ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 4 (479)

УДК 517.518

М.Г.ГРИГОРЯН

ОБ ОДНОЙ ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЕ

Напомним следующие определения. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, — ортонормированная система.

Определение 1. Ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| > 0, \tag{1}$$

называется нуль-рядом в смысле сходимости почти всюду (всюду, по мере, по метрике $L^p_{[0,1]}$, $p > 0$), если он сходится к нулю почти всюду (соответственно всюду, по мере, по метрике $L^p_{[0,1]}$, $p > 0$).

Определение 2. Ряд (1) называется безусловно сходящимся, если для любой перестановки $\{\sigma(k)\}$ натуральных чисел сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \varphi_{\sigma(k)}(x)$.

Определение 3. Ряд (1) назовем безусловным нуль-рядом в смысле сходимости всюду (соответственно в смысле сходимости по метрике $L^p_{[0,1]}$, $p > 0$), если он безусловно сходится к нулю всюду на $[0,1]$ (соответственно по метрике $L^p_{[0,1]}$, $p > 0$).

Вопросам о существовании нуль-рядов по наперед заданной ортонормированной системе посвящено много работ [1]–[9].

Первый тригонометрический нуль-ряд в смысле сходимости почти всюду был построен в 1916 г. Д.Е.Меньшовым [1]. В 1956 г. А.А. Талалян доказал, что по любой полной ортонормированной в $L^2_{[0,1]}$ системе $\{\varphi_n(x)\}$ существует нуль-ряд в смысле сходимости по мере.

Далее в этом направлении важные результаты были получены П.Л. Ульяновым [3], Б.С. Кашиным [4], В.А. Скворцовым [5], М.Л. Петровской [6], Ф.Г. Арутюняном [7], Г.М. Мушегяном и Р.И. Овсепяном [8].

В данной статье доказывается

Теорема 1. *Существует ортогональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \omega_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| > 0,$$

который является безусловным нуль-рядом как в смысле сходимости по метрике $L^p_{[0,1]}$ *для всех* $p \in (1,2)$, *так и в смысле сходимости всюду на* $[0,1]$.

Доказательство. Пусть

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \tag{2}$$

— последовательность всех алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами. Нетрудно видеть, что можно определить последовательность функций $\{\beta_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\beta_k(x) = 0, \quad x \notin \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] = \Delta_k,$$

$$\int_{\Delta_k} |\beta_k|^2 dx < \frac{1}{k^2}; \quad \beta_k(x) \notin \bigcup_{q>2} L^q_{[0,1]}, \quad k \geq 1.$$

Положим

$$g_k(x) = f_k(x) + \beta_k(x), \quad x \in [0,1], \quad k \geq 1.$$

Очевидно, система функций $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независима, замкнута в $L^2_{[0,1]}$ и для любых чисел N и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ с $\sum\limits_{k=1}^{N} |\alpha_k| > 0$

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k g_k(x) \notin \bigcup_{q>2} L^q_{[0,1]}.$$

Ортогонализируя и нормируя эту систему на $[0,1]$, получим систему $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ со свойствами

а) система $\{\varphi_n(x)\}$ полна в L^2 и ортонормирована на $[0,1]$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \varphi_k(x) \notin \bigcup\limits_{q>2} L^q_{[0,1]}$ для любых чисел N и $\{\alpha_k\}_{k=1}^{N}$ с $\sum\limits_{k=1}^{N} |\alpha_k| > 0$.

Покажем, что для любого $N > 1$ система $\{\varphi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ замкнута во всех $L^p_{[0,1]}$, $1 \leq p < 2$. Предположим противное, что при некотором $p_0 \in [1,2)$ и для некоторого $N_0 > 1$ система $\{\varphi_k(x)\}_{k=N_0+1}^{\infty}$ не замкнута в $L^{p_0}_{[0,1]}$. Тогда она *не полна* относительно $L^{q_0}_{[0,1]}$ (причем $\frac{1}{q_0} + \frac{1}{p_0} = 1$ при $p_0 > 1$ и $q_0 = +\infty$ при $p_0 = 1$), т. е. существует функция $g(x) \in L^{q_0}_{[0,1]}$ с $\|g(x)\|_2 > 0$, для которой

$$\int_0^1 g(x)\varphi_k(x)dx = 0 \quad \forall k \geq N_0 + 1.$$

Следовательно, для всех $n \geq 1$ будем иметь

$$\int_0^1 \left[g(x) - \sum_{k=1}^{N_0} \alpha_k \varphi_k(x)\right] \varphi_n(x) dx = 0,$$

