ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 9 (484)

УДК 517.843

С.Н. ВАСИЛЬЕВ

МЕТОДЫ ФРАКТАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ТИПА БАРНСЛИ

1. Введение

Рассматривается стандартная задача интерполяции: для набора данных $\Delta = \{X, Y\}$, где $X = \{x_i\}_{i=0}^n$, $Y = \{y_i\}_{i=0}^n$, причем $x_i > x_{i-1}$ при $i = 1, 2, \dots, n$, построить функцию f из заданного класса такую, что $f(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, \dots, n$. В работе исследуется один из методов интерполяции — фрактальная интерполяция или интерполяция фрактальной функцией. Фрактальная интерполяция применима в случае, когда интерполируемые функции обладают некоторым самоподобием, имеют похожие свойства при различных масштабах. К таким функциям можно отнести математические модели различного рода естественных границ: береговую линию, рельеф местности, край облака и т. п. Аналогичные функции описывают временные зависимости некоторых характеристик естественных процессов: график температуры пламени, энцефалограммы, колебания курсов валют, сейсмограммы. На практике интерполяция непрерывной фрактальной функцией используется в компьютерном дизайне для получения реалистичных образов береговых линий, горных хребтов, очертаний леса и других объектов со сложной структурой.

Такие интерполирующие функции называют фрактальными, потому что размерность по Хаусдорфу–Безиковичу их графиков может оказаться нецелым числом. Отличительная особенность фрактальной интерполяции состоит в том, что очень сложные функции однозначно определяются малым числом параметров. Это свойство позволяет использовать фрактальную интерполяцию для сжатия информации. Другая особенность этого метода состоит в том, что свойства функции экстраполируются с одного масштаба на другие, позволяя детализировать функцию с сохранением ее свойств.

В данной работе вводится метод фрактальной интерполяции, обобщающий некоторые известные ранее методы. В отличие от работ [1], [2], где используются системы итерируемых функций (IFS) на плоскости, интерполирующая функция строится с помощью оператора на пространстве непрерывных функций. Доказана устойчивость метода по параметрам интерполяции и по интерполируемым данным. Приведены результаты, позволяющие ослабить ограничения, накладываемые [1], [2] на параметры интерполяции для существования интерполирующей функции. Также в работе изучаются условия, при которых интерполирующая функция удовлетворяет дополнительным требованиям: найдены критерии того, что величины первых разностей интерполирующей функции находятся в заданном диапазоне, и критерии того, что функция выпукла на заданных интервалах. Исследована возможность построения фрактальной функции, интерполирующей в среднем.

2. Метод фрактальной интерполяции

Один из способов фрактальной интерполяции введен М.Ф. Барнсли в [1]. В этой работе он показал, что с помощью фрактальной интерполяции можно строить функции с заданными моментами (интегралами вида $\int f^m x^n dx$) и функции, принадлежащие заданному классу Lip^δ, $0 < \delta \le 1$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00460 и № 02-01-00782).

($f \in \mathrm{Lip}^\delta$, если $|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\delta$ для всех x и y из области определения f и некоторой константы $C \in \mathbb{R}$). Так как введенные функции по построению удовлетворяют некоторым отношениям самоподобия, они применимы для решения определенного класса функциональных уравнений, в том числе для некоторых уравнений, содержащих интегральные преобразования. Позднее этот способ был обобщен в [2].

Способ интерполяции, описанный в [1], состоит в следующем: набору данных Δ ставится в соответствие набор преобразований плоскости $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вида

$$\omega_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ 0 & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_i \\ e_i \end{pmatrix}.$$

Здесь d_i — свободные параметры, а остальные коэффициенты однозначно определяются набором d_i из условий

$$\omega_i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \omega_i \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$a_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_n - x_0}, \quad b_i = x_i - a_i x_n, \quad c_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_n - x_0} - d_i \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}, \quad e_i = y_i - c_i x_n - d_i y_n.$$

По набору отображений $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ строится оператор Хатчинсона [3] на компактных подмножествах $\mathbb{R}^2$

$$W(A) = \bigcup_{i=1}^n \omega_i(A), \quad A \subset \mathbb{R}^2.$$

В работе [3] показано, что если отображения ω_i сжимающие, то и оператор W является сжимающим и обладает единственной неподвижной точкой в пространстве компактных подмножеств $\mathbb{R}^2$ с метрикой Хаусдорфа. Барнсли показал, что если $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |d_i| < 1$, то отображения ω_i являются сжимающими в некоторой метрике на $\mathbb{R}^2$. При этом неподвижной точкой построенного оператора, т.е. компактным множеством $G_f \in \mathbb{R}$, удовлетворяющим условию $W(G_f) = G_f$, будет график непрерывной функции f, интерполирующей начальные данные.

3. Обобщение метода Барнсли

Конструкции, изложенные в [1], [2], можно обобщить, перейдя от преобразований плоскости к преобразованиям непрерывных функций. Обозначим множество непрерывных на отрезке $[x_0, x_n]$ функций, интерполирующих данные Δ, через

$$U(\Delta) = \{ f \in C([x_0, x_n]) \mid f(x_i) = y_i \text{ для } i = 0, \ldots, n \}. \tag{1}$$

Для каждого i от 1 до n зафиксируем $\alpha(i)$ и $\beta(i)$ из множества $\{0, \ldots, n\}$, $\alpha(i) \ne \beta(i)$. Согласно обозначениям [2] положим $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ и $J_i' = [x_{\alpha(i)}, x_{\beta(i)}]$ для $i = 1, \ldots, n$ (в литературе по фрактальному сжатию множества J_i и J_i' называются соответственно регионами и доменами). Для i от 1 до n пусть $\psi_i(x) : J_i' \to J_i$ — некоторые гомеоморфизмы доменов на регионы такие, что $\psi_i(x_{\alpha(i)}) = x_{i-1}$ и $\psi_i(x_{\beta(i)}) = x_i$. Пусть D_i — вещественно-значные функции, удовлетворяющие условию $D_i(0) = 0$ и $|D_i(a) - D_i(b)| \le |d_i|\,|a - b|$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$. Кроме того, выберем непрерывные функции $l_i(x) : J_i \to \mathbb{R}$ так, чтобы выполнялись условия

$$l_i(x_{i-1}) = y_{i-1} - D_i(y_{\alpha(i)}), \quad l_i(x_i) = y_i - D_i(y_{\beta(i)}).$$

