ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 4 (479)

УДК 517.55

С.Г. МЫСЛИВЕЦ

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ТИПА ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ВЫЧЕТА

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂D и $w = \psi(z)$ — голоморфное отображение из $\overline{D}$ в $\mathbb{C}^n$, имеющее конечное множество нулей E_ψ на $\overline{D}$. Пусть $B(z,R) = \{\zeta : |\zeta - z| < R\}$ — шар с центром в точке z радиуса $R > 0$, а $S(z,R) = \partial B(z,R)$. Предположим, что a — нуль отображения ψ и $B(a,R)$ не содержит других нулей ψ. Тогда найдется такой шар $B(0,r)$, что для почти всех точек $\zeta \in B(0,r)$ отображение $w = \psi - \zeta$ имеет одинаковое число нулей в $B(a,R)$. Это число называется кратностью нуля a отображения ψ (напр., [1], § 2) и обозначается μ_a.

Для точки $z \in E_\psi \cap \partial D$ рассмотрим шар $B(z,R)$, не содержащий других нулей ψ, и положим

$$\tau_\psi(z) = \lim_{r\to+0} \frac{\mathcal{L}^{2n-1}[S(0,r)\cap\psi(B(z,R)\cap D)]}{\mathcal{L}^{2n-1}[S(0,r)]},$$

где $\mathcal{L}^{2n-1}$ — $(2n-1)$-мерная мера Лебега. Другими словами, рассматривается не телесный угол касательного конуса к области D в точке z, а телесный угол касательного конуса образа $\psi(B(z,R)\cap D)$ в точке 0. (Определение касательного конуса см. в ([2], § 3.1.21).)

Для $z \in E_\psi$ и достаточно малой окрестности V_z точки z множество $B_\psi(z,r) = \{\zeta \in V_z : |\psi(\zeta)| < r\}$ является относительно компактным в V_z, а множество $S_\psi(z,r) = \{\zeta \in V_z : |\psi(\zeta)| = r\}$ есть гладкий $(2n-1)$-мерный цикл (для почти всех достаточно малых $r > 0$) по теореме Сарда.

Определим главное значение $\mathrm{v.p.}^\psi$ интеграла от некоторой измеримой функции φ в точке $z \in E_\psi$ по окрестности S точки z поверхности ∂D следующим образом:

$$\mathrm{v.p.}^\psi \int_S \varphi(\zeta)\,d\mathcal{L}^{2n-1}(\zeta) = \lim_{r\to+0}\int_{S\setminus B_\psi(z,r)} \varphi(\zeta)\,d\mathcal{L}^{2n-1}(\zeta).$$

Это определение главного значения по Коши v.p. отличается от обычного тем, что выбрасывается не шаровая окрестность точки z, а "искривленный" шар $B_\psi(z,r)$.

Введем ядро $U(\psi(\zeta))$, используемое в формуле многомерного логарифмического вычета (напр., [1], § 3). Оно получается подстановкой $w = \psi(z)$ из ядра Бохнера–Мартинелли $U(w)$. Напомним, что

$$U(w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{\overline{w}_k d\overline{w}[k]\wedge dw}{|w|^{2n}},$$

где $d\overline{w}[k] = d\overline{w}_1\wedge\dots\wedge d\overline{w}_{k-1}\wedge d\overline{w}_{k+1}\wedge\dots\wedge d\overline{w}_n$, а $dw = dw_1\wedge\dots\wedge dw_n$. Ядро $U(\psi(\zeta))$ является замкнутой дифференциальной формой типа $(n, n-1)$ на $\overline{D}$ с особенностями в точках $a \in E_\psi$.

Сформулируем основной результат.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00790.

