МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И.
ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Специальность: 010100 – Математика

Специализация: Алгебра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Дипломная работа)

МИНИМАЛЬНО ВПОЛНЕ НЕРАЗЛОЖИМЫЕ МАТРИЦЫ

Работа завершена:
«___»____________2015 г. ____________А.О. Михайлова

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры и математической логики
«___»____________2015 г. ____________Ю.А. Альпин

Заведующий кафедрой алгебры и математической логики,
доктор физико-математических наук, профессор
«___»____________2015 г. ____________М.М. Арсланов

Казань – 2015 г.

Оглавление.

Введение.

Данная дипломная работа посвящена изучению таких свойств неотрицательных матриц, как частичная разложимость, вполне неразложимость, минимальная вполне неразложимость и близость к частичной разложимости. Все эти свойства зависят от комбинаторной структуры, то есть от расположения неотрицательных элементов матрицы, что позволяет рассматривать только (0, 1) – матрицы. С каждой матрицей порядка n естественным образом связан ориентированный граф с n вершинами. Некоторые теоремы доказываются на языке матриц, а некоторые, используя теорию графов. Работа состоит из оглавления,введения, 5-ти параграфов и списка используемой литературы.

В §1 приводятся основные определения и критерии частично разложимых матриц. Дается понятие перестановочной эквивалентности. В частности, доказано, что если матрица частично разложима, то и любая перестановочно эквивалентная ей матрица частично разложима. То есть частичная разложимость есть свойство класса перестановочной эквивалентности. Затем вводится определение вполне неразложимости.

Помимо общих критериев частичной разложимости и вполне неразложимости представляет интерес конкретные способы построения вполне неразложимых матриц. Один из этих способов рассмотрен в §2.

В §3 показана связь между неразложимостью и вполне неразложимостью. Доказано, что матрица A неразложима тогда и только тогда, когда матрица $E + A$ вполне неразложима.

В §4 даны определения матрицы близкой к частично разложимой и минимально вполне неразложимой матрицы. Оказывается, что минимально вполне неразложимая матрица является близкой к частично разложимой. Но обратное утверждение неверно.

Описанные выше результаты известны в литературе (см. [1], [3], [4], [5]), но изложены в новом переработанном виде. В частности, используется новый критерий вполне неразложимости матрицы, выраженный на языке k-строчной подматрицы данной матрицы. Это облегчает изучение вполне неразложимых матриц.

Основные результаты работы содержатся в §5. В нем выводятся канонические формы для минимально вполне неразложимых матриц относительно перестановочной эквивалентности. Первая форма представляет интерес, потому что она симметрична и просто построена. А вторая каноническая форма не симметрична. Она выведена с помощью теоремы Синкхорна и Кноппа. Эти результаты, по-видимому, являются новыми.

§1.Критерии вполне неразложимости матриц.

Определение 1. Матрица $A \geq 0$ порядка n называется *частично разложимой,* если существуют такие перестановочные матрицы U и V, что

$$UAV = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1, A_2– квадратные матрицы.

Данное определение, очевидно, эквивалентно следующему:

Определение 2. Матрица $A \geq 0$ порядка n называется *частично разложимой,* если существуют такие перестановочные матрицы U и V, что

$$UAV = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix},$$

где 0–нулевая подматрица, сумма размеров которой равна n.

Будем говорить, что матрицы A и B *перестановочно эквивалентные,* если существуют такие перестановочные матрицы U и V, что $UAV = B$. Таким образом, матрицы перестановочно эквивалентны, если одна из них преобразуется в другую подходящей перестановкой строк и некоторой перестановкой столбцов.

Утверждение 1. Бинарное отношение перестановочной эквивалетности, рассматриваемое на множестве матриц одного порядка, рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности, в смысле употребляемом в теории бинарных отношений.

Доказательство. Пусть M_n– множество неотрицательных матриц порядка n и задано бинарное отношение перестановочной эквивалентности $\rho \subseteq M_n \times M_n$. То есть пара матриц $A, B \in M_n$ принадлежит ρ , если A и B перестановочно эквивалентны. Таким образом $(A, B) \in \rho$ тогда и только тогда, когда существуют $U, V \in M_n$ такие, что $UAV = B$, где U, V– перестановочные матрицы.

1) Докажем свойство рефлексивности ρ.

По определению ρ рефлексивно, если любое $A \in M_n$, то $(A, A) \in \rho$. Действительно, любая матрица A перестановочно эквивалентна себе самой (U, V– единичные матрицы). Следовательно, ρ рефлексивно.

2) Докажем симметричность ρ.

По определению ρ симметрично, если $(A, B) \in \rho$,
то $(B, A) \in \rho$

Возьмем любые перестановочно эквивалентные матрицы
A и B, то есть $(A, B) \in \rho$ тогда и только тогда, когда существуют перестановочные матрицы U, V такие, что $UAV = B$. Домножим данное равенство

на U^{-1} слева и на V^{-1} справа, получим $U^{-1}UAVV^{-1} = U^{-1}BV^{-1}$, отсюда следует, что
$A = U^{-1}BV^{-1}$.

По свойствам перестановочных матриц: матрица, обратная к перестановочной, является перестановочной. Следовательно, U^{-1}, V^{-1} – перестановочные, то есть $(B, A) \in \rho$ отсюда следует, что ρ симметрично.

3) Докажем транзитивность ρ.

По определению, ρ – транзитивно, если для любых матриц $A, B, C \in M_n$ таких, что $(A, B) \in \rho$, $(B, C) \in \rho$, следует $(A, C) \in \rho$.

$(A, B) \in \rho$ тогда и только тогда, когда существуют перестановочные матрицы U, V такие, что $UAV = B$.