где

$$\alpha_k = \int_0^1 g(x)\varphi_k(x)dx, \quad 1 \leq k \leq N_0.$$

Ввиду того, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $L^2_{[0,1]}$ (см. свойство а)), сразу получим

$$\sum_{k=1}^{N_0} \alpha_k \varphi_k(x) dx = g(x) \in L^{q_0}_{[0,1]}, \quad \sum_{k=1}^{N_0} \alpha_k^2 = \int_0^1 g^2(x)dx \neq 0.$$

Пришли к противоречию (см. свойство б) системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$). Следовательно, для любого натурального $N > 1$ система $\{\varphi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ замкнута во всех $L^p_{[0,1]}$, $1 \leq p < 2$.

Пользуясь этим свойством системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, по индукции выберем попарно непересекающиеся полиномы

$$h_k = \sum_{i=N_{k-1}}^{N_k - 1} a_i \varphi_i(x), \quad 1 = N_0 < N_1 < \cdots < N_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

так, чтобы

$$\|f_k(x) - h_k(x)\|_{p_1} < 2^{-2(k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Предположим, что уже определены натуральные числа $1=\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_{s-1}$ и полиномы $\{h_{\nu_k}(x)\}_{k=1}^{s-1}$, для которых

$$\|h_{\nu_1}\|_{p_1}>0,\quad \left\|\sum_{k=1}^{m} h_{\nu_k}(x)\right\|_{p_m}<2^{-2(m+1)},\quad 1\le m\le s-1, \tag{5}$$

где $p_m=2-1/m$. Возьмем функцию f_{ν_s} из последовательности (2) такую, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{s-1} h_{\nu_k}(x)+f_{\nu_s}(x)\right\|_{p_{s+1}}<2^{-2(s+2)}.$$

Отсюда и из (4) следует

$$\|\sum_{k=1}^{s} h_{\nu_k}(x)\|_{p_{s+1}}<2^{-2(s+1)}, \tag{6}$$

следовательно, и

$$\|h_{\nu_s}(x)\|_{p_s}<2^{-2s}. \tag{7}$$

Таким образом, по индукции можем определить ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty} h_{\nu_k}(x), \tag{8}$$

где

$$\omega_k(x)=\frac{h_{\nu_k}(x)}{\|h_{\nu_k}\|_2},\quad c_k=\|h_{\nu_k}\|_2, \tag{9}$$

члены которого выбраны из (3) и удовлетворяют условиям (6) и (7) для всех $s\ge 3$.

Пусть $\{\sigma(s)\}_{s=1}^{\infty}$ — любая перестановка натуральных чисел. Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{\sigma(k)}\omega_{\sigma(k)}(x)$ сходится к нулю одновременно во всех метриках $L^p_{[0,1]}$, $1\le p<2$. В самом деле, пусть $p\in[1,2)$ и $\epsilon>0$. Возьмем натуральные числа k_1, k_0 настолько большими, чтобы $k_1>k_0>\log_2\frac{1}{\epsilon}$, $p_{k_0}>p$, $\sigma(k)>k_0$, $k>k_1>k_0$. Отсюда и из (6), (7) для всех $n>k_1$ имеем

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)}\omega_{\sigma(k)}(x)\right\|_p\le\left\|\sum_{i=1}^{k_0} c_i\omega_i(x)\right\|_{p_{k_0}}+\sum_{i=k_0+1}^{\infty}\|c_i\omega_i(x)\|_{p_{k_0}}\le 2^{-2k_0}+2^{-k_0}.$$

Теперь докажем, что ряд (8) безусловно сходится к нулю почти всюду на $[0,1]$.

Для этого определим измеримые множества

$$E_k=\left\{x\in[0,1]:\ \left|\sum_{s=1}^{k} h_{\nu_s}(x)\right|<2^{-(k+1)}\right\},\quad k\ge 1. \tag{10}$$

Отсюда и из (5) вытекает

$$|h_{\nu_k}(x)|<2^{-k+1},\quad x\in E_k\cap E_{k-1}, \tag{11}$$

$$|E_k|>1-2^{-k}. \tag{12}$$

Положим

$$E=\bigcup_{s=1}^{\infty}\bigcap_{k=s}^{\infty} E_k. \tag{13}$$

Очевидно (см. (12)), $|E|=1$. Пусть $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ — любая перестановка натуральных чисел и пусть $x\in E$, тогда для некоторого натурального k_0 имеем $x\in E_k$, $k\ge k_0$ (см. (13)).