Теорема. *Если функция F удовлетворяет на $\overline{D}$ условию Гёльдера с показателем $\gamma > 0$ (т. е. $F \in \mathcal{C}^\gamma(\overline{D})$) и голоморфна в D, то*

$$\mathrm{v.\,p.} \int_{\partial D} F(\zeta)U(\psi(\zeta)) = \sum_{a \in E_\psi \cap D} \mu_a F(a) + \sum_{a \in E_\psi \cap \partial D} \tau_\psi(a)\mu_a F(a).$$

Это формула многомерного логарифмического вычета с особенностями на границе области. Если нули отображения ψ не лежат на границе, то она превращается в обычную формулу логарифмического вычета из ([1], § 3). Для случая простых нулей $a \in \partial D$ она дает теорему из [3]. Кроме того, данная теорема обобщает теорему 20.7 из [4], в которой накладываются дополнительные условия на границу ∂D и отображение ψ.

Известно утверждение ([2], теорема 3.2.5):

Пусть отображение $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ липшицево и $m \le n$. Тогда

$$\int_A g(\psi(x)) J_m\psi(x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) N(\psi|A, y)\ d\mathcal{H}^m(y), \tag{1}$$

если множество A является $\mathcal{L}^m$-измеримым, $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ и $N(\psi|A, y) < \infty$ для $\mathcal{H}^m$-почти всех y.

Здесь $J_m\psi(x)$ — m-мерный якобиан отображения ψ, $\mathcal{L}^m$ — m-мерная мера Лебега, $\mathcal{H}^m$ — m-мерная мера Хаусдорфа, $N(\psi \mid A, y)$ — функция кратности отображения ψ, т. е. число прообразов $\psi^{-1}(y)$, лежащих в A.

Сначала докажем теорему для главного значения $\mathrm{v.\,p.}^\psi$.

Лемма 1. *В условиях теоремы выполняется равенство*

$$\mathrm{v.\,p.}^\psi \int_{\partial D} F(\zeta)U(\psi(\zeta)) = \sum_{a \in E_\psi \cap D} \mu_a F(a) + \sum_{a \in E_\psi \cap \partial D} \tau_\psi(a)\mu_a F(a).$$

Доказательство. В области $D_r = D \setminus \bigcup\limits_{a \in E_\psi \cap \partial D} B_\psi(a, r)$ по формуле многомерного логарифмического вычета ([1], § 3) имеем

$$\int_{\partial D_r} F(\zeta)U(\psi(\zeta)) = \sum_{a \in E_\psi \cap D} \mu_a F(a),$$

а

$$\mathrm{v.\,p.}^\psi \int_{\partial D} F(\zeta)U(\psi(\zeta)) = \lim_{r \to +0} \int\limits_{\partial D \setminus \bigcup\limits_{a \in E_\psi \cap \partial D} B_\psi(a,r)} F(\zeta)U(\psi(\zeta)).$$

Поэтому

$$\int_{\partial D_r} F(\zeta)U(\psi(\zeta)) = \int\limits_{\partial D \setminus \cup_a B_\psi(a,r)} F(\zeta)U(\psi(\zeta)) - \sum_a \int\limits_{S_\psi(a,r) \cap D} F(\zeta)U(\psi(\zeta)),$$

причем

$$\int\limits_{S_\psi(a,r) \cap D} F(\zeta)U(\psi(\zeta)) = \int\limits_{S_\psi(a,r) \cap D} (F(\zeta) - F(a))U(\psi(\zeta)) + F(a) \int\limits_{S_\psi(a,r) \cap D} U(\psi(\zeta)). \tag{2}$$

Далее используем неравенство Лоясевича ([5], с. 73)

$$|\zeta - a| \le C|\psi(\zeta)|^\alpha \tag{3}$$

для некоторых положительных чисел α и C и точек ζ из достаточно малой окрестности точки a. Покажем, что первый из интегралов в формуле (2) стремится к нулю при $r \to +0$. Используя условие Гёльдера для функции F, равенство (1) и неравенство (3), получим

$$\int\limits_{S_\psi(a,r)\cap D} |F(\zeta)-F(a)|\frac{|\psi_k|}{|\psi(\zeta)|^{2n}}|d\overline{\psi}[k]\wedge d\psi| \le C_1 \int\limits_{S_\psi(a,r)\cap D} |\psi(\zeta)|^{\gamma\alpha+1-2n}|d\overline{\psi}[k]\wedge d\psi| \le$$

$$\le C_1\mu_a \int\limits_{S(0,r)\cap\psi(D)} |w|^{\gamma\alpha+1-2n} d\mathcal{H}^{2n-1}(w) \le C_2 \int\limits_{S(0,r)} |w|^{\gamma\alpha+1-2n}\, d\mathcal{L}^{2n-1}(w),$$