$(B, C) \in \rho$ тогда и только тогда, когда существуют перестановочные матрицы P, Q такие, что $PBQ = C$.

Домножим первое равенство на P слева и Q справа:

$PUAVQ = PBQ = C$.

Обозначим $R = PU$, $S = VQ$. Так как P, U, V, Q – перестановочные матрицы, то R, S – тоже перестановочные (по свойствам перестановочных матриц).

Таким образом, существует перестановочные матрицы R, S такие, что $RAS = C$, т.е. $(A, C) \in \rho$, следовательно ρ транзитивно.

То есть, бинарное отношение перестановочной эквивалентности является отношением эквивалентности в смысле, употребляемом в теории бинарных отношений.

Утверждение 2. Если матрица A частично разложима, то и любая перестановочная эквивалентная ей матрица частично разложима.

Доказательство. Матрица A частично разложима, отсюда следует, что существуют перестановочные матрицы U, V такие, что

$$UAV = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix},$$

где 0-нулевая подматрица, сумма размеров которой равна n. Матрицы A и B перестановочно эквивалентны, если существуют перестановочные матрицы P, Q такие, что выполняется равенство: $A = PBQ$.

Домножим последнее равенство на U слева и на V справа, получим

$$UAV = UPBQV = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $S = UP$, $R = QV$, тогда

$$SBR = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix},$$

Так как U, P, Q, V - перестановочные матрицы, то S, R - тоже перестановочные. Следовательно B частично разложима.

Утверждение 2 доказывает, что частичная разложимость есть свойство класса перестановочной эквивалентности: все матрицы из одного класса либо частично разложимы, либо не являются частично разложимыми.

Лемма 1. Матрица A порядка n частично разложима тогда и только тогда, когда выполняется любое из свойств:

1)А содержит нулевую подматрицу, сумма размеров которой равна n;

2) некоторые r строк матрицы A образуют подматрицу, содержащую не более r ненулевых столбцов.

Доказательство. Если выполняется свойство 1), то перестановками строк и столбцов можно "перегнать"нулевую $r \times s$ – подматрицу $(r+s=n)$ в правый верхний угол так, чтобы она занимала сплошное поле. В результате этих перестановок первые r строк матрицы образуют подматрицу, содержащую не более r ненулевых столбцов, причем левый верхний угол будет занимать $r \times r$ подматрица. То есть, матрица A приобретет форму

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, A частично разложима.

Кроме того, из сказанного видно, что из свойства 1) вытекает свойство 2). Из свойства 2) свойство 1) следует совсем легко.

Определение 3. Матрица, не являющаяся частично разложимой, называется *вполне неразложимой.*

Из Леммы 1 автоматически следуют условия вполне неразложимости:

Теорема 1. Матрица A вполне неразложима тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих свойств:

1) сумма размеров любой нулевой подматрицы A строго меньше n;

2) в подматрице A, образованной любыми r строками $(1 \leq r < n)$, ненулевых столбцов больше, чем r.

Следствие 1. Если матрица A вполне неразложима, то и матрица A^T вполне неразложима.

Доказательство. Действительно, при транспонировании A всякая нулевая подматрица с r строками и s столбцами преобразуется в нулевую подматрицу с s строками и r столбцами – сумма размеров не меняется. Поэтому если A вполне неразложима, то и A^T вполне неразложима.

Следствие 2. Матрица A вполне неразложима тогда и только тогда, когда в подматрице A, образованной любыми r столбцами $(1 \leq r < n)$, ненулевых строк больше, чем r.

Доказательство. Докажем, лишь то, что если условие следствия выполнено, то A вполне неразложима. Обратное утверждение очевидно. Транспонируем матрицу A. Подматрица матрицы A, образованная любыми r

столбцами, где ненулевых строк больше, чем r, перейдет в подматрицу матрицы A^T с r строками, в которой ненулевых столбцов больше r. То есть матрица A^T будет вполне неразложима по свойству 2) теоремы 1. Тогда из следствия 1 следует, что вполне неразложима матрица $A = (A^T)^T$.

Следствие 3. Каждая строка вполне неразложимой матрицы содержит не меньше двух положительных элементов. То же верно и для столбцов.

Доказательство. По свойству 2) теоремы 1: матрица A вполне неразложима тогда и только тогда, когда в подматрице A, образованной любыми r строками ($1 \leq r < n$), ненулевых столбцов больше, чем r. Так как $r = 1$ и ненулевых столбцов k должно быть больше r, значит $k > 1$. То есть в каждой строке должно быть ненулевых элементов больше единицы.

Транспонируем матрицу A, тогда ее столбцы станут строками A^T. По следствию 1 из вполне неразложимости A следует вполне неразложимость A^T. По доказанному выше каждая строка A^T содержит 2 и более положительных элемента. Значит, то же верно и для столбцов A.

Замечание 1. Условие следствия 3 является необходимым для вполне неразложимости. Для матриц порядка 2 и 3 оно является и достаточным – см.§4. Но в общем случае выполнение этого условия недостаточно для вполне неразложимости.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Для этой матрицы условие следствия 3 выполнено. Но она частично разложима, в силу свойства 1) леммы 1. Более того она разложима. Аналогичные примеры легко построить для порядка $n \geq 4$

Также для вполне неразложимых матриц можно привести утверждение, аналогичное утверждению 2.

Замечание 2. Наше исследование относится к неотрицательным матрицам. Свойства вполне неразложимости зависят от расположения ненулевых элементов, а не от конкретных значений положительных элементов, поэтому мы будем работать с (0,1) матрицами.