Определим оператор $W : U(\Delta) \to U(\Delta)$ следующим образом:

$$(Wf)(x) = D_i\big(f\left(\psi_i^{-1}(x)\right)\big) + l_i(x), \quad x \in J_i. \tag{2}$$

Теорема 1. *Оператор W определен корректно на функциях из $U(\Delta)$ и $Wf \in U(\Delta)$ для любой $f \in U(\Delta)$. Если $d = \max_{i=1,\ldots,n} |d_i| < 1$, то в $U(\Delta)$ существует единственная функция f_W такая, что $Wf_W = f_W$.*

Доказательство. Пусть $f \in U(\Delta)$, тогда на каждом из регионов J_i функция $Wf(x)$ непрерывна как композиция и сумма непрерывных функций. Для $i = 1, \ldots, n-1$ в точках $x_i \in J_i \cup J_{i+1}$ функция Wf определена дважды: $Wf(x_i) = D_i(f(\psi_i^{-1}(x_i))) + l_i(x_i)$ и $Wf(x_i) = D_{i+1}(f(\psi_{i+1}^{-1}(x_i))) + l_{i+1}(x_i)$. Легко проверить, что при заданных ограничениях на l_i для $f \in U(\Delta)$ эти значения совпадают и равны y_i. Следовательно, функция Wf определена корректно, непрерывна на всем $[x_0, x_n]$ и интерполирует Δ.

Далее, $\|f\|_{[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ — равномерная метрика на отрезке $[a, b]$. Если $[a, b] = [x_0, x_n]$, то вместо $\|f\|_{[x_0,x_n]}$, как обычно, будем писать просто $\|f\|$. Из определения W следует

$$\|Wf - Wg\| = \max_{i=1,\ldots,n} \|Wf - Wg\|_{J_i} \leq \max_{i=1,\ldots,n} |d_i| \|f, g\|,$$

поэтому, если $\max_{i=1,\ldots,n} |d_i| < 1$, то оператор W является сжимающим в равномерной метрике на $[a, b]$. Следовательно, по теореме Банаха в $U(\Delta)$ существует единственная функция f_W, для которой $Wf_W = f_W$ (неподвижная точка), причем для любой $g \in U(\Delta)$ последовательность $Wg, W^2g, \ldots, W^ng, \ldots$ равномерно сходится к f_W. □

Отметим, что в отличие от методов, рассмотренных в [1], [2], для сжимаемости отображения W здесь не требуется сжимаемость отображений ψ_i.

4. Спектральный радиус оператора интерполяции

Для того чтобы итерационный процесс сходился к неподвижной точке при любых начальных условиях, достаточно, чтобы спектральный радиус оператора

$$\widehat{d} = \lim_{k \to \infty} (\|W^k\|)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to \infty} \left(\sup_{f \neq g} \frac{\|W^k f - W^k g\|}{\|f - g\|} \right)^{\frac{1}{k}} \tag{3}$$

был строго меньше 1, при этом сам оператор не обязан быть сжимающим. Следовательно, класс фрактальных интерполирующих функций можно расширить, если вместо условия $d < 1$ требовать $\widehat{d} < 1$. Очевидно, $\widehat{d} \leq d$. В данном параграфе найдем более точную оценку для величины $\widehat{d}$.

Пусть

$$Q_i = \{k | J_k \subset J'_i\}$$

— множество индексов регионов, входящих в i-й домен. Сопоставим оператору W ориентированный граф G_W следующим образом: вершинами графа будут регионы (от 1 до n), вес $c_{i,j}$ дуги из i в j определяется следующим образом:

$$c_{i,j} = \begin{cases} |d_j|, & \text{если } j \in Q_i; \\ 0, & \text{если } j \notin Q_i. \end{cases}$$

Это полный ориентированный граф с петлями. Определим вес маршрута как произведение весов всех дуг, входящих в маршрут.

Теорема 2. *Справедлива оценка*

$$\widehat{d} \leq \max_{1 \leq k \leq n} C(G_W, k)^{\frac{1}{k}}, \tag{4}$$

где $C(G_W, k)$ — наибольший вес циклов длины k в графе G_W.

Доказательство. Пусть $\rho(f,g) = \|f(x)-g(x)\|$, $\rho_i(f,g) = \|f(x)-g(x)\|_{J_i}$, и $\rho_i'(f,g) = \|f(x)-g(x)\|_{J_i'}$. Ясно, что

$$\rho_i'(f,g) = \max_{k\in Q_i} \rho_k(f,g) \quad \text{и} \quad \rho(f,g) = \max_{i=1,\dots,n} \rho_i(f,g).$$

Из определения W следует $\rho_i(Wf,Wg) \le |d_i|\rho_i'(f,g)$. Применяя последнюю формулу k раз, получаем

$$\rho(W^kf,W^kg) = \max_{i=1,\dots,n} \rho_i(W^kf,W^kg) \le \max_{i=1,\dots,n} |d_i|\rho_i'(W^{k-1}f,W^{k-1}g) =$$
$$= \max_{i_1=1,\dots,n} \left(|d_{i_1}| \max_{i_2\in Q_{i_1}} \rho_{i_2}(W^{k-1}f,W^{k-1}g)\right) \le \ldots \le$$
$$\le \max_{i_1=1,\dots,n} \left(|d_{i_1}| \max_{i_2\in Q_{i_1}} \left(|d_{i_2}| \max_{i_3\in Q_{i_2}} \left(|d_{i_3}| \ldots \max_{i_k\in Q_{i_{k-1}}} |d_{i_k}|\right)\right)\right)\rho(f,g).$$

Коэффициент при $\rho(f,g)$ в последней формуле представляет собой формулу для вычисления наибольшего веса маршрута длины k в графе G_W. Обозначим эту величину $P(G_W,k)$, тогда $P(G_W,k)^{1/k}$ — среднее геометрическое весов ребер маршрута, и $\widehat{d} \le \lim\limits_{k\to\infty} P(G_W,k)^{1/k}$. Так как в данном графе всего n вершин, то при больших k любой маршрут длины k, за исключением не более чем $n-1$ ребра, будет состоять из циклов. Максимальный вес оставшихся ребер ограничен, следовательно, при переходе к пределу им можно пренебречь, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} P(G_W,k)^{1/k} = \lim_{k\to\infty} \max_{m\le k} C(G_W,m)^{1/k}.$$

Так как граф конечен, то любой цикл будет состоять из циклов длины не более n, и при $k\to\infty$ максимальный средний вес циклов длины не более чем k будет стремиться к максимальному среднему весу циклов длины не более чем n. Следовательно, предел в (3) оценивается сверху величиной $\max\limits_{1\le k\le n} C(G_W,k)^{1/k}$. $\square$

Отметим, что задача поиска величины $\max\limits_{1\le k\le n} C(G_W,k)^{1/k}$ решается, например, с помощью стандартного алгоритма Форда–Беллмана (напр.,[4], с. 71). Отметим, что в случае аффинной фрактальной интерполяции, который будет особо изучаться далее, оценка спектрального радиуса точна, т. е. (4) обращается в равенство.

