ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 11 (450)

УДК 517.9

Н.Г. БИЛЬЧЕНКО, К.Г. ГАРАЕВ, В.А. ОВЧИННИКОВ

ГРУППА СИММЕТРИИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ НЕРАВНОВЕСНО ДИССОЦИИРУЮЩЕГО ГАЗА

В рамках точных уравнений пограничного слоя большинство работ посвящено оптимальному управлению движением несжимаемой жидкости; оптимальные же задачи вязкого сжимаемого газа рассмотрены в единичных публикациях (подробнее об этом см. [1]).

Данная работа представляет собой одну из попыток продвижения в область высоких скоростей и температур. В математической модели оптимальной неразрушающейся тепловой защиты поверхностей в гиперзвуковом вязком потоке неравновесно диссоциирующего газа в качестве минимизирующего функционала выступает интегральный тепловой поток, передаваемый от горячего газа к криволинейной пористой стенке, в качестве ограничений — мощность системы охлаждения и суммарный расход охладителя (газа того же состава, что и в набегающем потоке) через пористый или перфорированный участок обтекаемой поверхности, в качестве управляющего воздействия — удельный расход охладителя [2].

С математической точки зрения рассматриваемая оптимальная задача представляет собой двумерную вариационную задачу типа Майера, к которой принадлежит широкий круг оптимальных задач аэрогидродинамики.

В статье [3] для такого рода задач был предложен теоретико-групповой подход к конструированию законов сохранения (дивергентных форм) и первых интегралов для сопряженных систем относительно множителей Лагранжа, основанный на совместном использовании инфинитезимального аппарата Ли–Овсянникова [4], [5] и теории инвариантных вариационных задач [6].

В [7] была дана конкретизация этого подхода применительно к задаче оптимизации тепломассообмена в сверхзвуковом потоке совершенного газа.

1. О группе, допускаемой системой уравнений ламинарного пограничного слоя неравновесно диссоциирующего газа

Ставится задача отыскания группы Ли непрерывных локальных преобразований [5], допускаемой системой уравнений

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi}+w\frac{\partial u}{\partial h}=-f(H,\alpha)\frac{\partial p}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\varphi(H,\alpha)\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}=0,$$

$$u\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}+w\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}=\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\widetilde{A}(H,\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\Big)+\widetilde{W}_A(H,\alpha), \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial H}{\partial \xi}+w\frac{\partial H}{\partial \eta}=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial \eta}\Big[\varphi(H,\alpha)\frac{\partial H}{\partial \eta}\Big]+\Big(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Big)\frac{\partial}{\partial \eta}\Big[\varphi(H,\alpha)u\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big]+\Big(1-\frac{1}{\mathrm{Le}}\Big)\frac{\partial}{\partial \eta}\Big[\widetilde{D}(H,\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\Big]$$

гиперзвукового ламинарного пограничного слоя неравновесно диссоциирующего газа [2] с граничными условиями

$$
\begin{gathered}
u=0,\;\; w=w(\xi),\;\; H=H_w(\xi),\;\; \alpha=0\;\; \text{(каталитическая стенка)},\\
\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\right)_w=0\;\; \text{(некаталитическая стенка)}\;\; (\eta=0,\;\;\xi>0);\\
u=U_e(\xi),\;\; H=H_e(\xi),\;\; \alpha=\alpha_e(\xi)\;\; (\eta=\infty);\\
u=U_0(\eta),\;\; H=H_0(\eta),\;\; \alpha=\alpha_0(\eta)\;\; (\xi=0,\;\;\eta>0)
\end{gathered}
$$

при различных видах произвольных элементов $\varphi(H,\alpha)$, $\widetilde{A}(H,\alpha)$, $\widetilde{D}(H,\alpha)$, $\widetilde{W}_a(H,\alpha)$, $f(H,\alpha)$, $p(\xi)$, входящих в эту систему. В дальнейшем во избежание путаницы при составлении инфинитезимальных операторов переменные ξ и η заменены на s и t.

