ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 12 (439)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

Е.В. АКСЕНЮШКИНА

МЕТОД ИГОЛЬЧАТОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

1. Введение. Постановка задачи

В настоящее время задачи оптимального управления без ограничений на фазовые переменные в вычислительном отношении обеспечены сравнительно хорошо (методы игольчатой линеаризации и их модификации [1], методы квадратично-игольчатой аппроксимации [2], процедуры квазиградиентного типа [3]). В задачах с терминальными ограничениями на состояние методы игольчатого варьирования, связанные с принципом максимума, разработаны в [4], [5]. Слабым местом в их структуре является процедура варьирования, которая в плане реализации носит слишком "разрывный" характер и не может быть признана удовлетворительной. В данной работе для построения методов в задачах с ограничениями используется современная техника игольчатого варьирования, необходимым элементом которой является характеристическая функция множества варьирования. В результате получен и обоснован в принципиальном варианте метод с двумя вспомогательными подзадачами, которые позволяют провести улучшение по двум функционалам, определяющим качество каждого приближения в исследуемой задаче.

Рассмотрим управляемый процесс ($u(t) \in R^r$ — управление, $x(t) \in R^n$ — фазовое состояние), который на заданном промежутке $T = [t_0, t_1]$ описывается с помощью динамической системы

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0. \tag{1}$$

Введем множество доступных управлений

$$V = \{u \in L^r_\infty(T) : u(t) \in U,\ t \in T\}. \tag{2}$$

Это измеримые вектор-функции $u(t)$, $t \in T$, с ограничением типа включения относительно компакта $U \subset R^r$. На множестве V определим набор функционалов

$$\Phi_i(u) = \phi_i(x(t_1)) + \int_T F_i(x(t), u(t), t)dt, \quad i = \overline{0, m}, \tag{3}$$

и поставим задачу оптимального управления

$$\Phi_0(u) \to \min, \quad \Phi_i(u) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad u \in V. \tag{4}$$

Предположим, что задача (1)–(4) является гладкой по фазовым переменным (функции $f(x, u, t)$, $\phi_i(x)$, $F_i(x, u, t)$ непрерывно дифференцируемы по $x \in R^n$) и непрерывной по управлению и времени (функции $f(x, u, t)$, $F_i(x, u, t)$ непрерывны по $u \in U$, $t \in T$).

Введем функционал, характеризующий невязку выполнения ограничений-равенств в задаче (4)

$$\Phi(u) = \max_{1 \le i \le n} |\Phi_i(u)|.$$

Управление $u \in V$ назовем допустимым в задаче (4), если $\Phi(u) = 0$ (все ограничения выполнены).

Определим необходимые конструкции, связанные с задачей (4). Пусть $u(t)$, $t \in T$, — доступное управление с фазовой траекторией $x(t)$. Для каждого функционала (3) определим функцию Понтрягина $H^i(\psi^i, x, u, t) = \langle \psi^i, f(x, u, t)\rangle - F_i(x, u, t)$ вместе с решением $\psi^i(t)$ сопряженной системы $\dot{\psi}^i = -H^i_x(\psi^i, x(t), u(t), t)$, $\psi^i(t_1) = -\nabla\phi_i(x(t_1))$. Будем использовать обозначение $\Delta_{v(t)}H^i[t] = H^i(\psi^i(t), x(t), v(t), t) - H^i(\psi^i(t), x(t), u(t), t)$, где $v \in V$. Пусть $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — вектор множителей Лагранжа в задаче (4) с условием $\lambda_0 = 0 \vee 1$. Введем общую сопряженную вектор-функцию $\psi(t, \lambda) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \psi^i(t)$ и соответствующую функцию Понтрягина $H(\lambda, \psi, x, u, t) = \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i H^i(\psi^i, x, u, t)$. Понятно, что $\psi(t, \lambda)$ определяется системой $\dot{\psi} = -H_x(\lambda, \psi, x, u, t)$, $\psi(t_1) = -\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i \nabla\phi_i(x(t_1))$, причем $H(\lambda, \psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x, u, t)\rangle - \sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i F_i(x, u, t)$. Примем обозначение

$$\Delta_{v(t)}H[t, \lambda] = H(\lambda, \psi(t, \lambda), x(t), v(t), t) - H(\lambda, \psi(t, \lambda), x(t), u(t), t).$$