Утверждение 3. Если матрица A вполне неразложима, то и любая перестановочно эквивалентная ей матрица тоже вполне неразложима.

Приведем еще один полезный критерий вполне неразложимости.

Обозначим $|x|_+$ количество положительных элементов строки $x \geq 0$.

Теорема 2. Матрица A вполне неразложима тогда и только тогда, когда

$$|x|_+ < |xA|_+,$$

для любой строки x $(0 < |x|_+ < n)$

Доказательство. Пусть $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$ – положительные элементы строки x. Тогда j-й элемент строки xA равен

$$(xA)_j = \sum_{k=1}^{r} x_{i_k} a_{i_k j}.$$

Этот элемент больше нуля тогда и только тогда, когда столбец $\begin{pmatrix} a_{i_1 j} \\ \vdots \\ a_{i_r j} \end{pmatrix}$ подматрицы A, образованной строками $i_1, ..., i_r$, содержит положительный элемент. Следовательно, число $|xA|_+$ равно количеству ненулевых столбцов в этой подматрице. Теперь ясно, что условие $|x|_+ < |xA|_+$ эквивалентно свойству 1) теоремы 1.

Из теоремы 2 вытекает, что вполне неразложимые матрицы образуют полугруппу относительно умножения.

Следствие 4. Если матрицы A и B вполне неразложимы, то матрица AB тоже вполне неразложима.

Доказательство. Нужно доказать, что $|x|_+ < |x(AB)|_+$, для любой строки x $(0 < |x|_+ < n)$. Умножим x на A, в силу вполне неразложимости A получим: $|x|_+ < |xA|_+$. Затем строку xA умножим на B и также в силу вполне неразложимости B получим: $|xA|_+ < |x(AB)|_+$. Это выполняется лишь в том случае, пока число положительных элементов не достигнет размерности матрицы. Иначе $|x|_+ = |x(AB)|_+$. Но из двойного неравенства $|x|_+ < |xA|_+ = |x(AB)|_+$, следует, что $|x|_+ < |x(AB)|_+$.

Утверждение 4 Если $A_1, ..., A_{n-1}$ – вполне неразложимые матрицы порядка n , то их произведение является положительной матрицей:

$$A_1 \cdots A_{n-1} > 0.$$

В частности, любая вполне неразложимая матрица примитивна.

Доказательство. Аналогично доказательству следствия 4.
То есть $|x|_+ < |x(A_1)|_+$, т.к A_1 вполне неразложима,
$|x(A_1)|_+ < |x(A_1A_2)|_+$, т.к A_2 вполне неразложима,
$|x(A_1A_2)|_+ < |x(A_1A_2A_3)|_+$, т.к A_3 вполне неразложима и т.д.

Когда количество положительных элементов в матрице-строке $|x(A_1...A_i)|_+$ достигнет величины n, тогда строгие неравенства заменим на равенство $|x(A_1...A_k)|_+ = |x(A_1...A_{k+1})|_+$. Положим, что $x = e_i$, где e_i-строка, в которой i-й элемент равен 1, а остальные элементы равны 0. Тогда $|\ e_iA_1...A_k\ |$ равно количеству положительных элементов i-й строки матрцы $A_1 \cdot ... \cdot A_k$.

Таким образом в итоге получим:
$0 < |e_i|_+ < |e_i(A_1)|_+ < |e_i(A_1A_2)|_+ < ... < |e_i(A_1 \cdots A_k)|_+ =$
$=|\mathrm{e}_i(A_1 \cdots A_{k+1})|_+ = ... = |e_i(A_1 \cdots A_{n-1})|_+$.
Ясно, что $k \leq n-1$. Следовательно, $|\mathrm{e}_i(A_1 \cdots A_{n-1})|_+ = n$.
Так как i-любой номер строки, то матрица $A_1 \cdots A_{n-1}$ – положительная.

Замечание 3. В терминах статьи [2] свойство, доказанное в утверждении 4, называется множественной примитивностью класса вполне неразложимых матриц.

§2. Способы построения вполне неразложимых матриц.

Помимо общих критериев частичной разложимости и вполне неразложимости представляет интерес конкретные способы построения вполне неразложимых матриц. Рассмотрим один из этих способов.

Пусть в матрице порядка n

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1}$$

блоки A и D – квадратные вполне неразложимые матрицы, блоки B и C ненулевые. Докажем, что вся матрица вполне неразложима.

Необходимым условием вполне неразложимости всей матрицы является то, что блоки B и C ненулевые. Пусть это не так, тогда сумма размеров блока B (а также C) равно $n-l+l=n$. Это противоречит свойству 1) теоремы 1.

Введем обозначения размерности подматриц матрицы (1)

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} l \\ n-l \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} l \quad & n-l \end{matrix} \end{array} \tag{2}$$

и докажем,что матрица вполне неразложима. То есть нужно показать, что подматрица, составленная из любых k строк
$(1 \leq k < n)$, имеет больше, чем k ненулевых столбцов.

Рассмотрим 2 случая:

1) все k строк находятся в подматрице, составленной из блоков A и B.

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} l \\ n-l \end{matrix} & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array}$$

Рассмотрим в ней подматрицу из k строк. Если $k < l$, то вполне неразложимость матрицы (2) обеспечивается матрицей A, т.к. там уже имеется $k+1$ ненулевых столбцов. Если же $k = l$, то вполне неразложимость будет благодаря блоку B, этот блок ненулевой, следовательно там есть хотя бы один ненулевой столбец. Благодаря этому, подматрица, составленная из l строк будет содержать не меньше $l+1$ ненулевых столбцов. Если все k строк находятся в подматрице, составленной из блоков C и D, вполне неразложимость матрицы (2) обеспечивается таким же образом.