Построение общего решения определяющих уравнений дает следующий результат для координат инфинитезимального оператора:

$$
\begin{gathered}
\xi^s=a_1s+a_2,\quad \xi^t=bt+\theta(s),\\
\xi^u=cu,\quad \xi^w=(c-a_1+b)w+u\theta'(s),\\
\xi^H=d_1H+d_2,\quad \xi^\alpha=g_1\alpha+g_2,
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

где $\theta(s)$ — произвольная функция, a_1, a_2, b, c, d_1, d_2, g_1, g_2 — постоянные. Функции $\varphi(H,\alpha)$, $\widetilde{A}(H,\alpha)$, $\widetilde{D}(H,\alpha)$, $\widetilde{W}_a(H,\alpha)$, $f(H,\alpha)$, $g(s)$ $(g(s)=\frac{dp(s)}{ds})$ удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{gathered}
\varphi(c-a_1+2b)-(d_1H+d_2)\frac{\partial\varphi}{\partial H}-(g_1\alpha+g_2)\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0,\\
\widetilde{A}(c-a_1+2b)-(d_1H+d_2)\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial H}-(g_1\alpha+g_2)\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\alpha}=0,\\
\widetilde{W}_a(c-a_1+g_1)-(d_1H+d_2)\frac{\partial\widetilde{W}_a}{\partial H}-(g_1\alpha+g_2)\frac{\partial\widetilde{W}_a}{\partial\alpha}=0,\\
\left(1-\frac{1}{\mathrm{Le}}\right)\left[\widetilde{D}(c-a_1+2b+d_1-g_1)-(d_1H+d_2)\frac{\partial\widetilde{D}}{\partial H}-(g_1\alpha+g_2)\frac{\partial\widetilde{D}}{\partial\alpha}\right]=0,\\
\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\varphi(d_1-2c)=0,\\
g(s)\left[f(2c-a_1)-(d_1H+d_2)\frac{\partial f}{\partial H}-(g_1\alpha+g_2)\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right]-(a_1s+a_2)fg'(s)=0.
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

Уравнения (1.3) показывают, что ядро основных алгебр Ли образовано бесконечномерным оператором

$$
X_\infty=\theta(s)\frac{\partial}{\partial t}+u\theta'(s)\frac{\partial}{\partial w}. \tag{1.4}
$$

Этот оператор и соответствующие ему преобразования допускаются при любых функциях $\varphi(H,\alpha)$, $\widetilde{A}(H,\alpha)$, $\widetilde{D}(H,\alpha)$, $\widetilde{W}_a(H,\alpha)$, $f(H,\alpha)$, $g(s)$ и параметрах Pr и Le.

Общее преобразование эквивалентности состоит из всех преобразований, соответствующих ядру основных алгебр Ли (1.4), и из девятипараметрического семейства преобразований при $\mathrm{Pr}\neq 1$ (с независимыми вещественными параметрами A_1, A_2, B_1, C_1, E_1, E_2, F_1, F_2, G_2) вида

$$
\begin{gathered}
\overline{s}=A_1s+A_2,\quad \overline{t}=B_1t,\quad u=C_1\overline{u},\quad w=A_1B_1^{-1}C_1\overline{w},\\
p=E_1\overline{p}+E_2,\quad \alpha=F_1\overline{\alpha}+F_2,\quad \varphi=A_1B_1^{-2}C_1\overline{\varphi},\\
\widetilde{A}=A_1B_1^{-2}C_1\overline{\widetilde{A}},\quad \widetilde{W}_a=A_1C_1F_1\overline{\widetilde{W}}_a,\quad f=C_1^2E_1^{-1}\overline{f},
\end{gathered}
$$

$$H = C_1^2\overline{H} + G_2, \quad \widetilde{D} = A_1 B_1^{-2} C_1^3 F_1^{-1}\overline{\widetilde{D}} \ \ (\text{если} \ \ \mathrm{Le} \neq 1)$$