т. к. отображение ψ гладкое и поэтому $\mathcal{H}^{2n-1}(\psi(S)) \le C_3\mathcal{L}^{2n-1}(S)$, а последний интеграл, очевидно, стремится к нулю при $r \to +0$. Для второго интеграла из (2) применяем равенство (1). Тогда

$$\lim_{r\to+0} \int\limits_{S_\psi(a,r)\cap D} U(\psi(\zeta)) = \lim_{r\to+0} \mu_a \int\limits_{S(0,r)\cap\psi(D)} U(w) = \mu_a\tau_\psi(a),$$

поскольку

$$\int\limits_{S(0,r)\cap\psi(D)} U(w) = \frac{\mathcal{L}^{2n-1}[S(0,r)\cap\psi(D)]}{\mathcal{L}^{2n-1}[S(0,r)]}$$

по лемме 2.1 из [4]. $\square$

Пусть теперь $\psi = (\psi_1,\dots,\psi_n)$ — голоморфное отображение из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, состоящее из целых функций и имеющее единственный нуль — начало координат. Кратность нуля отображения ψ обозначим через μ.

Определим интегралы

$$\int_{\partial D_\zeta} f(\zeta)\, U(\psi(\zeta-z)) = \begin{cases} F^+(z), & z\in D;\\ F^-(z), & z\notin \overline{D}.\end{cases}$$

Лемма 2. *Если функция $f\in\mathcal{C}^\gamma(\partial D)$, $\gamma>0$, то интегралы $F^\pm$ непрерывно продолжаются на ∂D и $F^+(z)-F^-(z)=\mu f(z)$ на ∂D.*

Доказательство. Продолжим f в окрестность V границы области D до функции, удовлетворяющей условию Гёльдера с показателем γ в этой окрестности. Докажем, что функции вида

$$\int_{\partial D_\zeta} (f(\zeta)-f(z))U(\psi(\zeta-z))$$

являются непрерывными в V. Для этого нужно показать, что интегралы

$$\int_{S_\zeta} (f(\zeta)-f(z))\frac{\overline{\psi_k(\zeta-z)}}{|\psi(\zeta-z)|^{2n}} d\overline{\psi}[k]\wedge d\psi$$

абсолютно сходятся (здесь S — некоторая окрестность точки z на поверхности ∂D). Неравенство (3), примененное к $\psi(\zeta-z)$, и условие гёльдеровости функции f дают неравенство

$$|f(\zeta)-f(z)| \le c|\zeta-z|^\gamma \le c_1|\psi(\zeta-z)|^{\gamma\alpha}$$

для точек ζ из достаточно малой окрестности z. Используя (1), так же, как при доказательстве леммы 1, получим

$$\int\limits_{S_\zeta} |f(\zeta)-f(z)|\frac{|\psi_k(\zeta-z)|}{|\psi(\zeta-z)|^{2n}}|d\overline{\psi}[k]\wedge d\psi| \le c_1 \int\limits_{S_\zeta} |\psi(\zeta-z)|^{\gamma\alpha+1-2n}|d\overline{\psi}[k]\wedge d\psi| \le$$

$$\le c_1\mu \int_{\psi(S)} |w|^{\gamma\alpha+1-2n} d\mathcal{H}^{2n-1}(w) \le c_2 \int_S |w|^{\gamma\alpha+1-2n}\, d\mathcal{L}^{2n-1}(w),$$

а последний интеграл, очевидно, сходится. Формула

$$\int_{\partial D} U(\psi(\zeta - z)) = \begin{cases} \mu, & z \in D; \\ 0, & z \notin \overline{D}, \end{cases}$$

завершает доказательство леммы 2. $\square$

Вернемся к первоначальному отображению ψ.