2) $k = k_1 + k_2$, где k_1 строк находятся в подматрице, составленной из блоков A и B, а k_2 в подматрице, составленной из блоков C и D. Можно считать, что $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$ так как случаи $k = k_1 \Rightarrow k_2 = 0$ и $k = k_2 \Rightarrow k_1 = 0$ разобраны в п.1)

Пусть $k_1 < l$, тогда ненулевых столбцов в k-строчной подматрице не меньше, чем $k_1 + k_2 + 1 = k + 1$. Поскольку вполне неразложимая матрица содержит не меньше чем $k_1 + 1$ ненулевых столбцов. Аналогично, когда $k_2 < n - l$.

Значит, матрица (1) вполне неразложима.

Эта задача – частный случай теоремы [1, теорема 4.2, стр 84]. В книге приводится доказательство "от противного". Мы приведем прямое доказательство, основанное на иных соображениях.

Теорема 3. Пусть в матрице

$$K = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_m & 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

блоки $A_1, ..., A_m$ – квадратные вполне неразложимые матрицы, а блоки $B_1, ..., B_m$ – ненулевые. Тогда матрица вполне неразложима.

Доказательство. Докажем вполне неразложимость матрицы K , используя условие 2) теоремы 1. Пусть $n_1, ..., n_m$ – порядки блоков $A_1, ..., A_m$. Рассмотрим произвольно взятую подматрицу H, составленную из k $(k < n)$ строк. Обозначим через $k_{i_1}, k_{i_2}, ..., k_{i_s}, (k_{i_1} + k_{i_2} + ... + k_{i_s} = k)$
ненулевые количества строк этой подматрицы, пересекающих блоки
$A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_s}$ $(i_1 < i_2 < ... < i_s < m)$.

Рассмотрим 2 случая.

1. $k_{i_1} = n_{i_1}, ..., k_{i_s} = n_{i_s}$.

В этом случае матрица H содержит $k_{i_1} + ... + k_{i_s}$ ненулевых столбцов плюс еще хотя бы один столбец, который обеспечивается ненулевой матрицей B_{i_s} (или B_m, если $i_1 > 1$).

2. Существует номер i, такой , что $k_i < n_i$. Поскольку A_i вполне неразложима, то матрица H содержит не меньше, чем $k_i + 1$ ненулевых столбцов, пересекающих матрицу A_i. всего же в матрице H не меньше, чем $k_1 + ... + k_s = k + 1$ ненулевых столбцов. Теорема доказана.

Замечание 4. Анализ доказательства теоремы 3 показывает, что проведенные рассуждения остаются верными для любой блочной матрицы, которая содержит в каждой блочной строке и каждом блочном столбце:

1) одну квадратную вполне неразложимую подматрицу,

2) одну ненулевую подматрицу.

Всего же в каждом блочном ряду две ненулевые подматрицы. Таким образом, мы имеем обобщение теоремы 3.

Например, матрица может иметь форму

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ B_2 & 0 & A_2 \\ 0 & A_3 & B_3 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} B_1 & 0 & A_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

§3. Связь между неразложимостью и вполне неразложимостью матрицы.

Известное определение разложимой матрицы гласит: матрица A *разложима,* если существует такая перестановочная матрица U, что

$$UAU^T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}, \text{ где } A_1, A_2 \text{– квадратные матрицы.}$$

Если такой матрицы U не существует, то матрица A называется *неразложимой.*

Ясно, что разложимая матрица частично разложима. Но легко привести пример неразложимой матрицы, которая частично разложима. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{–частично разложима, по следствию 3.}$$

Определение 4. *Граф матрицы*– это ориентированный граф, такой что дуга ведет из вершины i в вершину j, тогда и только тогда, когда a_{ij} элемент матрицы не равен нулю.

Известно, что матрица $A = (a_{ij})$ порядка n неразложима, если ее граф является сильно связным.

А в нашем примере граф матрицы A сильно связный, что означает неразложимость A.

Связь между неразложимостью и вполне неразложимостью видна из следующей теоремы.

Теорема 4. Для того, чтобы матрица $A \geq 0$ была неразложима необходимо и достаточно, чтобы матрица $E + A$ была вполне неразложима.

Доказательство. Достаточность докажем от противного. Пусть матрица A разложима, значит существует перестановочная матрица:

$$UAU^T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}, \text{ где } A_1, A_2\text{– квадратные матрицы.}$$

Вычислим

$$U(E + A)U^T = UEU^T + UAU^T = \begin{pmatrix} E_1 + A_1 & 0 \\ A_{21} & E_2 + A_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь E_1, E_2–диагональные единичные матрицы того же размера, что и A_1, A_2. E– это единичная матрица и умножение слева на перестановочную U и справа на перестановочную U^T оставит ее без изменения.

В итоге получили, что $(E + A)$– разложима, а следовательно, и частично разложима, что противоречит условию. Значит, наше предположение о разложимости матрицы A ошибочно, отсюда следует, что A – неразложима.

Необходимость докажем от противного. Предположим, что матрица $E + A$ частично разложима, тогда для некоторой строки x $(0 < |x|_+ < n)$

$$|x|_+ = |x + xA|_+.$$

Из равенства следует: $x_j = 0 \Rightarrow (xA)_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = 0$. Последнее равенство выполняется, если $x_i > 0$ влечет $a_{ij} = 0$. Получили, что

$$\text{если } x_j = 0, x_i > 0, \text{ то } a_{ij} = 0.$$

Это значит, что собственное подмножество $\{i | x_i > 0\}$ вершин графа матрицы A замкнуто, значит, граф A не сильно связный. Но это противоречит неразложимости A.