или из десятипараметрического семейства преобразований при $\mathrm{Pr} = 1$ (с независимыми вещественными параметрами A_1, A_2, B_1, C_1, E_1, E_2, F_1, F_2, G_1, G_2) вида

$$\overline{s} = A_1 s + A_2, \quad \overline{t} = B_1 t, \quad u = C_1\overline{u}, \quad w = A_1 B_1^{-1} C_1 \overline{w},$$
$$p = E_1\overline{p} + E_2, \quad \alpha = F_1\overline{\alpha} + F_2, \quad \varphi = A_1 B_1^{-2} C_1 \overline{\varphi},$$
$$\widetilde{A} = A_1 B_1^{-2} C_1 \overline{\widetilde{A}}, \quad \widetilde{W}_a = A_1 C_1 F_1 \overline{\widetilde{W}}_a, \quad f = C_1^2 E_1^{-1}\overline{f},$$
$$H = G_1\overline{H} + G_2, \quad \widetilde{D} = A_1 B_1^{-2} C_1 F_1^{-1} G_1 \overline{\widetilde{D}} \ \ (\text{если} \ \ \mathrm{Le} \neq 1),$$

где $A_1 B_1 C_1 E_1 F_1 G_1 \neq 1$.

Уравнения (1.3) показывают, что классифицирующие уравнения должны иметь вид

$$A\varphi + (D_1 H + D_2)\frac{\partial\varphi}{\partial H} + (K_1\alpha + K_2)\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0,$$
$$A\widetilde{A} + (D_1 H + D_2)\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial H} + (K_1\alpha + K_2)\frac{\partial\widetilde{A}}{\partial\alpha} = 0,$$
$$B\widetilde{W}_a + (D_1 H + D_2)\frac{\partial\widetilde{W}_a}{\partial H} + (K_1\alpha + K_2)\frac{\partial\widetilde{W}_a}{\partial\alpha} = 0,$$
$$\left(1 - \frac{1}{\mathrm{Le}}\right)\left[C\widetilde{D} + (D_1 H + D_2)\frac{\partial\widetilde{D}}{\partial H} + (K_1\alpha + K_2)\frac{\partial\widetilde{D}}{\partial\alpha}\right] = 0,$$
$$\left(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)D\varphi = 0,$$
$$g(s)\left[Ef + (D_1 H + D_2)\frac{\partial f}{\partial H} + (K_1\alpha + K_2)\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right] + (L_1 s + L_2) f g'(s) = 0$$

с некоторыми постоянными A, B, C, D, E, D_1, D_2, K_1, K_2, L_1, L_2.

Результаты групповой классификации системы уравнений (1.1) при значениях $\mathrm{Pr} = 1$ и $\mathrm{Le} = 1$ приведены в таблице.

В таблице приняты обозначения

$$X_1 = s\frac{\partial}{\partial s} - w\frac{\partial}{\partial w}, \ \ X_2 = \frac{\partial}{\partial s}, \ \ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + w\frac{\partial}{\partial w}, \ \ X_4 = u\frac{\partial}{\partial u} + w\frac{\partial}{\partial w},$$
$$X_5 = H\frac{\partial}{\partial H}, \ \ X_6 = \frac{\partial}{\partial H}, \ \ X_7 = \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}, \ \ X_8 = \frac{\partial}{\partial\alpha},$$

q_1, q_2, q_3, q_4 — постоянные, ζ — произвольная функция.

Таблица

A) $\widetilde{W}_a = 0$.

φ	$\widetilde{A}$	f	g	Операторы
0	0	0	$\forall$	$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7,\ X_8$
		$\forall$	0	
$\forall\varphi \neq 0$	$\forall\widetilde{A}$	0	$\forall$	$X_1 + X_4,$
		$\forall$	0	
$\forall\varphi$	$\forall\widetilde{A} \neq 0$	0	$\forall$	$X_2,\ X_3 - 2X_4$
		$\forall$	0	

