2-преобразование). Обозначим $G(u)=\mathcal{F}[g](u)$.

Сравним с функцией $\varphi(x)$ из доказательства теоремы 8. Заметим, что $G(u)\le\varphi(u)$ на $[0,\infty)$, т.к. из условия $a_nm_n<\sum\limits_{k=1}^{n}a_km_k$ следует $a_n<\frac{1}{m_n^{\frac{1}{p}}n^{\frac{1}{p'}}}$. Тогда $\|G\|_p^p\le\|\varphi\|_p^p<\infty$.

Так как $f(x)g(x)=\frac{m_k}{k}\frac{1}{(\ln k)^{\frac{2}{p}}}$, если $x\in[\frac{1}{m_{k+1}},\frac{1}{m_k})$, $k=2,3,\ldots$, то

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{m_k}{k(\ln k)^{\frac{2}{p}}}\cdot(\frac{1}{m_k}-\frac{1}{m_{k+1}})=\infty.$$

6. Об обобщениях мультипликативного преобразования Фурье

Проанализируем доказанные теоремы для мультипликативного преобразования Фурье с ядром в виде скрещенного произведения различных систем $\chi(x,y)=\chi^{(2)}_{[x]}(y)\chi^{(1)}_{[y]}(x)$.

Тогда в теореме 1 и в следствии 1 рассматриваем две системы функций $\{\psi^{(i)}_{k,n}(x)\}_{k,n=0}^{\infty}$ отдельно (где $\psi^{(i)}_{k,n}(x)=\lambda_k(x)\chi^{(i)}_n(x)$, $i=1,2$) и системы сопряженных с ними функций. В следствии 2 отмечаем, что $\mathcal{F}[\psi^{(1)}_{k,n}]=\overline{\psi^{(2)}_{n,k}}$. Соответственно в определении 4 требуем: если $f(x)=\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}a_{kn}\psi^{(1)}_{k,n}(x)$, то $\mathcal{F}_{\mathrm{III}}[f](u)=\sum\limits_{k,n=0}^{\infty}a_{kn}\overline{\psi^{(2)}_{n,k}(u)}$. Формула (12) примет вид (1.5.38) из [2]. Теоремы 2, 5–7, 9 практически не изменяются. В теореме 8 числа m_n в формулах (16)–(18) и в определении функций $\varphi_n(x)$ нужно строить по последовательности P_2. Теоремы 3, 4 для существенно различных базисов не формулируются.

Это замечание (кроме последнего предложения) остается в силе, если вместо систем $\{\chi^{(1)}_n(x)\}$, $\{\chi^{(2)}_m(y)\}$ рассмотрим (при построении скрещенного произведения) системы $\{w^{(1)}_n(x)\}$, $\{w^{(2)}_m(y)\}$, являющиеся линейными перестановками соответствующих систем. При доказательстве нужно ввести (показано в [5]) сохраняющие меру отображения $T_i:[0,\infty)\mapsto[0,\infty)$ такие, что $w^{(i)}_n(x)=\chi^{(i)}_n(T_ix)$.

Если системы $\{w^{(i)}_n(x)\}$ при $i=1$ и $i=2$ совпадают, то все приведенные теоремы практически остаются без изменения. Если в скрещенном произведении возьмем различные перестановки одной и той же системы, то формулировки теорем 3 и $3'$ изменятся существенно, и зависят от вида перестановки. Например, для скрещенного произведения систем Уолша–Пэли и Уолша–Уолша оператор не будет иметь конечный порядок.

Данные результаты с соответствующими видоизменениями можно перенести на Λ-мультипликативные преобразования Фурье, рассмотренные в [13],[14]. Отдельные результаты данной статьи приведены в [17].

Литература

1. Ефимов А.В., Каракулин А.Ф. *О континуальном аналоге периодических мультипликативных ортонормированных систем* // ДАН СССР. – 1974. – Т. 218. – № 2. – С. 268–271.

2. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения.* – М.: Наука, 1987. – 344 с.
3. Ефимов А.В., Золотарева С.Ю. *Мультипликативный интеграл Фурье и его дискретные аналоги* // Analysis Mathematica. – 1979. – № 5. – С. 179-199.
4. Беспалов М.С. *Мультипликативные преобразования Фурье в L^p*. – Моск. ин-т. – М., 1981. – 21 с.– Деп. в ВИНИТИ 08.01.81, № 100-82.
5. Беспалов М.С. *Перестановки систем Уолша, сохраняющие константы Лебега* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68. – Вып. 1. – С. 36–48.
6. Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах.* – Баку: Элм, 1981. – 180 с.
7. Хьюитт Э., Росс К. *Абстрактный гармонический анализ.* Т. 2. – М.: Мир, 1975. – 902 с.
8. Виленкин Н.Я. *К теории интегралов Фурье на топологических группах* // Матем. сб. – 1952. – Т. 30. – С. 233–244.
9. Paley R. *A remarkable system of orthogonal functions* // Proc. London. Math. Soc. – 1932. – V. 34. – P. 241–279.
10. Watari C. *On generalized Walsh-Fourier series* // Tohoku Math. J. – 1958. – V. 10. – № 3. – P. 211–241.
11. Young W.-S. *Mean convergence of generalized Walsh–Fourier series* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 218. – P. 311–320.
12. Поспелов А.С. *О собственных функциях мультипликативных преобразований Фурье* // Применение функционального анализа в теории приближений. Межвед. сб. науч. тр. – Калинин, КГУ, 1987. – С. 83–90.
13. Поспелов А.С. *О собственных функциях p-адического и дискретного преобразования Фурье* // Матем. моделир. – 1990. – Т. 2. – № 10. – С. 120–131.
14. Ефимов А.В., Поспелов А.С., Умняшкин С.В. *Некоторые свойства мультипликативных ортонормированных систем, используемые в цифровой обработке сигналов* // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. – 1997. – Т. 219. – С. 137–182.
15. Pal J. *The eigenfunctions of the Walsh-Fourier transform* // Proc. Int. Conf. Approximation and Functions Spaces. – Gdansk, 1979 (1981). – P. 553–557.
16. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* – М.: Мир, 1979. – 587 с.
17. Беспалов М.С. *Об операторах мультипликативных преобразований Фурье.* – Моск. ин-т. – М., 1983. – 27 с.– Деп. в ВИНИТИ 25.10.83, № 5826–83.

Владимирский государственный университет

Поступила
25.02.2004