5. Устойчивость интерполяции по параметрам

Отметим, что можно оценить норму неподвижной точки оператора W через его параметры, т. е. функции D_i, l_i и ψ_i. Действительно, пусть $l = \max\limits_{i=1,\dots,n} \|l_i\|_{J_i}$ и $d<1$. Для любой функции f выполнено неравенство $\|Wf\| \le d\|f\| + l$, следовательно, $\|f_W\|(1-d) \le l$, т. е. $\|f_W\| \le \frac{l}{1-d}$.

Рассмотрим вопрос непрерывности фрактальной интерполирующей функции по параметрам отображения W. Отметим, что если f_W — неподвижная точка сжимающего оператора W, то для всех f выполнена оценка

$$\|f-f_W\| \le \|f-Wf\| + \|Wf - Wf_W\| \le \|f-Wf\| + d\|f-f_W\|,$$

откуда получаем

$$\|f-f_W\| \le \frac{\|f-Wf\|}{1-d}. \tag{5}$$

Оценка (5) (известная как неравенство Барнсли) имеет особую прикладную ценность для фрактальных методов, т. к. она позволяет оценить близость функции к неподвижной точке, когда сама неподвижная точка неизвестна. Это позволяет установить критерий остановки итерационного процесса.

Пусть для некоторого набора Δ заданы два набора параметров: $\{D_i\}_{i=1}^n$, $\{\psi_i\}_{i=1}^n$, $\{l_i\}_{i=1}^n$, по которым строятся оператор W и соответствующая ему функция f_W, и $\{D_i^*\}_{i=1}^n$, $\{\psi_i^*\}_{i=1}^n$, $\{l_i^*\}_{i=1}^n$, соответствующие оператору W^* и функции f_{W^*}. Разумеется, для близости операторов W и W^* необходимо совпадение индексов $\alpha(i),\ \beta(i)$, ставящих домены в соответствие с регионами.

Пусть

$$w(f,h) = \sup\{|f(z_1) - f(z_2)| \mid x_0 \le z_1 \le z_2 \le x_n,\ |z_1 - z_2| \le h\}$$

— модуль непрерывности функции f. Так как интерполирующая функция f_W непрерывна на отрезке, то $w(f_W, h)$ непрерывен при $h \to +0$.

Предложение 1. *Метод фрактальной интерполяции устойчив по параметрам D_i, ψ_i и l_i, и верна оценка*

$$\|f_W - f_{W^*}\| \le \frac{1}{1-d^*} \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \|D_i^* - D_i\|_{\mathbb{R}} + dw\left(f, \|(\psi_i^*)^{-1} - \psi_i^{-1}\|_{J_i'}\right) + \|l_i^* - l_i\|_{J_i} \right\}.$$

Доказательство. Исходя из неравенства (5), для двух операторов W и W^* можно оценить расстояние между их неподвижными точками

$$\|f_W - f_{W^*}\| \le \frac{\|f_W - W^* f_W\|}{1-d^*} = \frac{\|W f_W - W^* f_W\|}{1-d^*}. \tag{6}$$

Величину, стоящую в числителе (6), можно оценить следующим образом: $\|Wf - W^*f\| \le \max\limits_{i=1,\dots,n} \Big(\|D_i(f(\psi_i^{-1}(x))) - D_i^*(f((\psi_i^*)^{-1}(x)))\|_{J_i} + \|l_i(x) - l_i^*(x)\|_{J_i} \Big)$. Так как на любом регионе $\|D_i(f(\psi_i^{-1}(x))) - D_i^*(f((\psi_i^*)^{-1}(x)))\|_{J_i} \le \|D_i - D_i^*\|_{\mathbb{R}} + \|D_i(f(\psi_i^{-1}(x))) - D_i(f((\psi_i^*)^{-1}(x)))\|_{J_i} \le \|D_i - D_i^*\|_{\mathbb{R}} + |d_i| \|f(\psi_i^{-1}(x)) - f((\psi_i^*)^{-1}(x))\|_{J_i}$ и по определению модуля непрерывности для каждого i от 1 до n $\|f(\psi_i^{-1}(x)) - f((\psi_i^*)^{-1}(x))\|_{J_i} \le w\left(f, \|\psi_i^{-1} - (\psi_i^*)^{-1}\|_{J_i}\right)$, то отсюда следует требуемое неравенство. $\square$

6. Устойчивость по начальным данным

В этом и последующих разделах будем изучать только случай "аффинной" фрактальной интерполяции, когда D_i, ψ_i и l_i — аффинные функции. Тогда $D_i(x) = d_i x$, где d_i — некоторая константа, удовлетворяющая условию $|d_i| < 1$. Коэффициент сжатия оператора W в рассматриваемом случае равен $d = \max\limits_{i=1,\dots,n} |d_i|$.

Из условий на ψ_i и l_i вытекает

$$\psi_i(z) = x_{i-1} + (z - x_{\alpha(i)}) \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{\beta(i)} - x_{\alpha(i)}}, \tag{7}$$

$$l_i(z) = (z - x_{i-1}) \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - d_i \frac{y_{\beta(i)} - y_{\alpha(i)}}{x_i - x_{i-1}} \right) + y_{i-1} - d_i y_{\alpha(i)}. \tag{8}$$

Таким образом, начальные данные Δ и набор $\{d_i\}_{i=1}^n$ полностью определяют оператор W. Величины d_i здесь играют роль свободных параметров. Получаемый класс интерполирующих функций будет плотен в пространстве непрерывных функций (см. напр., [1]).