Отметим, что функция H обслуживает функционал Лагранжа в задаче (4)

$$L(u, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \Phi_i(u).$$

Определение. Будем говорить, что допустимое управление $u(t)$, $t \in T$, является экстремальным в задаче (4), если найдется ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_0 = 0 \vee 1$, обеспечивающий условие максимума

$$\Delta_v H[t, \lambda] \le 0, \quad v \in U, \quad t \in T \quad (u(t) = \arg\max_{v \in U} H(\lambda, \psi(t, \lambda), x(t), v, t),\ t \in T).$$

Согласно принципу максимума оптимальное управление является экстремальным в задаче (4). Наша цель состоит в итерационном отыскании экстремальных управлений на основе последовательной линеаризации задачи с помощью игольчатых вариаций управления. Соответствующий метод работает в классе доступных управлений и ориентирован на последовательное уменьшение функционалов $\Phi(u)$, $L(u, \lambda)$ на основе решения специальных вспомогательных задач.

2. Вспомогательные задачи метода

Пусть $u(t)$, $t \in T$, — доступное управление в задаче (4). Оформим процедуру его игольчатого варьирования следующим образом [1], [2]:

$$u_{v,\chi}(t) = u(t) + \chi(t)(v(t) - u(t)), \quad t \in T,$$
$$v \in V,\ \ \chi \in X_\alpha,\ \ \alpha \in [0, 1],$$
$$X_\alpha = \left\{\chi \in L_\infty(T) : \chi(t) = 0 \vee 1,\ \ \int_T \chi(t)dt = \alpha(t_1 - t_0)\right\}.$$

Здесь $\chi(t)$, $t \in T$, — функция варьирования с двумя возможными значениями, параметр α обеспечивает "игольчатую" локальность варьирования по мере: $\alpha(t_1 - t_0) = \mathrm{mes}\,\{t \in T : \chi(t) = 1\}$.

Соответствующие приращения функционалов (3) представляются в виде [1]

$$\Phi_i(v_{v,\chi}) - \Phi_i(u) = \delta\Phi_i(u, v, \chi) + o_i(\alpha), \quad i = 0, \ldots, m, \tag{5}$$

где $\delta\Phi_i$ — игольчатая вариация (аппроксимация) функционала Φ_i, которая выражается по формуле

$$\delta\Phi_i(u, v, \chi) = -\int_T \chi(t)\Delta_{v(t)}H^i[t]dt.$$

Отметим, что величина $\delta\Phi_i$ имеет порядок $\alpha : |\delta\Phi_i| \le C\alpha$.

Аналогично, приращение функционала Лагранжа с вектором множителей λ аппроксимируется в виде

$$L(u_{v,\chi},\lambda) - L(u,\lambda) = \delta L(u,\lambda,v,\chi) + o(\alpha),$$
$$\delta L(u,\lambda,v,\chi) = -\int_T \chi(t)\Delta_{v(t)}H[t,\lambda]dt.$$

Зафиксируем α и перейдем к построению вспомогательной задачи в вариациях (δ-задача) относительно параметров $v \in V$, $\chi \in X_\alpha$. В качестве целевого функционала δ-задачи естественно выбрать вариацию $\delta\Phi_0(u,v,\chi)$. По части ограничений поставим задачу поиска параметров варьирования v, χ таким образом, чтобы обеспечить уменьшение модуля каждого функционала Φ_i, $i = 1,\dots,m$, на величину порядка α. В формальном исполнении это требование имеет вид $\Phi_i(u_{v,\chi}) = (1-\alpha)\Phi_i(u) + o_i(\alpha)$, $i = 1,\dots,m$. Понятно, что в регулярном случае ($\Phi_i(u) \ne 0$) для малых $\alpha \in (0,1]$ функционал Φ_i сохраняет знак ($\operatorname{sign}\Phi_i(u_{v,\chi}) = \operatorname{sign}\Phi_i(u)$) и уменьшается по модулю ($|\Phi_i(u_{v,\chi})| < |\Phi_i(u)|$).

В итоге, с учетом представления (5), формулируется следующая задача в вариациях:

$$\delta\Phi_0(u,v,\chi) \to \min, \quad \delta\Phi_i(u,v,\chi) = -\alpha\Phi_i(u), \quad i = 1,\dots,m, \ \ v \in V, \ \ \chi \in X_\alpha.$$

Здесь $u \in V$ — базовое управление, $\alpha \in [0,1]$ — параметр. Учитывая выражения для вариаций $\delta\Phi_i$ и определение X_α, представим δ-задачу в интегральной форме

$$\int_T \chi(t)\Delta_{v(t)}H^0[t]dt \to \max, \quad v \in V, \ \ \chi \in X,$$
$$\int_T \chi(t)\Delta_{v(t)}H^i[t]dt = \alpha\Phi_i(u), \quad i = 1,\dots,m,$$
$$\int_T \chi(t)dt = \alpha(t_1 - t_0).$$

Здесь $X = \{\chi \in L_\infty(T) : \chi(t) = 0 \vee 1\}$.