Лемма 3. *Для функций $f \in \mathcal{C}^\gamma(\partial D)$, $\gamma > 0$, справедливо равенство*

$$\mathrm{v.\,p.}^\psi \int_S f(\zeta) U(\psi(\zeta)) = \mathrm{v.\,p.} \int_S f(\zeta) U(\psi(\zeta)).$$

Данная лемма обобщает утверждение из [3] о равенстве главных значений для случая простых нулей отображения ψ.

Доказательство. Как показано в лемме 2, интеграл

$$\int_S (f(\zeta) - f(z)) U(\psi(\zeta))$$

абсолютно сходится, поэтому главные значения равны данному интегралу. Так что нужно лишь доказать, что

$$\mathrm{v.\,p.}^\psi \int_S U(\psi(\zeta)) = \mathrm{v.\,p.} \int_S U(\psi(\zeta)).$$

Преобразуем следующий интеграл (r достаточно мало), взяв $S = \partial D \cap B(z, R)$,

$$\int\limits_{S \setminus B_\psi(z,r)} U(\psi(\zeta)) = \int\limits_{\partial(D \cap B(z,R) \setminus B_\psi(z,r))} U(\psi(\zeta)) - \int\limits_{D \cap S(z,R)} U(\psi(\zeta)) + \int\limits_{D \cap S_\psi(z,r)} U(\psi(\zeta)) =$$

$$= -\int\limits_{D \cap S(z,R)} U(\psi(\zeta)) + \int\limits_{D \cap S_\psi(z,r)} U(\psi(\zeta))$$

по формуле многомерного логарифмического вычета. Поэтому остается доказать, что

$$\lim_{r \to +0} \int\limits_{D \cap S_\psi(z,r)} U(\psi(\zeta)) = \lim_{r \to +0} \int\limits_{D \cap S(z,r)} U(\psi(\zeta)).$$

В силу ([2], теорема 3.2.5, равенство (1)) имеем

$$\int\limits_{D \cap S_\psi(z,r)} U(\psi(\zeta)) = \mu_z \int\limits_{\psi(D) \cap S(0,r)} U(w), \qquad \int\limits_{D \cap S(z,r)} U(\psi(\zeta)) = \mu_z \int\limits_{\psi(D \cap S(z,r))} U(w).$$

Следовательно, нужно показать, что

$$\lim_{r \to +0} \int\limits_{\psi(D) \cap S(0,r)} U(w) = \lim_{r \to +0} \int\limits_{\psi(D \cap S(z,r))} U(w).$$

В данном равенстве можно вместо $\psi(D)$ взять касательный конус Π к $\psi(D)$ в точке 0. Покажем, что

$$\int\limits_{\Pi \cap S(0,r_1)} U(w) = \int\limits_{\Pi \cap \psi(S(z,r_2))} U(w).$$

Рассмотрим область G, ограниченную поверхностями $\Pi \cap S(0, r_1)$, $\Pi \cap \psi(S(z, r_2))$ и частью конической поверхности $M \cap \partial\Pi$ (r_1 и r_2 выбраны так, чтобы шар $B(0, r_1)$ содержал поверхность $\psi(S(z, r_2))$). По формуле Бохнера–Мартинелли

$$\int_{\partial G} U(w) = 0,$$

поэтому

$$\int\limits_{\Pi\cap S(0,r_1)} U(w) - \int\limits_{\Pi\cap\psi(S(z,r_2))} U(w) = \int\limits_M U(w).$$

Покажем, что

$$\int_M U(w) = 0.$$

Перейдем от комплексных координат w к действительным $w_j = \xi_j + i\xi_{n+j}$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда ([3] или [4], § 20)

$$\operatorname{Re} U(w) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\xi_k}{|\xi|^{2n}} d\xi[k],$$

$$\operatorname{Im} U(w) = -\frac{(n-2)!}{4\pi^n} d\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\xi|^{2n-2}} d\xi[k, n+k] \Big), \quad n > 1,$$