Покажем устойчивость аффинной фрактальной интерполяции по параметрам интерполяции. Пусть далее в этом параграфе $D = \{d_i\}_{i=1}^n$, $D^* = \{d_i^*\}_{i=1}^n$, $X = \{x_i\}_{i=0}^n$, $X^* = \{x_i^*\}_{i=0}^n$, $Y = \{y_i\}_{i=0}^n$, $Y^* = \{y_i^*\}_{i=0}^n$, $U(\Delta) = \{X, Y\}$, оператор $W : U(\Delta) \to U(\Delta)$ всегда определен набором параметров D по формулам (1), (2), (7) и (8). Оператору W соответствуют функции ψ_i и l_i, а оператору W^* соответствуют функции ψ_i^* и l_i^*. Для набора $Z = \{z_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$ обозначим $\|Z\| = \max\limits_{i=0,\dots,n} |z_i|$.

Лемма 1. *Пусть оператор $W^* : U(\Delta) \to U(\Delta)$ определен набором параметров D^* по формулам* (1), (2), (7) *и* (8), *тогда*

$$\|f_{W^*} - f_W\| = \max_{i=1,\dots,n} |d_i - d_i^*| \frac{2\|Y\|}{(1-d)(1-d^*)}.$$

Доказательство. Легко подсчитать, что в аффинном случае $l \leq (1+d)\|Y\|$ и соответствено $\|f\| \leq \frac{1+d}{1-d}\|Y\|$. Из неравенства (6) и формулы (8) получаем

$$\|f_W - f_{W^*}\| \leq \frac{\|Wf_W - W^*f_W\|}{1-d^*} \leq \frac{1}{1-d^*} \max_{i=1,\dots,n} (|d_i - d_i^*|\, \|f_W\| + \|l_i - l_i^*\|_{J_i}) \leq$$
$$\leq \frac{1}{1-d^*} \max_{i=1,\dots,n} |d_i - d_i^*| \left(\frac{1+d}{1-d}\|Y\| + \|Y\|\right),$$

откуда следует утверждение леммы (здесь в вычислениях учитывается, что функции $l_i - l_i^*$ аффинны, следовательно, $\|l_i - l_i^*\|_{J_i} = \max\{|l_i(x_{i-1}) - l_i^*(x_{i-1})|,\ |l_i(x_i) - l_i^*(x_i)|\}$).

Лемма 2. *Пусть* $\Delta^* = \{X, Y^*\}$, *и оператор* $W^* : U(\Delta^*) \to U(\Delta^*)$ *определен набором параметров* D *по формулам* (1), (2), (7) *и* (8), *тогда*

$$\|f_W - f_{W^*}\| \leq \frac{1+d}{1-d}\|Y - Y^*\|.$$

Доказательство. Заметим, что функции ψ_i и ψ_i^* у операторов W и W^* совпадают (т. к. совпадают наборы X). Пусть $g \in U(\Delta)$ и $g^* \in U(\Delta^*)$ — кусочно-линейные функции, имеющие узлы только в точках x_i. Тогда $\|g\| = \|Y\|$, $\|g^*\| = \|Y^*\|$, $\|g - g^*\| = \|Y - Y^*\|$. Определим оператор $T : U(\Delta) \to U(\Delta^*)$, действующий по правилу $Tf = f - g + g^*$. Тогда при $x \in J_i$ имеет место равенство

$$W^*Tf_W(x) - TWf_W(x) =$$
$$= d_i(f_W - g + g^*)(\psi_i^{-1}(x)) + l_i^*(x) - \left(d_i f_W(\psi_i^{-1}(x)) + l_i(x) - g(x) + g^*(x)\right) =$$
$$= d_i(g^* - g)(\psi_i^{-1}(x)) + l_i^*(x) - l_i(x) + g(x) - g^*(x).$$

Учитывая, что последние четыре функции аффинны на J_i, имеем

$$\|l_i^* - l_i + g - g^*\|_{J_i} \leq \max\{|(l_i^* - l_i + g - g^*)(x_{i-1})|,\ |(l_i^* - l_i + g - g^*)(x_i)|\} =$$
$$= \max\{|d_i(y_{\alpha(i)} - y^*_{\alpha(i)})|, |d_i(y_{\beta(i)} - y^*_{\beta(i)})|\} \leq |d_i|\|Y - Y^*\|.$$

Следовательно, $\|W^*Tf_W - Tf_W\| \leq 2d\|Y - Y^*\|$, и, пользуясь оценкой (5), получаем

$$\|f_W - f_{W^*}\| \leq \|f_W - Tf_W\| + \|Tf_W - f_{W^*}\| \leq \frac{1+d}{1-d}\|Y - Y^*\|. \quad \square$$

Далее будем считать $x_0 = x_0^*$ и $x_n = x_n^*$ (чтобы сравниваемые функции имели одинаковые области определения).

Лемма 3. *Пусть* $\Delta^* = \{X^*, Y\}$, *и оператор* $W^* : U(\Delta^*) \to U(\Delta^*)$ *определен набором параметров* D *по формулам* (1), (2), (7) *и* (8), *тогда*

$$\|f_W - f_{W^*}\| \leq \frac{1+d}{1-d} w(f_W, \|X - X^*\|).$$

Доказательство. Пусть $\xi(x) : [x_0, x_n] \to [x_0, x_n]$ — кусочно-линейная функция с узлами в точках x_i^* такая, что $\xi(x_i^*) = x_i$. В силу аффинности ξ на J_i^* имеем

$$\|\xi(x) - x\| \leq \max_{i=0,\dots,n} \|\xi(x_i^*) - x_i^*\|_{J_i^*} \leq \max_{i=0,\dots,n} \|x_i - x_i^*\| = \|X - X^*\|.$$

Определим оператор T по правилу $Tf(x) = f(\xi(x))$. Ясно, что $Tf(x_i^*) = f(\xi(x_i^*)) = f(x_i)$, следовательно, оператор T переводит функции из $U(\Delta)$ в функции из $U(\Delta^*)$. Из свойств функции ξ следует $\|Tf - f\| \leq w(f, \|X - X^*\|)$. Далее для $x \in J_i^*$ выполнена оценка

$$(W^*Tf_W - TWf_W)(x) = d_i f_W\left(\xi\left((\psi_i^*)^{-1}(x)\right)\right) + l_i^*(x) - d_i f_W\left(\psi_i^{-1}(\xi(x))\right) - l_i(\xi(x)).$$