§4.Минимально вполне неразложимые матрицы малого порядка ($n \leq 4$).

Определение 5. Вполне неразложимая матрица называется *близкой к частично разложимой* ("nearly decomposable"), если замена любого положительного элемента нулем приводит к частично разложимой матрице.

Это определение взято из книги [1, опр 5.1, стр 87], а перевод на русский язык – из книги [3, стр.305]

Из следствия 3 вытекает, что любая вполне неразложимая матрица содержит не меньше, чем $2n$ положительных элемента.

Определение 6. Вполне неразложимая матрица порядка n называется *минимально вполне неразложимой,* если она содержит ровно $2n$ положительных элемента.

Таким образом, минимально вполне неразложимая матрица является близкой к частично разложимой. Однако, как мы увидим дальше, обратное неверно.

Из предыдущего изложения не видно существуют ли минимально вполне неразложимые матрицы. Приступим к их изучению.

Найдем минимально вполне неразложимые матрицы малых порядков.

Существует, только одна вполне неразложимая матрица порядка 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта матрица вполне неразложима. Все другие матрицы порядка 2 содержат хотя бы один нуль. Следовательно, в них есть строка, в которой меньше двух положительных элементов. По следствию 3 они частично разложимы.

Теорема 5. Неотрицательная матрица порядка 3 минимально вполне неразложима тогда и только тогда, когда в каждой её строке и столбце имеется ровно один нуль.

Доказательство. Достаточность. Неотрицательная матрица в каждой строке и столбце имеет ровно один нуль. Покажем, что она вполне неразложима по свойству 1) теоремы 1. Любая нулевая подматрица состоит ровно из одного элемента – нуля. Нулевых подматриц большего размера в матрице нет. Сумма размеров нулевой подматрицы 1×1 равно $1{+}1{=}2{<}3$, следовательно исходная матрица вполне неразложима.

Теперь покажем, что матрица минимально вполне неразложима. По следствию 3, в каждой строке ровно 2 положительных элемента, то есть $2 \times 3 = 6$. Таким образом, по определению 6, матрица минимально вполне неразложима.

Необходимость. Если, условие, что в каждой строке и каждом столбце имеется ровно один нуль не выполняется, значит, есть строка или столбец, в которых положительных элементов меньше, чем 2. По следствию 3 такая матрица частично разложима.

Перечислим все минимально вполне неразложимые матрицы порядка $n = 3$. Как следует из теоремы 5, их 6 штук.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матриц порядка $n = 4$ приведем следующую теорему.

Теорема 6. Неотрицательная матрица порядка $n = 4$ минимально вполне неразложима тогда и только тогда, когда не существует положительной подматрицы порядка $n = 2$ и в каждой строке и каждом столбце ровно по 2 единицы.

Доказательство. Необходимость. Докажем от противного: пусть ненулевая матрица порядка 4 минимально вполне неразложима, в каждой строке и каждом столбце ровно 2 единицы, но одна подматрица порядка $n = 2$ содержит 4 единицы. Тогда в столбцах и строках, пересекающих эту подматрицу, оставшиеся элементы равны 0. То есть, после очевидной перестановки строк и столбков получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & C \end{pmatrix}$$

.

Эта матрица частично разложима в силу 1-го свойства леммы 1. Получили противоречие. Необходимое условие доказано.

Достаточность. Пусть в каждой строке и каждом столбце ровно 2 единицы и подматрицы 2-го порядка содержат не более 3 единиц.

Докажем вполне неразложимость по свойству 1) теоремы 1. Покажем, что в нашей матрице нет нулевых подматриц размера $1 \times 3, 3 \times 1, 2 \times 2$.

Подматриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

не может быть в матрице, так как нарушается условие, что в каждой строке и каждом столбце ровно 2 единицы.

Если предположить, что в матрице есть нулевая подматрица 2×2, то строках (и столбцах) на пересечении с этой подматрицей, получим положительную подматрицу . Что также противоречит условию: не более 3 единиц в каждой подматрице второго порядка. Следовательно, наибольшая нулевая подматрица имеет размер $1 \times 2, 2 \times 1$. Матрица вполне неразложима.

Докажем минимальность по определению 6. Исходя из условия, что в каждой строке и каждом столбце ровно по две единицы, получаем, что матрица минимально вполне неразложима. Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Неотрицательная матрица порядка $n = 4$ минимально вполне неразложима тогда и только тогда, когда она перестановочно подобна матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Доказательство. То, что матрица A минимально вполне неразложима, проверяется непосредственно, с помощью теоремы 1. Следовательно, минимально вполне неразложимые матрицы порядка 4 существуют. Пусть дана произвольная неотрицательная минимально вполне неразложимая матрица B порядка 4. Найдем в нашей матрице две строчки, в которых единицы стоят в первом столбце и переставим их с первой и второй строчками. Пользуясь минимально вполне неразложимостью матрицы, можем утверждать, что в первой строке в некотором k-ом столбце ($k > 1$) есть единица. Переставим k-ый столбец со вторым. Столбец, в котором единица на 2-ой позиции переставляем с третьим. В четвертом столбце единицы на 3-ей и 4-ой позиции. Строчку с единицей на 2-ой позиции переставляем с третьей строчкой. В последней строчке единицы будут на 3-ей и 4-ой позиции. Таким образом, переставляя поочередно строки и столбцы, мы приведем любую минимально вполне неразложимую матрицы к матрице A. Теорема 7 доказана.

Если матрица близка к частично разложимой, отсюда не следует, что она минимально вполне неразложима. Приведем пример неотрицательной матрицы порядка 5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Эта матрица близка к частично разложимой, по определению 5. Но есть строка и столбец, с тремя единицами, по определению 6, такая матрица не является минимально вполне неразложимой.