φ	$\widetilde{A}$	f	g	Операторы
e^{α}	0	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1 - X_8,\ X_2,$
0	e^{α}	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_3 + 2X_8,\ X_5,$
e^{α}	e^{α}	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_4 + X_8,\ X_6$
1	0	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1 + X_4,\ X_2,$
0	1	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_3 - 2X_4,\ X_5,$
1	1	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_6,\ X_7,\ X_8,$
$\alpha^{q_2},\ q_2 \neq 0$	0	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1 + X_4,\ X_2,$
0	$\alpha^{q_2},\ q_2 \neq 0$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_3 - 2X_4,\ X_5,$
$\alpha^{q_2},\ q_2 \neq 0$	$\alpha^{q_2},\ q_2 \neq 0$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$q_2X_4 + X_7,\ X_6$
e^{H}	0	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1 - X_6,\ X_2,$
0	e^{H}	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_3 + 2X_6,$
e^{H}	e^{H}	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_4 + X_6,\ X_7 + X_8$
$e^{q_2H} \cdot \zeta(H+\alpha)$	0	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1 + X_4,\ X_2,$
0	$e^{q_2H} \cdot \zeta(H+\alpha)$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_3 - 2X_4,$
$e^{q_2H} \cdot \zeta(H+\alpha)$	$e^{q_2H} \cdot \zeta(H+\alpha)$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$q_2X_4 + X_6 - X_8$
$e^{q_2H} \cdot \zeta(\alpha \cdot e^{H})$	0	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1 + X_4,\ X_2,$
0	$e^{q_2H} \cdot \zeta(\alpha \cdot e^{H})$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_3 - 2X_4,$
$e^{q_2H} \cdot \zeta(\alpha \cdot e^{H})$	$e^{q_2H} \cdot \zeta(\alpha \cdot e^{H})$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$q_2X_4 + X_6 - X_7$
$H^{q_2},\ q_2 \neq 0$	0	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1 + X_4,\ X_2,$
0	$H^{q_2},\ q_2 \neq 0$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_3 - 2X_4,$
$H^{q_2},\ q_2 \neq 0$	$H^{q_2},\ q_2 \neq 0$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$q_2X_4 + X_5,\ X_7,\ X_8$
$H^{q_1} \cdot \zeta(e^{\alpha} \cdot H)$	0	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1 + X_4,\ X_2,$
0	$H^{q_1} \cdot \zeta(e^{\alpha} \cdot H)$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_3 - 2X_4,$
$H^{q_1} \cdot \zeta(e^{\alpha} \cdot H)$	$H^{q_1} \cdot \zeta(e^{\alpha} \cdot H)$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$q_1X_4 + X_5 - X_8$

φ	$\widetilde{A}$	f	g	Операторы
$H^{q_1}\zeta(\alpha^{q_2}H^{q_3})\ (q_2q_3\neq 0)$	0	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1+X_4,\ X_2,$ $X_3-2X_4,$ $q_1X_4+X_5-\frac{q_3}{q_2}X_7$
0	$H^{q_1}\zeta(\alpha^{q_2}H^{q_3})\ (q_2q_3\neq 0)$	0 $\forall$	$\forall$ 0	
$H^{q_1}\zeta(\alpha^{q_2}H^{q_3})\ (q_2q_3\neq 0)$	$H^{q_1}\zeta(\alpha^{q_2}H^{q_3})\ (q_2q_3\neq 0)$	0 $\forall$	$\forall$ 0	

B) $\varphi=0,\ \widetilde{A}=0.$

$\widetilde{W}_a$	f	g	Операторы
$\forall\widetilde{W}_a\neq 0$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1+X_4,\ X_2,\ X_3$
e^{α}	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1-X_8,\ X_2,\ X_3,\ X_4+X_8,\ X_5,\ X_6$
1	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1+X_4,\ X_2,\ X_3,\ -X_4+X_7,\ X_5,\ X_6,\ X_8$
$\alpha^{q_2},\ q_2\neq 0$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1+X_4,\ X_2,\ X_3,\ (q_2-1)X_4+X_7,\ X_5,\ X_6$
e^{H}	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1-X_6,\ X_2,\ X_3,\ X_4+X_6,\ X_6+X_7,\ X_8$
$e^{q_2H}\cdot\zeta(H+\alpha)$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1+X_4,\ X_2,\ X_3,\ q_2X_4+X_6-X_8$
$e^{q_2H}\cdot\zeta(\alpha\cdot e^{H})$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1+X_4,\ X_2,\ X_3,\ (1+q_2)X_4+X_6-X_7$
$H^{q_2},\ q_2\neq 0$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1+X_4,\ X_2,\ X_3,\ q_2X_4+X_5,\ -X_4+X_7,\ X_8$
$H^{q_1}\cdot\zeta(e^{\alpha}\cdot H)$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1+X_4,\ X_2,\ X_3,\ q_1X_4+X_5-X_8$
$H^{q_1}\zeta(\alpha^{q_2}H^{q_3})\ (q_2q_3\neq 0)$	0 $\forall$	$\forall$ 0	$X_1+X_4,\ X_2,\ X_3,\ (q_1+\frac{q_3}{q_2})X_4+X_5-\frac{q_3}{q_2}X_7$