Из условий, накладываемых на l_i, следует, что $l_i(\xi(x)) = l_i^*(x)$. Делая замену переменной $x = \psi_i^*(t)$ на регионе J_i^*, получаем оценку

$$\|\xi\left((\psi_i^*)^{-1}(x)\right) - \psi_i^{-1}(\xi(x))\|_{J_i^*} = \|\xi(t) - \psi_i^{-1}(\xi(\psi_i^*(t)))\|_{J_i^{*\prime}} \le$$
$$\le \|\xi(t) - t\| + \|t - \psi_i^{-1}(\xi(\psi_i^*(t)))\|_{J_i^{*\prime}} \le 2\|X - X^*\|,$$

т. к. функция $\psi_i^{-1}(\xi(\psi_i^*(t)))$ аффинно отображает $J_i^{*\prime}$ на J_i'. Таким образом,

$$\|W^*Tf_W - Tf_W\| \le dw(f, 2\|X - X^*\|),$$

откуда, пользуясь оценкой (5), запишем неравенство

$$\|f_W - f_{W^*}\| \le \|f_W - Tf_W\| + \frac{\|W^*Tf_W - Tf_W\|}{1-d} \le$$
$$\le w(f_W, \|X - X^*\|) + \frac{d}{1-d} w(f_W, 2\|X - X^*\|) \le \frac{1+d}{1-d} w(f_W, \|X - X^*\|)$$

(здесь мы воспользовались полуаддитивностью модуля непрерывности $w(f, 2\delta) \le 2w(f, \delta)$ при любом $\delta > 0$). $\square$

Последовательно применяя леммы 3, 2 и 1, получаем

Предложение 2. *Пусть* $\Delta^* = \{X^*, Y^*\}$, *и оператор* $W^* : U(\Delta^*) \to U(\Delta^*)$ *определен набором параметров* D^* *по формулам* (1), (2), (7) *и* (8), *тогда*

$$\|f_W - f_{W^*}\| \le \frac{1+d}{1-d}\left(w(f_W, \|X - X^*\|) + \|Y - Y^*\|\right) + \max_{i=1,\dots,n} |d_i - d_i^*| \frac{2\|Y^*\|}{(1-d)(1-d^*)}.$$

Мы доказали, что аффинная фрактальная интерполяция устойчива по параметрам и интерполируемым данным. Далее изучаются условия на параметры интерполяции, при которых интерполирующая функция удовлетворяет различного рода дополнительным требованиям.

7. Интерполяция с ограничением на константы Липшица

В качестве требования, накладываемого на интерполирующую функцию, рассмотрим условие

$$c(x - y) \le f(x) - f(y) \le C(x - y), \quad x \le y, \quad c, C \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Константы c и C называют верхней и нижней константами Липшица. Если $c = -\infty$ или $C = +\infty$, то будем считать, что соответствующее ограничение отсутствует. Константы c и C можно брать различными для различных участков области определения функции f. Частным случаем такого ограничения может быть монотонность функции ($c = 0$, $C = +\infty$ либо $c = -\infty$, $C = 0$).

Ниже будут найдены условия, при которых интерполирующая функция удовлетворяет ограничениям (9) для различных констант Липшица на различных регионах. При интерполяции сплайнами задача построения монотонной интерполирующей функции является довольно сложной (напр., [5]). Как мы увидим ниже, для фрактальной интерполяции ограничение на константы Липшица является более естественным. Впервые задача построения фрактальной интерполирующей функции, сохраняющей монотонность начальных данных, изучалась в [6], позднее критерии сохранения монотонности (на всем отрезке интерполяции) были найдены в [7].

Пусть $\sigma(f, z_1, z_2) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}$ — первая разность (наклон) функции f на отрезке $[z_1, z_2]$. Для двух различных точек, лежащих в i-м домене $z_1, z_2 \in J_i'$, наклон функции Wf на отрезке $[\psi_i(z_1), \psi_i(z_2)]$ равен

$$\sigma(Wf, \psi_i(z_1), \psi_i(z_2)) = d_i \sigma(f, z_1, z_2) \frac{x_{\beta(i)} - x_{\alpha(i)}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - d_i \frac{y_{\beta(i)} - y_{\alpha(i)}}{x_i - x_{i-1}}. \tag{10}$$

Введем обозначения: $r_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$, $r'_i = \frac{y_{\beta(i)} - y_{\alpha(i)}}{x_{\beta(i)} - x_{\alpha(i)}}$ — наклоны интерполирующей функции на i-х регионах и доменах соответственно, $A_i = \frac{x_{\beta(i)} - x_{\alpha(i)}}{x_i - x_{i-1}}$, $i = 1, \dots, n$, — якобиан преобразования ψ_i^{-1}. В этих обозначениях (10) записывается как

$$\sigma(Wf, \psi_i(z_1), \psi_i(z_2)) = A_i d_i(\sigma(f, z_1, z_2) - r'_i) + r_i.$$

Обозначим

$$\phi_i(l) = A_i d_i(l - r'_i) + r_i.$$

Таким образом, функция $\phi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ показывает зависимость наклона функции Wf на i-м регионе от наклона функции f на i-м домене. Для сокращения записи доопределим ϕ_i по непрерывности

$$\phi(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & \text{если } d_i A_i > 0; \\ r_i, & \text{если } d_i A_i = 0; \\ \mp\infty, & \text{если } d_i A_i < 0. \end{cases}$$

Определим

$$s(f, a, b) = \inf_{x,y \in [a,b],\ x \neq y} \sigma(f, x, y),$$
$$S(f, a, b) = \sup_{x,y \in [a,b],\ x \neq y} \sigma(f, x, y)$$

— наилучшие верхняя и нижняя константы Липшица функции f на отрезке $[a, b]$. Следующая легко проверяемая лемма отмечает одну из полезных особенностей этих величин.