Построенная задача отвечает заявленным требованиям, однако по части численного решения представляется трудоемкой в силу смешанного характера подынтегральных выражений (композиция параметров варьирования v и χ). Проведем декомпозицию δ-задачи с сохранением цели ее построения. Полагая $\alpha = 1$ ($\chi(t) \equiv 1$), получаем первую вспомогательную задачу на поиск управления $v(t)$ (δ_1-задача)

$$\int_T H^0(\psi^0(t),x(t),v(t),t)dt \to \max, \quad v \in V,$$
$$\int_T H^i(\psi^i(t),x(t),v(t),t)dt = \Phi_i(u) + \int_T H^i[t]dt, \quad i = 1,\dots,m.$$

Пусть $\overline{u}(t)$ ($t \in T$) — ее решение, $\overline{\lambda} = (\overline{\lambda}_0,\dots,\overline{\lambda}_m)$, $\overline{\lambda}_0 = 0 \vee 1$, — соответствующий вектор множителей. Согласно принципу максимума

$$\overline{u}(t) = \arg\max_{v\in U}\left(\sum_{i=0}^{m}\overline{\lambda}_i H^i(\psi^i(t),x(t),v,t)\right) = \arg\max_{v\in U} H(\overline{\lambda},\psi(t,\overline{\lambda}),x(t),v,t), \quad t \in T.$$

Образуем вспомогательные функции

$$g_i(t) = \Delta_{\overline{u}(t)}H^i[t], \quad i = 1,\dots,m, \quad g(t,\overline{\lambda}) = \Delta_{\overline{u}(t)}H[t,\overline{\lambda}]$$

и введем величину

$$\delta(u) = \int_T g(t,\overline{\lambda})dt.$$

Тогда в соответствии с δ_1-задачей

$$\int_T g_i(t)dt = \Phi_i(u), \quad i = 1, \ldots, m, \quad \delta(u) \geq 0.$$

Сформулируем вторую вспомогательную задачу на поиск функции варьирования $\chi(t)$ (δ_2-задача)

$$\int_T \chi(t)g(t,\overline{\lambda})dt \to \max, \quad \chi \in X,$$
$$\int_T \chi(t)g_i(t)dt = \alpha\Phi_i(u), \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\int_T \chi(t)dt = \alpha(t_1 - t_0).$$

Отметим, что здесь в качестве целевого функционала, в отличие от δ-задачи, фигурирует вариация функционала Лагранжа $\delta L(u, \overline{\lambda}, \overline{u}, \chi)$. Ограничения δ_2-задачи получены из соответствующих ограничений δ-задачи при $v(t) = \overline{u}(t)$, $t \in T$. Подчеркнем, что δ_2-задача зависит от параметра $\alpha \in [0, 1]$.

Пусть $\chi_\alpha(t)$ — решение δ_2-задачи. Образуем α-параметрическое семейство управлений варьирования

$$u_\alpha(t) = u(t) + \chi_\alpha(t)(\overline{u}(t) - u(t)), \quad t \in T.$$

Понятно, что $u_\alpha(t)$ выделяется из $u_{v,\chi}$ при $v = \overline{u}(t)$, $\chi = \chi_\alpha(t)$. Изучим свойства управления $u_\alpha(t)$ по части уменьшения функционалов $\Phi(u)$, $L(u, \lambda)$, связанных с задачей (4).

3. Свойство улучшения

Рассмотрим функционалы $\Phi_i(u)$, $i = 1, \ldots, m$. Согласно формуле приращения (5), с учетом ограничений δ_2-задачи получаем $\Phi_i(u_\alpha) - \Phi_i(u) = -\int\limits_T \chi_\alpha(t)g_i(t)dt + o_i(\alpha) = -\alpha\Phi_i(u) + o_i(\alpha)$. Отсюда $|\Phi_i(u_\alpha)| \leq (1-\alpha)|\Phi_i(u)| + |o_i(\alpha)| \leq (1-\alpha)\Phi(u) + \overline{o}(\alpha)$, $\overline{o}(\alpha) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} |o_i(\alpha)|$. Следовательно, $\Phi(u_\alpha) \leq (1-\alpha)\Phi(u) + \overline{o}(\alpha)$.