Для любого заданного положительного $\epsilon > 0$ возьмем натуральное число $n_0(\epsilon)$ настолько большим, чтобы

$$n_0 > s_0, \quad \sigma(n) > s_0 \ \ \forall n > n_0,$$

где $s_0 = [\log_2 \frac{1}{\epsilon}]$ ($[a]$ — целая часть числа a).

Следовательно, для всех $n > n_0$ в силу (8)–(11) получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)}\omega_{\sigma(k)}(x)\right| \le \left|\sum_{k=1}^{s_0+1} c_k\omega_k(x)\right| + \sum_{k=s_0+2}^{\infty} |c_k\omega_k(x)| < 2^{-2(s_0+1)} + 2^{-2(s_0+1)} = 2^{-2s_0-1} < \epsilon,$$

т. е. ряд (8) безусловно почти всюду на $[0,1]$ сходится к нулю. Если теперь положим

$$\overline{\omega_k}(x) = \begin{cases} \omega_k(x), & x \in [0,1] \setminus E; \\ 0, & x \in E, \end{cases}$$

то сразу получим сходимость ряда $\sum c_k\overline{\omega_k}(x)$ к нулю всюду на $[0,1]$. $\square$

Замечание. Эта теорема окончательна в следующем смысле: во-первых, ни при одном $p \ge 1$ (соответственно $p \ge 2$), ни по одной ограниченной ортонормированной (соответственно ни по одной ортонормированной) системе $\{\varphi_n(x)\}$ не существует нуль-ряда в смысле сходимости по метрике $L^p_{[0,1]}$, во-вторых, по системе $\{\psi_k(x)\}$, построенной Б.С. Кашиным [4], не может быть нуль-рядов в смысле сходимости почти всюду.

Из доказательства теоремы 1 видно, что ортонормированная система (ОНС) $\{\omega_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является безусловной системой представления функций классов $L^p_{[0,1]}$, $1 \le p < 2$. Точнее, верна

Теорема 2. *Существует ортонормированная система $\{\omega_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, обладающая свойством: для любой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ при фиксированном $p \in [1,2)$ (соответственно $f(x) \in \bigcap\limits_{1\le p<2} L^p_{[0,1]}$) существует ряд по системе $\{\omega_k(x)\}$ вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\omega_k(x)$, который безусловно сходится к $f(x)$ как в метрике $L^p_{[0,1]}$ (соответственно во всех метриках $L^p_{[0,1]}$, $1 \le p < 2$), так и почти всюду на $[0,1]$.*

В заключение сформулируем следующий вопрос.

Какие *необходимые и достаточные* условия нужно наложить на ОНС $\{\omega_k(x)\}$, чтобы по этой системе можно было построить нуль-ряд (соответственно безусловный нуль-ряд) в смысле сходимости по норме $L^p_{[0,1]}$, $1 \le p < 2$?

Литература

1. Menchoff D. *Sur l'unicieté du développment trigonometrique* // C.R. de l'Acad. des Sci. a Paris – 1916. – V. 163. – P. 433–436.
2. Талалян А.А. *О сходимости ортогональных рядов* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 110. – С. 515–516.
3. Ульянов П.Л. *Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$* // УМН. – 1972. – Т. 27. – Вып. 2. – С. 3–52.
4. Кашин Б.С. *Об одной полной ортонормированной системе* // Матем. сб. – 1976. – Т. 99. – С. 356–365.
5. Скворцов В.А. *Об одном примере нуль-ряда по системе Уолша* // Матем. заметки. – 1976. – Т. 19. – С. 179–186.
6. Петровская М.Л. *О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – Т. 28. – № 4. – С. 773–798.
7. Арутюнян Ф.Г. *О единственности рядов по системе Хаара* // ДАН АрмССР. – 1964. – Т. 38. – № 3. – С. 129–134.

8. Мушегян Г.М., Овсепян Р.И. *О единственности ортогональных рядов* // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. – 1969. – Т. 4. – № 4. – С. 259–266.
9. Григорян М.Ж. *Представление функций классов $L^p[0,1]$, $1 \le p \le 2$, ортогональными рядами* // ДАН АрмССР. – 1978. – Т. 67. – № 5. – С. 269–274.

Ереванский государственный университет

Поступила 18.12.2000