§5. Канонические формы для минимально вполне неразложимых матриц порядка $n \geq 4$.

Минимально вполне неразложимых матриц порядка $n \geq 4$ много. Поэтому будем искать каноническую форму минимально вполне неразложимой матрицы с точностью перестановочной эквивалентности.

Рассмотрим матрицу порядка $n \geq 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Дадим формальное описание матрицы (4). Эта матрица содержит в каждой строке и каждом столбце ровно две единицы. При этом 1-я строка содержит единицы в 1-м и 2-м столбцах, последняя n-я строка содержит единицы в $(n-1)$-м и n-м столбцах. Строка с номером i $(1 < i < n)$, содержит единицы в $(i-1)$-м и $(i+1)$-м столбцах.

Теорема 8. Матрица A вида (4) минимально вполне неразложима.

Доказательство. Сначала покажем, что матрица A вполне неразложима.

Рассмотрим произвольно выбранную k-строчную подматрицу матрицы A вида (4) $(k \leq n-1)$. Она содержит ровно $2k$ единиц – по две в каждой строке и не больше двух в каждом столбце. Докажем, что есть столбец, в котором ровно одна единица. Отсюда, очевидно, будет следовать, что ненулевых столбцов в подматрице больше, чем k, что и означает вполне неразложимость матрицы (4) по теореме 1.

Предположим, что в выбранной подматрице не больше, чем k ненулевых столбцов: не больше, чем $(k-1)$ столбцов, в которых не более двух единиц и один столбец, к котором ровно одна единица. Тогда получаем не больше, чем $2(k-1)+1 = 2k-1$ положительных элементов, что противоречит тому, что в выбранной подматрице $2k$ положительных элементов. Значит, ненулевых столбцов в подматрице больше, чем k

Пусть первая строка матрицы (4), которая не содержится в нашей подматрице имеет номер i. Рассмотрим возможные значения i.

- $i = 1$. Пусть первая строка матрицы (4), которая содержится в нашей подматрице имеет номер i_1. Очевидно, $i_1 > 1$. Тогда $(i_1 - 1)$-й столбец подматрицы содержит единицу, и в этом столбце больше нет единиц. Так как верхние строки не участвуют в нашей подматрице, а ниже единиц нет вообще.

- $i = 2$. В этом случае первый столбец подматрицы содержит ровно одну единицу. Вторая единица в этом столбце стоит во второй строчке, а она не содержится в подматрице.

- $i \geq 3$. Тогда $(i-1)$-й столбец подматрицы содержит ровно одну единицу (в $(i-2)$-й строке). Как и в предыдущем случае, вторая единица в $(i-1)$-ом столбце стоит в i-ой строчке, которая не содержится в подматрице.

Таким образом, матрица A вида (4) вполне неразложима.

Покажем теперь, что матрица A *минимально* вполне неразложима. Доказательство можно привести двумя способами:

1 способ. Применяем теорему 1. Возьмем произвольную единицу в k-ой строке и заменим её нулем. В результате получим нулевую подматрицу размера $(k-1)\times(n-k+1)$ или $(n-k+1)\times(k-1)$. Сумма размеров: $k-1+n-k+1=n$. Таким образом, по лемме 1 получили частично разложимую матрицу. Значит исходная матрица A вида (4), по определению, является минимально вполне неразложимой.

2 способ. Доказательство вытекает из следствия 3. Если хотя бы одну единицу заменить нулем, получим строку (столбец), содержащую меньше двух положительных элементов. Такая матрица, по следствию 3, не является вполне неразложимой, то есть она частично разложима. Отсюда следует, что матрица вида (4) минимально вполне неразложима.

Таким образом, теорема 8 доказана.

Рассмотрим теорему 8 и её доказательство на примере матрицы порядка 6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В случае $i = 1$, номер $i_1 = 3$. 2-ой столбец подматрицы содержит ровно одну единицу. Так как вторая единица в этом столбце находится в первой строчке, которая не содержится в подматрице.

В случае $i = 2$ первый столбец подматрицы содержит ровно одну единицу. В случае $i \geq 3$, номер $i = 4$. Здесь 3-ий столбец подматрицы содержит ровно одну единицу.

Отсюда следует, что ненулевых столбцов в любой k-строчной $(k < 6)$ подматрице больше, чем k. То есть матрица вполне неразложима. А если хотя бы одну единицу заменить нулем, получим частично разложимую матрицу. По определени 5 она минимально вполне неразложима.

Изложенное выше доказательство теоремы 8 основано на идее, высказанной М.В.Зубковым. Теперь приведем доказательство, использующее язык графов и теорему 4 из §3. Это доказательство нам понадобится далее, при доказательстве теоремы 11.
Матрицу вида (4) можно представить в виде суммы двух матриц перестановки.

$$A = P + Q, \tag{5}$$

где P и Q - матрицы перестановки порядка n.

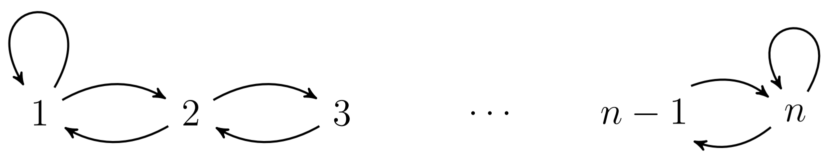
Причем для n-нечетного матрицы примут вид:

$$\text{P=}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

А для n-четного:

$$\text{P=}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Изобразим (0,1)- матрицу A в виде графа (см. опр. 4 §4):

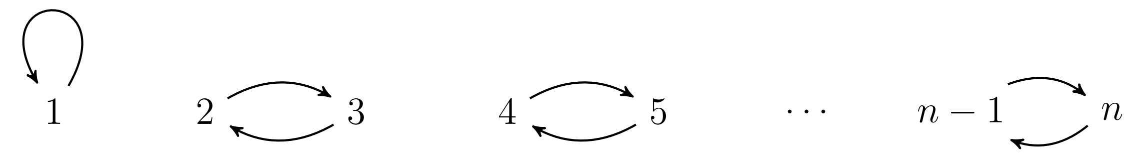


Тогда матрицы P и Q изображаются в виде подграфов графа A.