C) $\varphi=0,\ \widetilde{A}=0,\ \widetilde{W}_a=0.$

f	g	Операторы
$\forall f\neq 0$	1	$X_1+\frac{1}{2}X_4,\ X_2,\ X_3$
	$\forall$	X_3
e^{α}	1	$X_1-X_8,\ X_2,\ X_3,\ X_4+2X_8,\ X_5,X_6$
	$\forall$	$X_3,\ X_4+2X_8,\ X_5,\ X_6$
1	1	$X_1+\frac{1}{2}X_4,\ X_2,\ X_3,\ X_5,\ X_6,\ X_7,\ X_8$
	$\forall$	$X_3,\ X_5,\ X_6,\ X_7,\ X_8$
$\alpha^{q_2},\ q_2\neq 0$	1	$X_1-\frac{1}{q_2}X_7,\ X_2,\ X_3,\ X_4+\frac{2}{q_2}X_7,\ X_5,\ X_6$
	$\forall$	$X_3,\ X_4+\frac{2}{q_2}X_7,\ X_5,\ X_6$
e^{H}	1	$X_1-X_6,\ X_2,\ X_3,\ X_4+2X_6,\ X_7,\ X_8$
	$\forall$	$X_3,\ X_4+2X_6,\ X_7,\ X_8$

f	g	Операторы
$e^{q_2 H}\cdot\zeta(H+\alpha)$	1	$X_1+\frac{1}{2}X_4,\ X_2,\ X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_6-X_8$
	$\forall$	$X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_6-X_8$
$e^{q_2 H}\cdot\zeta(\alpha\cdot e^H)$	1	$X_1+\frac{1}{2}X_4,\ X_2,\ X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_6-X_7$
	$\forall$	$X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_6-X_7$
$H^{q_2},\ q_2\neq 0$	1	$X_1+\frac{1}{2}X_4,\ X_2,\ X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_5,\ X_7,\ X_8$
	$\forall$	$X_3, \frac{q_2}{2}X_4+X_5,\ X_7,\ X_8$
$H^{q_1}\cdot\zeta(e^{\alpha}\cdot H)$	1	$X_1+\frac{1}{2}X_4,\ X_2,\ X_3,\ \frac{q_1}{2}X_4+X_5-X_8$
	$\forall$	$X_3,\ \frac{q_1}{2}X_4+X_5-X_8$
$H^{q_1}\zeta(\alpha^{q_2}H^{q_3})\ (q_2q_3\neq 0)$	1	$X_1+\frac{1}{2}X_4,\ X_2,\ X_3,\ \frac{q_1}{2}X_4+X_5-\frac{q_3}{q_2}X_7$
	$\forall$	$X_3,\ \frac{q_1}{2}X_4+X_5-\frac{q_3}{q_2}X_7$
$\forall f\neq 0$	e^s	$X_3,\ 2X_2+X_4$
	$s^{q_1},\ q_1\neq 0$	$X_1+\frac{1+q_1}{2}X_4,\ X_3$
e^{α}	e^s	$X_2+\frac{1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{1}{2}X_4+X_8,\ X_5,\ X_6$
	$s^{q_1},\ q_1\neq 0$	$X_1+\frac{1+q_1}{2}X_4,\ X_3, \frac{1}{2}X_4+X_8,\ X_5,\ X_6$
1	e^s	$X_3,\ 2X_2+X_4,\ X_5,\ X_6,\ X_7,\ X_8$
	$s^{q_1},\ q_1\neq 0$	$X_1+\frac{1+q_1}{2}X_4,\ X_3,\ X_5,\ X_6,\ X_7,\ X_8$
$\alpha^{q_2},\ q_2\neq 0$	e^s	$X_2+\frac{1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_7,\ X_5,\ X_6$
	$s^{q_1},\ q_1\neq 0$	$X_1+\frac{1+q_1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_7,\ X_5,\ X_6$
e^H	e^s	$X_2+\frac{1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{1}{2}X_4+X_6,\ X_7,\ X_8$
	$s^{q_1},\ q_1\neq 0$	$X_1+\frac{1+q_1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{1}{2}X_4+X_6,\ X_7,\ X_8$
$e^{q_2 H}\cdot\zeta(H+\alpha)$	e^s	$X_2+\frac{1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_6-X_8$
	$s^{q_1},\ q_1\neq 0$	$X_1+\frac{1+q_1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_6-X_8$
$e^{q_2 H}\cdot\zeta(\alpha\cdot e^H)$	e^s	$X_2+\frac{1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_6-X_7$
	$s^{q_1},\ q_1\neq 0$	$X_1+\frac{1+q_1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_6-X_7$
$H^{q_2},\ q_2\neq 0$	e^s	$X_2+\frac{1}{2}X_4, X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_5,\ X_7,\ X_8$
	$s^{q_1},\ q_1\neq 0$	$X_1+\frac{1+q_1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{q_2}{2}X_4+X_5,\ X_7,\ X_8$
$H^{q_1}\cdot\zeta(e^{\alpha}\cdot H)$	e^s	$X_2+\frac{1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{q_1}{2}X_4+X_5-X_8$
	$s^{q_2},\ q_2\neq 0$	$X_1+\frac{1+q_2}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{q_1}{2}X_4+X_5-X_8$
$H^{q_1}\zeta(\alpha^{q_2}H^{q_3})\ (q_2q_3\neq 0)$	e^s	$X_2+\frac{1}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{q_1}{2}X_4+X_5-\frac{q_3}{q_2}X_7$
	$s^{q_4},\ q_4\neq 0$	$X_1+\frac{1+q_4}{2}X_4,\ X_3,\ \frac{q_1}{2}X_4+X_5-\frac{q_3}{q_2}X_7$