а при $n = 1$

$$\operatorname{Im} U(w) = -\frac{d \ln |\xi|^2}{4\pi}.$$

Сужение дифференциальной формы $\operatorname{Re} U(w)$ на коническую поверхность M (в точках гладкости M) равно нулю. Действительно, пусть M задается нулями однородной вещественнозначной функции φ: $M = \{\xi : \varphi(\xi) = 0\}$. Тогда в точках гладкости M сужение формы $d\xi[k]$ на M равно $(-1)^{k-1}\gamma_k d\sigma$, где $\gamma_k = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k} \frac{1}{|\operatorname{grad}\varphi|}$ — направляющие косинусы нормали, а $d\sigma$ — элемент поверхности M. Тогда

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{\xi_k}{|\xi|^{2n}} d\xi[k] \Big|_M = \sum_{k=1}^{2n} \xi_k \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k} \frac{1}{|\operatorname{grad}\varphi| |\xi|^{2n}} d\sigma = l\varphi \frac{1}{|\operatorname{grad}\varphi|\, |\xi|^{2n}} d\sigma = 0$$

по формуле Эйлера об однородных функциях (l — степень однородности функции φ); $(2n-1)$-мерная мера множества точек негладкости равна нулю.

Интегрирование по M будем выполнять с помощью действительных прямых на M вида

$$l_b = \{\xi : \xi_j = b_j t,\ j = 1, \ldots, 2n,\ t \in \mathbb{R}\},$$

где $|b| = 1$. При фиксированном $b \in S(0,1)$ переменная t меняется от некоторого числа $r_2(b)$ до r_1. Функция $r_2(b)$ измерима. Таким образом, M является расслоением над циклом $\partial\Pi \cap S(0,1)$. В этих переменных

$$\operatorname{Im} U(w) = c_n d\Big(\frac{dt}{t} \wedge \sum_{k,j} \pm b_k db[j, k, n+k] \Big) = c_n \frac{dt}{t} \wedge \sum_{k=1}^{n} db[k, n+k],$$

т. к. форма, содержащая произведение более чем $2n-2$ дифференциалов db_j, равна нулю на $S \cap \partial\Pi$. Тогда

$$\int_M \operatorname{Im} U(w) = c_n \int\limits_{S(0,1)\cap\partial\Pi} \ln \frac{r_1}{r_2(b)} \sum_{k=1}^{n} db[k, n+k].$$

Почти во всех точках $S \cap \partial\Pi$ переменные b_k, b_{n+k} являются функциями от остальных переменных b_j, $j \neq k, n+k$. Поэтому последний интеграл примет вид

$$\int\limits_{S(0,1)\cap\partial\Pi} \sum_{k=1}^{n} \ln \Phi_k(b_1, \ldots, [k], \ldots, [n+k], \ldots, b_{2n}) db[k, n+k] =$$

$$= \int\limits_{S(0,1)\cap\Pi} d\Big(\sum_{k=1}^{n} \ln \Phi_k(b_1, \ldots, [k], \ldots, [n+k], \ldots, b_{2n}) db[k, n+k] \Big) = 0$$

по формуле Стокса. $\square$

Доказательство теоремы следует из лемм 1 и 3.

Лемма 2 позволяет усилить теорему 1 из [6], которая была доказана для гладких функций.

Следствие. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ со связной гладкой границей. Если для функции $f \in \mathcal{C}^{\gamma}(\partial D)$ интеграл $F^{-}(z) = 0$ вне $\overline{D}$, то функция f голоморфно продолжается в область D.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1 из [6] с использованием леммы 2 данной работы вместо следствия 1 из [6].

Литература

1. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.* – Новосибирск: Наука, 1979. – 366 с.
2. Федерер Г. *Геометрическая теория меры.* – М.: Наука, 1987. – 760 с.
3. Пренов Б.Б., Тарханов Н.Н. *О сингулярном интеграле Мартинелли–Бохнера* // Сиб. матем. журн. – 1992. – Т. 33. – № 2. – С. 202–205.
4. Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 240 с.
5. Мальгранж Б. *Идеалы дифференцируемых функций.* – М.: Мир, 1968. – 131 с.
6. Кытманов А.М., Мысливец С.Г. *О голоморфности функций, представимых формулой логарифмического вычета* // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – № 2. – С. 351–361.

Красноярский государственный университет

Поступили
первый вариант 20.09.1999
окончательный вариант 21.12.2000