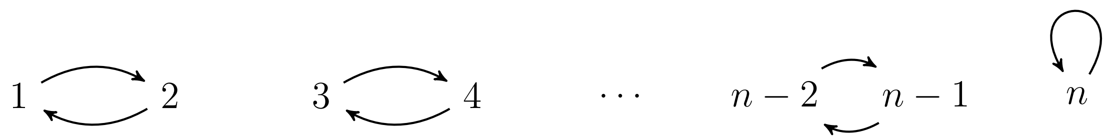
Рассмотрим 2 случая.

1) Число вершин n-нечетное число. Тогда

P:

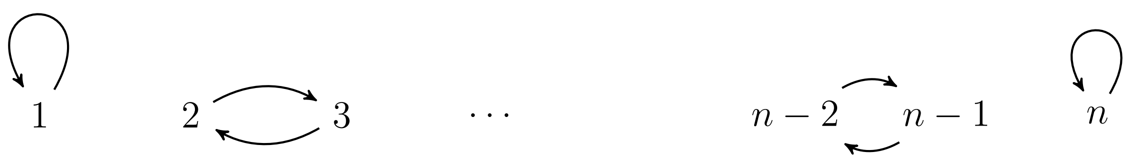


Q:

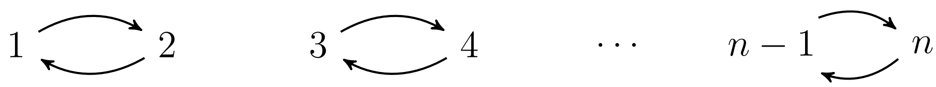


2) Число вершин n-четное число. Тогда

P:



Q:

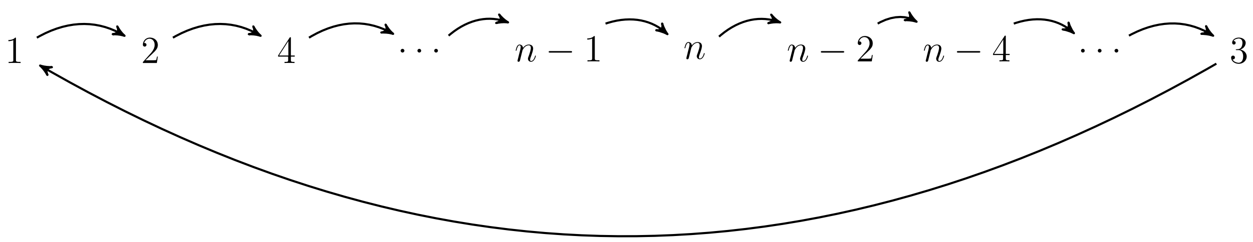


Умножим равенство (5) слева на матрицу P и учтем, что $P^2 = E$ в случаях 1) и 2). Тогда получим равенство

$$AP = E + PQ, \tag{6}$$

Граф матрицы PQ имеет вид при нечетном n:

PQ:



То есть, начиная с вершины 1 совершается последовательный обход четных вершин до вершины $n-1$, затем переход в нечетную вершину n, начиная с которой обходятся нечетные вершины в порядке уменьшения номеров.

При четном n порядок обхода вершин в графе матрицы PQ частично изменяется:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[r, bend left] & 4 \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[r, bend left] & n-2 \arrow[r, bend left] & n \arrow[r, bend left] & n-1 \arrow[r, bend left] & n-3 \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[r, bend left] & 3 \arrow[lllllllll, bend left]
\end{tikzcd}$$

По прежнему, начиная с 1 последовательно обходятся четные вершины до четной вершины n включительно. Затем переход в нечетную вершину $n-1$, начиная с которой обходятся нечетные вершины в порядке уменьшения номеров.

Как видно, в обоих случаях граф матрицы PQ представляет собой полный контур длины n, обходящий все вершины графа. То есть PQ–неразложимая матрица. Отсюда, учитывая равенство (6) и теорему 4 из §3 заключаем, что AP–вполне неразложимая матрица. Поскольку матрицы AP и A перестановочно эквивалентны, то A также вполне неразложима-(см.утв. 3). Теорема доказана.

Теорема 9. Любую минимально вполне неразложимую матрицу можно привести к виду (4).

Доказательство. Дана матрица A - минимально вполне неразложимая, значит в каждой строке и каждом столбце ровно две единицы. Найдем в нашей матрице две строчки, в которых единицы стоят в первом столбце и переставим их с первой и второй строчками. Пользуясь минимально вполне неразложимостью матрицы, можем утверждать, что в первой строке в некотором k-ом столбце $(k > 1)$ есть единица. Переставим k-ый столбец со вторым. Возникает вопрос: может ли вторая единица в k-ом столбце стоять во второй строчке. Ответ: нет, не может.

Действительно, переставляя k-ый столбец со вторым, мы получим матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

где B матрица порядка $n-2$. То есть сумма размеров подматрицы, составленной из первых двух строк будет равна $2+n-2=n$. Следовательно, такая матрица частично разложима.