2. Законы сохранения и первый интеграл оптимальной задачи

Согласно [3] закон сохранения, построенный на операторе с координатами (1.2), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big\{\Big[cu-(a_1s+a_2)\frac{\partial u}{\partial s}-(bt+\theta(s))\frac{\partial u}{\partial t}\Big](\lambda_1u+\lambda_2)+$$
$$+\lambda_3u\Big[g_1\alpha+g_2-(a_1s+a_2)\frac{\partial\alpha}{\partial s}-(bt+\theta(s))\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big]+$$
$$+\lambda_4u\Big[d_1H+d_2-(a_1s+a_2)\frac{\partial H}{\partial s}-(bt+\theta(s))\frac{\partial H}{\partial t}\Big]\Big\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\Big\{\Big[cu-(a_1s+a_2)\frac{\partial u}{\partial s}-(bt+\theta(s))\frac{\partial u}{\partial t}\Big]\Big(\lambda_1w+\lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\Big)R_1+\lambda_5\varphi\Big)+$$
$$+\lambda_2\Big[(c-a_1+b)w+u\theta'(s)-(a_1s+a_2)\frac{\partial w}{\partial s}-(bt+\theta(s))\frac{\partial w}{\partial t}\Big]+$$
$$+(\lambda_4w+\lambda_6\varphi)\Big[d_1H+d_2-(a_1s+a_2)\frac{\partial H}{\partial s}-(bt+\theta(s))\frac{\partial H}{\partial t}\Big]+$$
$$+(\lambda_3w+\lambda_7\widetilde{A}+\lambda_8\widetilde{D})\Big[g_1\alpha+g_2-(a_1s+a_2)\frac{\partial\alpha}{\partial s}-(bt+\theta(s))\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big]-$$
$$-\Big(\lambda_4u\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\Big)-\lambda_1\Big)\Big[(a_1s+a_2)\frac{\partial R_1}{\partial s}+(bt+\theta(s))\frac{\partial R_1}{\partial t}\Big]+$$
$$+\frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\Big[(a_1s+a_2)\frac{\partial R_2}{\partial s}+(bt+\theta(s))\frac{\partial R_2}{\partial t}\Big]+\lambda_3\Big[(a_1s+a_2)\frac{\partial R_3}{\partial s}+(bt+\theta(s))\frac{\partial R_3}{\partial t}\Big]-$$
$$-\lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Le}}-1\Big)\Big[(a_1s+a_2)\frac{\partial R_4}{\partial s}+(bt+\theta(s))\frac{\partial R_4}{\partial t}\Big]\Big\}=0.$$