Лемма 4. *Для любой функции f, определенной на отрезке $[a, c]$, при $b \in (a, c)$ выполняются равенства*

$$s(f, a, c) = \min\{s(f, a, b), s(f, b, c)\},$$
$$S(f, a, c) = \max\{S(f, a, b), S(f, b, c)\}.$$

Пусть $s_i(f) = s(f, x_{i-1}, x_i)$ и $S_i(f) = S(f, x_{i-1}, x_i)$ — супремум и инфимум наклонов функции f на i-м регионе, и аналогично $s'_i(f) = s(f, x_{\alpha(i)}, x_{\beta(i)})$ и $S'_i(f) = S(f, x_{\alpha(i)}, x_{\beta(i)})$ — супремум и инфимум наклонов f на i-м домене.

Лемма 5. *Если для некоторого набора параметров интерполяции существует такой набор $\{t_i, T_i,\}_{i=1}^n$, $t_i \leq r_i \leq T_i$, что для всех $i = 1, \dots, n$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} t_i &\leq \min\{\phi_i(\min_{k \in Q_i}\{t_k\}),\ \phi_i(\max_{k \in Q_i}\{T_k\})\}, \\ T_i &\geq \max\{\phi_i(\min_{k \in Q_i}\{t_k\}),\ \phi_i(\max_{k \in Q_i}\{T_k\})\}, \end{aligned} \tag{11}$$

то для экстремальных наклонов аттрактора f_W на регионах справедлива оценка

$$t_i \leq s_i \leq S_i \leq T_i.$$

Доказательство. В силу монотонности и непрерывности функций ϕ_i, если ϕ_i не убывает ($d_i A_i \geq 0$), то $s_i(Wf) = \phi_i(s'_i(f))$ и $S_i(Wf) = \phi_i(S'_i(f))$, и аналогично $s_i(Wf) = \phi_i(S'_i(f))$ и $S_i(Wf) = \phi_i(s'_i(f))$, если ϕ_i не возрастает. Это можно записать как

$$\begin{aligned} s_i(Wf) &= \min\{\phi_i(s'_i(f)),\ \phi_i(S'_i(f))\}, \\ S_i(Wf) &= \max\{\phi_i(s'_i(f)),\ \phi_i(S'_i(f))\}, \end{aligned} \tag{12}$$

т. е. экстремальные значения наклонов на домене переводятся оператором W в экстремальные значения наклонов на регионе. Кроме того, из леммы 4 следует

$$s'_i(f) = \min_{k \in Q_i}\{s_k(f)\}, \quad S'_i(f) = \max_{k \in Q_i}\{S_k(f)\}. \tag{13}$$

Пусть для некоторой функции $f \in U$ выполнены условия $t_i \le s_i(f) \le S_i(f) \le T_i$. Тогда из (11) с учетом формул (12) и (13) и аффинности функций ϕ_i следует, что для любого региона $t_i \le \min\{\phi_i(\min_{k\in Q_i}\{s_k(f)\}),\ \phi_i(\max_{k\in Q_i}\{S_k\})\} = s_i(Wf)$. Аналогично $T_i \ge S_i(Wf)$.

Рассмотрим кусочно-линейную функцию $f_0 \in U$ с узлами только в точках $\{x_i\}_{i=0}^n$ и построим последовательность функций $f_{k+1} = Wf_k$. Так как $s_i(f_0) = r_i = S_i(f_0)$, и по условию леммы $t_i \le r_i \le T_i$, то для всех натуральных k выполнены неравенства $t_i \le s_i(f_k) \le S_i(f_k) \le T_i$. Так как последовательность $\{f_k\}$ сходится к аттрактору f_W равномерно, то выполняются неравенства $t_i \le s_i(f_W) \le S_i(f_W) \le T_i$. $\square$

Отметим, что если t_i и T_i таковы, что $t_i \le r_i \le T_i$, то множество наборов свободных параметров d_i, удовлетворяющих (11), непусто (содержит по крайней мере нулевое решение).

В следующей теореме приводится критерий того, что интерполирующая функция имеет заданные константы Липшица на заданных регионах интерполяции.

Теорема 3. *Фрактальная интерполирующая функция f_W, построенная с помощью оператора W, определенного набором параметров D по формулам* (1), (2), (7) *и* (8), *удовлетворяет условиям*

$$z_i(x-y) \le f(x) - f(y) \le Z_i(x-y) \quad \text{при} \quad x \le y, \quad x, y \in J_i, \quad i = 1, \dots, n$$

тогда и только тогда, когда существуют такие $\{t_i, T_i\}_{i=1}^n$, что $z_i \le t_i \le r_i \le T_i \le Z_i$ и параметры d_i оператора W удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{aligned} t_i &\le d_i A_i(t'_i - r'_i) + r_i \le T_i, \\ t_i &\le d_i A_i(T'_i - r'_i) + r_i \le T_i, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n, \tag{14}$$

где $t'_i = \min\limits_{J_k \subset J'_i} t_k$ и $T'_i = \max\limits_{J_k \subset J'_i} T_k$.

Доказательство. Достаточность следует из леммы 5, т. к. при выполнении условий (14) будут выполнены неравенства (11), поэтому на регионе J_i наклоны функции f_W будут лежать в промежутке $[t_i, T_i]$. Следовательно, они будут лежать и в более широких промежутках $[z_i, Z_i]$. Отдельно рассматривается только случай, когда $t_i = -\infty$ или $T_i = +\infty$. Из приведенных выше соглашений о значениях $\phi_i(\pm\infty)$ следует, что в этом случае неравенство из условия теоремы превращается в ограничение на знак d_i либо в условие $d_i = 0$.

Необходимость следует из того, что указанные ограничения выполняются для величин $t_i = s_i(f_W)$ и $T_i = S_i(f_W)$. $\square$

С помощью данной теоремы можно подбирать свободные параметры, при которых первые разности на заданных регионах находятся в заранее заданных интервалах. Чтобы интерполирующая функция была неубывающей, достаточно выбрать $t_i = 0$ и $T_i = +\infty$, аналогично чтобы функция была невозрастающей, можно взять $t_i = -\infty$ и $T_i = 0$.

8. Выпуклость

Рассмотрим ограничения на параметры интерполяции, при которых фрактальная интерполирующая функция удовлетворяет некоторым условиям выпуклости. Функция выпукла вверх на отрезке $[a, b]$, если и только если выполнено соотношение

$$\sigma(f, z_1, z_2) \ge \sigma(f, z_2, z_3) \text{ для любых трех точек } z_1 < z_2 < z_3,\ z_1, z_2, z_3 \in [a, b],$$

и соответственно выпукла вниз, если и только если

$$\sigma(f, z_1, z_2) \le \sigma(f, z_2, z_3) \text{ для любых трех точек } z_1 < z_2 < z_3, \quad z_1, z_2, z_3 \in [a, b].$$

Будем исследовать ограничения, при которых интерполирующая функция на заданных регионах будет выпуклой в заданную сторону.