Таким образом во второй строчке вторая единица стоит в s-ом столбце, где $s>2$. Переставляем s-ый столбец с третьим.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Далее находим строчку, где первая единица на 2-ой позиции и переставляем её с третьей строчкой.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & D & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Заметим, что теперь элемент с номером (3,3), получившейся матрицы, равен нулю. Иначе мы бы опять получили частично разложимую матрицу.

Далее аналогично переставляем поочередно строки и столбцы.

В конце получим, что элементы $(n-1,n)$, $(n,n-1)$ и (n,n) элементы равны 1, так как в каждой строчке и каждом столбце ровно две единицы.

.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, переставляя поочередно строки и столбцы, как показано выше, мы приведем любую минимально вполне неразложимую матрицы к виду (4). Что и требовалось доказать.

Можно сделать вывод: любая минимально вполне неразложимая матрица порядка $n \geq 4$ перестановочно эквивалентна матрице вида (4). Тем самым мы доказали, что матрица (4) является канонической формой минимально вполне неразложимой матрицы относительно перестановочной эквивалентности.

Любая минимально вполне неразложимая матрица может быть приведена к другой канонической форме. Для того, чтобы показать эту форму понадобится теорема Синкхорна и Кноппа из книги [1, Теорема 5.1; стр 88]. Приведем эту теорему.

Теорема 10. Пусть матрица C порядка $n \times n$ близка к частично разложимой, $(n > 1)$. Тогда матрица C при $s \geq 2$ перестановочно эквивалентна матрице вида

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & E_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & E_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{s-1} & E_{s-1} \\ E_s & 0 & 0 & \dots & 0 & A_s \end{pmatrix},$$

где каждая подматрица E_i имеет ровно один положительный элемент. Каждый блок A_i, кроме A_s, порядка $n = 1$, причем подматрица A_s-близка к разложимой.

Матрица C минимально вполне неразложима и, соответственно, матрица содержит $2n$ элементов, только в том случае, когда A_s имеет порядок 1. Предположим, что $A_s \geq 2$, тогда E_{s-1} это строка, а E_s-столбец из s элементов, один из которых положительный. Матрица C вполне неразложима, но не является минимально вполне неразложимой. Действительно, имеется строка и столбец, где единиц больше, чем 2. Следовательно, матрица C минимально вполне неразложима тогда и только тогда, когда A_s имеет порядок $n = 1$, то есть является матрицей вида

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Теорема 11. Матрица вида (4) перестановочно эквивалентна матрице вида (7).

Доказательство. Утверждение теоремы 11 следует из теоремы 9. В силу этой теоремы матрица вида (4), как и любая другая минимально вполне неразложимая матрица, перестановочно эквивалентна матрице вида (4). Но мы укажем конкретный способ построения матриц перестановок, преобразующих матрицу (4) в матрицу (7). Рассмотрим равенство (6):

$$AP = E + PQ.$$

Доказано выше (см.док-во теоремы 8), что PQ–неразложимая матрица, её граф есть полный контур, то есть контур длины n, обходящий все вершины графа.

Матрицу M можно представить в виде

$$M = E + G,$$

где

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Граф G, очевидно, есть полный контур.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[r, bend left] & n \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

Любые два полных контура изоморфны как графы. Соответственно, матрицы PQ и G перестановочно подобны, то есть существует матрица перестановки H, такая что $H^T(PQ)H = G$. Следовательно,

$$H^T A(PH) = H^T EH + H^T PQH = E + G = M.$$

Здесь H^T и PH-искомые преобразующие матрицы. Теорема 11 доказана.

Пример. Приведем матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ к матрице $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, с помощью доказательства теоремы 11.

Доказано выше, что матрицы PQ и G перестановочно подобны, то есть существует матрица перестановки H, такая что $H^T(PQ)H = G$. Из этого равенства следует, что $(PQ)H = HG$.

Решая это уравнение, относительно H, получим

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из равенства $H^T A(PH) = M$ следует, что $(AP)H = HM$, где P-матрица перестановки.

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$APH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$HM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Равенство $(AP)H = HM$ выполняется, следовательно, H нашли верно.

Теорема 12. Любая минимально вполне неразложимая матрица перестановочно эквивалентна матрице вида (7).

Доказательство. Из теоремы 9 следует, что любая минимально вполне неразложимая матрица перестановочно эквивалентна матрице A вида (4). То есть существуют перестановочные матрицы P и Q такие, что $A = PBQ$.

Матрица A вида (4), по теореме 11, перестановочна эквивалентна матрице M вида (7). То есть существуют перестановочные матрицы U и V такие, что $M = UAV$.

Домножим первое равенство слева на U и на V справа, получим $UAV = UPBQV = M$. Обозначим $S = UP$, $R = QV$, тогда $M = SBR$. Так как U, P, Q, V - перестановочные матрицы, то S, R - тоже перестановочные. Следовательно, минимально вполне неразложимая матрица B перестановочно эквивалентна матрице вида (7).

Список использованной литературы.

1. Henryk Minc. Nonnegative matrics. Wiley (1988).–218 c.
2.К.Г. Когос, В.М. Фомичев. Положительные свойства неотрицательных матриц.–Прикладная дискретная маткматика, №4(18), 2012, с.5-13.
3. В.Н. Сачков, В.Е. Тараканов. Комбинаторика неотрицательных матриц. Изд-во "ТВП"(2000).–453 с.
4. Levin M. On non-negative matrices. – Pacific J. Math. 36 (1971), 753-759.
5. В.Е. Тараканов. Комбинаторные задачи и (0,1)-матрицы. Изд-во "Наука"(1985).–192 с.