Таким образом, в случае $\Phi(u) > 0$ (управление $u \in V$ не допустимо) управление u_α при достаточно малых $\alpha > 0$ обеспечивает спуск по функционалу $\Phi(u) : \Phi(u_\alpha) - \Phi(u) \leq -\alpha\Phi(u) + \overline{o}(\alpha)$.

Получим оценку снизу для значения δ_2-задачи. С этой целью применим лемму Ляпунова [6] к вектор-функции $p(t) = (g(t, \overline{\lambda}), g_1(t), \ldots, g_m(t), 1)$: для любого $\alpha \in (0, 1)$ найдется такая функция $\chi(t, \alpha) \in X$, что

$$\int_T \chi(t, \alpha)p(t)dt = \alpha \int_T p(t)dt.$$

Итак, функция $\chi(t, \alpha)$ является допустимой в δ_2-задаче, причем

$$\int_T \chi(t, \alpha)g(t, \overline{\lambda})dt = \alpha \int_T g(t, \overline{\lambda})dt = \alpha\delta(u).$$

Поскольку $\chi_\alpha(t)$ — решение δ_2-задачи, то

$$\int_T \chi_\alpha(t)g(t, \overline{\lambda})dt \geq \int_T \chi(t, \alpha)g(t, \overline{\lambda})dt.$$

Рассмотрим приращение функционала Лагранжа с вектором множителей $\overline{\lambda}$

$$L(u_\alpha, \overline{\lambda}) - L(u, \overline{\lambda}) = -\int_T \chi_\alpha(t)g(t, \overline{\lambda})dt + o(\alpha) \leq -\alpha\delta(u) + o(\alpha).$$

Предположим, что $\delta(u) > 0$ (управление $u(t)$ не удовлетворяет условию максимума функции $H(\overline{\lambda}, \psi(t, \overline{\lambda}), x(t), v, t)$). Тогда управление $u_\alpha(t)$ для малых $\alpha > 0$ обеспечивает спуск по функционалу $L(u, \overline{\lambda})$.

Подведем итог. Вспомогательные задачи δ_1, δ_2 позволяют построить семейство управлений $u_\alpha \in V$, $\alpha \in (0,1]$, со свойством локального (для малых $\alpha > 0$) улучшения по двум функционалам $\Phi(u)$, $L(u,\overline{\lambda})$:

$$\Phi(u_\alpha) < \Phi(u) \quad (\text{если } \Phi(u) > 0), \quad L(u_\alpha,\overline{\lambda}) < L(u,\overline{\lambda}) \quad (\text{если } \delta(u) > 0).$$

В случаях $\Phi(u) = 0$ или $\delta(u) = 0$ уменьшения соответствующего функционала не происходит (и не требуется).

Таким образом, в рамках предлагаемой итерационной процедуры качество каждого доступного управления $u \in V$ оценивается с помощью двух критериев: невязки $\Phi(u)$ по ограничениям, невязки $\delta(u)$ по условию максимума. Предельный случай $\Phi(u) = 0$, $\delta(u) = 0$ означает, что u — экстремальное управление в задаче (4). Цель итерации — уменьшить функционалы $\Phi(u)$, $L(u,\overline{\lambda})$ — достигается за счет специальной структуры вспомогательных задач δ_1, δ_2. Для облегчения процедуры можно использовать комбинированный критерий — модифицированный функционал Лагранжа $M(u) = L(u,\overline{\lambda}) + \Phi(u)$.

Литература

1. Антоник В.Г., Срочко В.А. *К решению задач оптимального управления на основе методов линеаризации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32. – № 7. – С. 979–991.
2. Срочко В.А. *Метод квадратичной фазовой аппроксимации для решения задач оптимального управления* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 12. – С. 81–88.
3. Срочко В.А., Мамонова Н.В. *Квазиградиентный метод решения задач оптимального управления* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 12. – С. 84–91.
4. Срочко В.А., Хамидулин Р.Г. *Метод последовательных приближений в задачах оптимального управления с краевыми условиями* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26. – № 4. – С. 508–520.
5. Срочко В.А. *Применение принципа максимума для численного решения задач оптимального управления с терминальными ограничениями* // Кибернетика. – 1986. – № 1. – С. 73–77.
6. Аваков А.Р. *Необходимые условия минимума для нерегулярных задач в банаховых пространствах* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 185. – С. 3–29.

Иркутский государственный университет

Поступила 05.11.1997