Потребуется следующее очевидное свойство выпуклых функций.

Лемма 6. *Функция f выпукла вверх (вниз) на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$ и $s(f,a,b) \geq S(f,b,c)$ (соответственно $S(f,a,b) \leq s(f,b,c)$), тогда и только тогда, когда f является выпуклой вверх (соответственно вниз) на всем отрезке $[a,c]$.*

Из аффинности функций ϕ_i следует, что если функция f является выпуклой вверх или вниз на домене J_i', то ее образ Wf будет выпуклым на регионе J_i (если ϕ_i возрастает, то выпуклость будет в ту же сторону, а если убывает, то в противоположную). Если же f не является выпуклой в какую-либо сторону на J_i', то Wf будет выпуклым на регионе J_i тогда и только тогда, когда $d_i = 0$.

Пусть заданы множества индексов V_+ и V_- — номера регионов, на которых функция должна быть выпуклой вверх и соответственно вниз. Если $i \in V_+ \bigcap V_-$, то на регионе J_i функция должна быть аффинной.

Лемма 7. *Пусть существует набор $\{t_i, T_i\}_{i=1}^n$, $t_i \leq r_i \leq T_i$, удовлетворяющий условиям* (11) *леммы* 5. *Если для каждого $i \in V_+$ такого, что $d_i > 0$, и каждого $i \in V_-$ такого, что $d_i < 0$, выполнено условие*

(a) *$Q_i \subset V_+$, и если одновременно $k \in Q_i$ и $k+1 \in Q_i$, то $s_k > S_{k+1}$,*
и для каждого $i \in V_+$ такого, что $d_i < 0$, и каждого $i \in V_-$ такого, что $d_i > 0$, выполнено условие

(b) *$Q_i \subset V_-$, и если одновременно $k \in Q_i$ и $k+1 \in Q_i$, то $S_k < s_{k+1}$,*
то фрактальная интерполирующая функция является выпуклой вверх на регионах J_i при $i \in V_+$ и выпуклой вниз на регионах J_i при $i \in V_-$.

Доказательство. Пусть f_1 — кусочно-линейная функция, интерполирующая начальные данные. Построим последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_{k+1} = Wf_k$. По лемме 5 для любого натурального k и для всех $i = 1,\ldots,n$ выполняются неравенства $t_i \leq s_i(f_k) \leq S_i(f_k) \leq T_i$. Функция f_1 выпукла на всех регионах в обе стороны. Пусть для некоторого k функция f_k выпукла вверх на J_i при всех $i \in V_+$ и вниз на J_i при всех $i \in V_-$. Если $d_i = 0$, то Wf_k аффинна на J_i, значит, выпукла в обе стороны. Если $d_i \neq 0$, то, когда $i \in V_+$ или $i \in V_-$, должно быть выполнено условие (a) или (b) (в зависимости от знака), причем по лемме 6 это условие обеспечивает выпуклость функции Wf_k на регионе J_i в нужную сторону. Получаем, что последовательность функций $\{f_k\}$ для всех k будет удовлетворять наложенным условиям выпуклости, и из равномерной сходимости последовательности f_k к f_W следует, что функция f_W тоже выпукла на J_i вверх при $i \in V_+$ и вниз при $i \in V_-$. $\square$

Теорема 4. *Функция f_W, построенная с помощью оператора W, определенного набором параметров D по формулам* (1), (2), (7) *и* (8), *является выпуклой вверх на регионах J_i при $i \in V_+$ и выпуклой вниз на регионах J_i при $i \in V_-$ тогда и только тогда, когда существуют множества U_+ и U_- такие, что $V_+ \subset U_+$, $V_- \subset U_-$, и свободные параметры d_i таковы, что выполняются условия леммы* 7.

Доказательство. Достаточность следует из леммы 7.

Необходимость. Для функции f_W возьмем $t_i = s_i$, $T_i = S_i$, а в множества U_+ и U_- включим все номера регионов, на которых f_W выпукла соответственно вверх и вниз. Вложения $V_+ \subset U_+$ и $V_- \subset U_-$ будут выполнены по условию теоремы. Покажем, что при этом будут выполнены и условия леммы 7. Действительно, пусть для некоторого $i \in U_+$ или $i \in U_-$ $d_i \neq 0$ и нарушено условие (a) или (b) (в зависимости от знака d_i) леммы 7. Тогда по лемме 6 образ функции f_W при отображении W не будет выпуклым на регионе J_i. Но $Wf_W = f_W$, а функция f_W выпукла на этом регионе по построению множеств U_+ и U_-. $\square$

9. Фрактальная интерполяция в среднем

Изучим условия, при которых функция, построенная нашим методом, будет интерполировать в среднем, т.е. интегралы функции f_W по окрестностям $V(x_i)$ точек x_i будут принимать заданные значения h_i. Обозначим $H = \{h_i\}_{i=0}^n$ и $Y = \{y_i\}_{i=0}^n$. Для заданного H и набора окрестностей $V(x_i)$ необходимо найти такой вектор Y, чтобы для полученной фрактальной интерполирующей функции выполнялись соотношения

$$\int_{V(x_i)} f_W(x)dx = h_i, \quad i = 0, \dots, n. \tag{15}$$

Сначала рассмотрим возможность вычисления величин $P_i(f) = \int\limits_{J_i} f(x)dx$ (моментов первого порядка на регионах) для функции $f = f_W$. Из определения W для всех i выполняются равенства

$$P_i(Wf) = \int_{J_i} Wf(x)dx = \int_{J_i} \left(d_i f(\psi_i^{-1}(x)) + l_i(x)\right) dx =$$
$$= \int_{J_i'} \frac{d_i}{A_i} f(x)dx + \int_{J_i} l_i(x)dx = \frac{d_i}{A_i} \sum_{k \in Q_i} \int_{J_k} f(x)dx + \int_{J_i} l_i(x)dx = \frac{d_i}{A_i} \sum_{k \in Q_i} P_k(f) + L_i,$$