Для рассматриваемой вариационной задачи справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Вариационная задача оптимального управления ламинарным пограничным слоем неравновесно диссоциирующего газа для любых непрерывно дифференцируемых функций* $\varphi(H,\alpha)$, $\widetilde{A}(H,\alpha)$, $\widetilde{D}(H,\alpha)$, $\widetilde{W}_a(H,\alpha)$, $f(H,\alpha)$, $p(s)$ *и параметров* Pr *и* Le *допускает первый интеграл.*

Доказательство. Рассмотрим закон сохранения, построенный на бесконечномерном операторе (1.4),

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big\{-\theta(s)(\lambda_1u+\lambda_2)\frac{\partial u}{\partial t}-\lambda_3u\theta(s)\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\lambda_4u\theta(s)\frac{\partial H}{\partial t}\Big\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\Big\{-\theta(s)\frac{\partial u}{\partial t}\Big(\lambda_1w+\lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\Big)R_1+\lambda_5\varphi\Big)+\lambda_2\Big(u\theta'(s)-\theta(s)\frac{\partial w}{\partial t}\Big)-(\lambda_4w+\lambda_6\varphi)\theta(s)\frac{\partial H}{\partial t}-$$
$$-(\lambda_3w+\lambda_7\widetilde{A}+\lambda_8\widetilde{D})\theta(s)\frac{\partial\alpha}{\partial t}-\Big(\lambda_4u\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\Big)-\lambda_1\Big)\theta(s)\frac{\partial R_1}{\partial t}+$$
$$+\frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\theta(s)\frac{\partial R_2}{\partial t}+\lambda_3\theta(s)\frac{\partial R_3}{\partial t}-\lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Le}}-1\Big)\theta(s)\frac{\partial R_4}{\partial t}\Big\}=0. \qquad (2.1)$$

Перепишем (2.1) в виде

$$-\theta(s)\frac{\partial}{\partial s}\Big\{(\lambda_1u+\lambda_2)\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_3u\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\lambda_4u\frac{\partial H}{\partial t}\Big\}-$$
$$-\theta'(s)\Big[(\lambda_1u+\lambda_2)\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_3u\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\lambda_4u\frac{\partial H}{\partial t}\Big]+\theta'(s)\frac{\partial}{\partial t}[\lambda_2u]-$$

$$- \theta(s)\frac{\partial}{\partial t}\Big\{\frac{\partial u}{\partial t}\Big(\lambda_1 w + \lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\Big)R_1 + \lambda_5\varphi\Big) + \lambda_2\frac{\partial w}{\partial t} + $$
$$+ (\lambda_4 w + \lambda_6\varphi)\frac{\partial H}{\partial t} + (\lambda_3 w + \lambda_7\widetilde{A} + \lambda_8\widetilde{D})\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \Big(\lambda_4 u\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\Big) - \lambda_1\Big)\frac{\partial R_1}{\partial t} -$$
$$- \frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial t} - \lambda_3\frac{\partial R_3}{\partial t} + \lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1\Big)\frac{\partial R_4}{\partial t}\Big\} = 0. \qquad (2.2)$$

С учетом второго уравнения системы (1.11) из [2] равенство (2.2) после деления его на $\theta(s) \neq 0$ примет вид

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big\{\frac{\partial}{\partial t}[\lambda_2 u]\Big\} + \frac{\partial}{\partial t}\Big\{\Big(\lambda_1 w + \lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\Big)R_1 + \lambda_5\varphi\Big)\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial w}{\partial t} +$$
$$+ (\lambda_4 w + \lambda_6\varphi)\frac{\partial H}{\partial t} + (\lambda_3 w + \lambda_7\widetilde{A} + \lambda_8\widetilde{D})\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \Big(\lambda_4 u\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\Big) - \lambda_1\Big)\frac{\partial R_1}{\partial t} -$$
$$- \frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial t} - \lambda_3\frac{\partial R_3}{\partial t} + \lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1\Big)\frac{\partial R_4}{\partial t}\Big\} = 0.$$