где $L_i = \int\limits_{J_i} l_i(x)dx$ линейно зависит от Y. Таким образом, получаем, что вектор $P(Wf) = \{P_i(Wf)\}_{i=1}^n$ удовлетворяет соотношению

$$P(Wf) = AP(f) + L, \quad \text{где} \quad L = \{L_i\}_{i=1}^n, \quad A = \{a_{i,j}\}, \quad a_{i,j} = \begin{cases} \frac{d_i}{A_i}, & j \in Q_i; \\ 0, & j \notin Q_i. \end{cases}$$

Легко проверить, что для любого набора $P^0 = \{P_i^0\}_{i=1}^n$ при каждом Y существует такая $f \in U(\Delta)$, что $P(f) = P^0$. Так как для любой f из $U(\Delta)$ моменты $P(W^k f)$ стремятся к моментам $P(f_W)$ при $k \to \infty$, то существует единственный вектор P, удовлетворяющий соотношению $P = AP + L$, и этот вектор равен $P(f_W)$. Отсюда, в частности, следует, что определитель матрицы $(E - A)$ ненулевой, а значит, $P(f_W) = (E - A)^{-1} L$.

Зная $P(f_W)$, можем найти интегралы функции f_W по множествам $\psi_i(J_k)$ при $k \in Q_i$:

$$\int_{\psi_i(J_k)} f_W(x)dx = \int_{J_k} \frac{d_i}{A_i} f_W(x)dx + \int_{\psi(J_k)} l_i(x)dx = \frac{d_i}{A_i} P_k(f_W) + L_{i,k}^*,$$

причем величины $L_{i,k}^*$ снова являются линейными комбинациями элементов Y. Таким образом, если брать интегралы в окрестностях точек x_i, совпадающих с образами регионов при отображении ψ_i, то получим систему линейных уравнений $H = BY$, где B — некоторая матрица.

Покажем, что при некоторых дополнительных ограничениях (не зависящих от вектора H) можно гарантировать разрешимость системы (15) относительно Y. Рассмотрим случай, когда все $\alpha(i) = 0$ и $\beta(i) = n$ (аналог интерполяции методом Барнсли). В качестве окрестностей возьмем образы крайних регионов при отображениях ψ_i, т.е. $V(x_0) = \psi_1(J_1)$, $V(x_n) = \psi_n(J_n)$, и $V(x_i) = \psi_i(J_n) \cup \psi_{i+1}(J_1)$ для $i = 1, \dots, n-1$. Тогда верна

Теорема 5. *Если для заданного вектора X и фиксированного набора параметров $\{d_i\}_{i=1}^n$ выполнены условия*

$$1 - \max\left\{\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_n}\right\} > d\frac{2 + d^2}{1 - d}, \tag{16}$$

то для любого вектора H существует единственный набор значений Y такой, что $P(f_W) = H$.

Доказательство. В рассматриваемом случае матрицу, обратную $E - A$, можно найти в общем виде. А именно, из системы уравнений

$$P_i = \frac{d_i}{A_i} \sum_{j=1}^n P_j + (x_i - x_{i-1}) \left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2} - d_i \frac{y_0 + y_n}{2} \right) \quad i = 1, \dots, n,$$

следует

$$P_i = (x_i - x_{i-1})\Big(\frac{y_{i-1}+y_i}{2} - d_i\frac{y_0+y_n}{2} + $$
$$+\frac{d_i}{A_i}\Big(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{A_k}\Big)^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{y_{k-1}+y_k}{2A_k} - \frac{y_0+y_n}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k}{A_k}\Big)\Big), \quad i=1,\ldots,n.$$

Величина $1-\sum\limits_{k=1}^{n} d_k/A_k$ не равна 0, т. к. $\sum\limits_{k=1}^{n} {A_k}^{-1} = 1$, а $d_k \le d < 1$.

Интегралы f_W по множествам $\psi_i(J_1)$ $(i=1,\ldots,n)$ равны

$$\int_{\psi_i([x_0,x_1])} f_W dx = \frac{d_i}{A_i}P_1 + \frac{(x_1-x_0)}{A_i}\Big(\frac{y_{i-1}(2A_1-1)+y_i}{2A_1} - d_i\frac{y_0(2A_1-1)+y_n}{2A_1}\Big).$$

Условие того, что в последнем выражении коэффициент при y_{i-1} больше суммы модулей остальных коэффициентов, записывается в виде

$$\frac{2A_1-1}{2A_1} > |d_i|\left(1+|d_1|\frac{2+\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{d_k}{A_k}\right|}{1-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{d_k}{A_k}}\right) + |d_i| + \frac{1}{2A_1},$$

что сводится к ограничению $\frac{A_1-1}{A_1} > d\,\frac{2+d^2}{1-d}$. Если брать интегралы по множествам $\psi_i([x_{n-1},x_n])$, то получим аналогичное ограничение, содержащее A_n вместо A_1. Следовательно, если выполнено условие (16), то матрица B обладает диагональным преобладанием. Если это условие выполнено, то для любого H существует такой $Y = B^{-1}H$, что интегралы в определенных выше окрестностях принимают заданные значения, т.е. задача интерполяции в среднем разрешима. □

Литература

1. Barnsley M.F. *Fractal functions and interpolation* // Constr. Approx. – 1986. – № 2. – P. 303–329.
2. Barnsley M.F., Elton J.H., Hardin D.P. *Reccurent iterated function systems* // Constr. Approx. – 1989. – V. 5. – № 1. – P. 3–31.
3. Hutchinson J.E. *Fractals and self similarity* // Indiana University Math. Journal. – 1981. – V. 30. – № 5. – P. 713–747.
4. Асанов М.О. *Дискретная оптимизация.* Учебное пособие. – Екатеринбург: УралНАУКА, 1998. – 206 с.
5. Passow E. *Piecewise monotone spline interpolation* // J. Approx. Theor. – 1974. – V. 12. – № 3. – P. 240–241.
6. Kocić Lj. M. *Monotone interpolation by fractal functions* // Approxim. and Optimiz.: Proc. Intern. Conf. – ICAOR, Cluj-Napoca, 1996. – Cluj-Napoca: Transilvania Press. – V. 1. – P. 291–298.
7. Vasilyev S.N. *Interpolation by fractal functions preserving monotonicity and convexity* // East Journal on Approximations. – 1997. – V. 3. – № 4. – P. 381–392.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
06.12.2001