Таким образом, закон сохранения (2.1) превращается в первый интеграл для сопряженной системы (1.11) из [2]

$$\frac{\partial}{\partial s}[\lambda_2 u] + \Big(\lambda_1 w + \lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\Big)R_1 + \lambda_5\varphi\Big)\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2\frac{\partial w}{\partial t} +$$
$$+ (\lambda_4 w + \lambda_6\varphi)\frac{\partial H}{\partial t} + (\lambda_3 w + \lambda_7\widetilde{A} + \lambda_8\widetilde{D})\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \Big(\lambda_4 u\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\Big) - \lambda_1\Big)\frac{\partial R_1}{\partial t} -$$
$$- \frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial t} - \lambda_3\frac{\partial R_3}{\partial t} + \lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1\Big)\frac{\partial R_4}{\partial t} = g(s), \qquad (2.3)$$

где $g(s)$ — произвольная функция интегрирования. Так же, как в ([1], с. 135–144), можно показать, что $g(s) \equiv 0 \ \forall s \in [0, s_k]$.

Закон сохранения (2.3) можно упростить, используя второе уравнение системы (1.11) из [2],

$$\frac{\partial}{\partial s}[\lambda_2 u] + \frac{\partial}{\partial t}[\lambda_2 w] + \Big(\lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\Big)R_1 + \lambda_5\varphi\Big)\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_6\varphi\frac{\partial H}{\partial t} +$$
$$+ (\lambda_7\widetilde{A} + \lambda_8\widetilde{D})\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \Big(\lambda_4 u\Big(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\Big) - \lambda_1\Big)\frac{\partial R_1}{\partial t} - \frac{\lambda_4}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial R_2}{\partial t} - \lambda_3\frac{\partial R_3}{\partial t} + \lambda_4\Big(\frac{1}{\mathrm{Le}} - 1\Big)\frac{\partial R_4}{\partial t} = 0. \qquad (2.4)$$

Отметим, что уравнением (2.4) можно заменить первое, третье или четвертое уравнение сопряженной системы (1.11) из [2], что эквивалентно понижению ее порядка на единицу и дает возможность упрощения проблемы поиска оптимальных управлений.

Ранее в [2] был получен первый интеграл рассматриваемой задачи при $\theta(s) \equiv 0$, т. е. на операторе переноса $X = \frac{\partial}{\partial t}$. Отметим, что он в точности совпадает с (2.3). Впрочем это и не удивительно, т. к. преобразования, отвечающие X_∞, являются преобразованиями эквивалентности, а сам оператор X_∞ может быть преобразован в оператор переноса; при этом уравнения не изменяются. Таким образом, вся содержательная информация с точки зрения конструирования первого интеграла содержится в операторе переноса.

Литература

1. Гараев К.Г. *Группы Ли и теория Нётер в проблеме управления с приложениями к оптимальным задача пограничного слоя.* – Казань, изд-во КГТУ, 1994. – 240 с.

2. Бильченко Н.Г., Гараев К.Г. *О существовании первого интеграла в одной оптимальной задаче с распределенными параметрами* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 12. – С. 31–34.
3. Гараев К.Г. *Об одном следствии из теоремы Э.Нётер для двумерных вариационных задач типа Майера* // Прикл. матем. и механ. – 1980. – Т. 44. – № 3. – С. 448-453.
4. Lie S., Scheffers G. *Vorlesungen Über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationsgruppen.* – Leipzig, 1891. – 568 s.
5. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 399 с.
6. Нётер Э. *Инвариантные вариационные задачи* // Вариационные принципы механики. – М.: Физматгиз, 1959. – С. 611–630.
7. Гараев К.Г. *Об оптимальном управлении ламинарным пограничным слоем сжимаемого газа на проницаемых поверхностях* // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. – 1988. – № 3. – С. 92–100.

Казанский государственный технический университет

Поступила 17.03.1997