ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 517.537.2

М.Н. ШЕРЕМЕТА, Я.Я. ПРИТУЛА

МАКСИМУМ МОДУЛЯ И МАКСИМАЛЬНЫЙ ЧЛЕН ОДНОГО КЛАССА РЯДОВ ДИРИХЛЕ

1. Пусть $0 < A \leq +\infty$, а $\Pi(A)$ — класс функций, аналитических в $\{s : 0 < \operatorname{Re} s < A\}$ и ограниченных в каждой полосе $\{s : 0 < \sigma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_2 < a\}$. Изучению функций из класса $\Pi(\infty)$ посвящена глава III монографии [1]. Классу $\Pi(\infty)$ принадлежат, в частности, целые (абсолютно сходящиеся в $\mathbb{C}$) ряды Дирихле с неотрицательными, возрастающими к ∞ показателями λ_n и комплексными коэффициентами b_n. Связь между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле исследована в [2].

Здесь рассмотрим ряды Дирихле, показатели которых не обязательно монотонны и могут принимать значения из $[-\infty, +\infty)$, но будем считать, что среди λ_n имеется бесконечно много положительных. Считаем также, что $1 > |b_n| \downarrow 0$ $(n \to \infty)$. Через $\Pi_D(A)$ обозначим класс рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

абсолютно сходящихся в $\{s : 0 \leq \sigma < A\}$, коэффициенты и показатели которых удовлетворяют приведенным выше условиям. При этом, если $0 < A < +\infty$, то считаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \exp(\sigma\lambda_n) \tag{2}$$

сходится для любого $\sigma \in [0, A)$ и расходится для любого $\sigma > A$, а если $A = +\infty$, то считаем, что ряд (2) сходится для всех $\sigma \geq 0$. Другими словами, A является абсциссой абсолютной сходимости ряда (1). Условимся также, что $|b_n| \exp(\sigma\lambda_n) = 0$ для всех $\sigma \geq 0$, если $\lambda_n = -\infty$. Так как ряд (2) сходится при $\sigma = 0$, то

$$\tau = \inf\Big\{\lambda > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{\lambda} < \infty\Big\} < \infty.$$

Положим

$$\gamma = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\ln(1/|b_n|)}.$$

Тогда $\gamma \geq 0$ и имеет место

Лемма 1. *Если $\tau < 1$, то*

$$\frac{1-\tau}{\gamma} \leq A \leq \frac{1}{\gamma}. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\gamma > 0$ и $\sigma > \frac{1}{\gamma}$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \gamma - 1/\sigma)$ существует возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такая, что $\lambda_{n_k} \geq (\gamma - \varepsilon) \ln \frac{1}{|b_{n_k}|}$, и, значит,

$$|b_{n_k}| \exp(\sigma\lambda_{n_k}) \geq \exp\Big\{-\ln\frac{1}{|b_{n_k}|} + \sigma(\gamma - \varepsilon)\ln\frac{1}{|b_{n_k}|}\Big\} \geq 1,$$

т.е. для $\sigma > \frac{1}{\gamma}$ ряд (2) расходится. Поэтому имеет место второе из неравенств (3), которое очевидно, если $\gamma = 0$.

Пусть теперь $\gamma < +\infty$. Выберем $\bar\gamma > \gamma$ и $\bar\tau \in (\tau, 1)$. Тогда для всех $n \geq n_0(\bar\gamma)$ имеет место неравенство $\lambda_n \leq \bar\gamma \ln(1/|b_n|)$ и, значит, для всех $\sigma \in \left[0, \frac{1-\bar\tau}{\gamma}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{\sigma\lambda_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \exp\{-\sigma\bar\gamma \ln|b_n|\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{\bar\tau} < \infty.$$

Отсюда вытекает, что $A \geq \frac{1-\bar\tau}{\gamma}$, и в силу произвольности $\bar\tau$ и $\bar\gamma$ имеет место первое из неравенств (3), которое очевидно, если $\gamma = +\infty$. □

Заметим, что если $\tau = 0$, то $A = 1/\gamma$, а это возможно, например, если $\sqrt[n]{|b_n|} \to 0$ $(n \to \infty)$, ибо тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^{\lambda} < \infty$ для любого $\lambda > 0$.

Заметим также, что оценки (3) точны. Так, например, если $b_n = 1/n^2$ и $\lambda = 2\ln n$, то $\tau = 1/2$, $\gamma = 1$ и $(1-\tau)\gamma = 1/2 = A < 1 = 1/\gamma$. А если $b_n = 1/n^2$, $n_k = k!$, $\lambda_{n_k} = 2\ln n_k$ и $\lambda_n = -n$ при $n \neq n_k$, то $\tau = 1/2$, $\gamma = 1$ и $(1-\tau)\gamma = 1/2 < A = 1 = 1/\gamma$, ибо для всех $0 \leq \sigma < 1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| e^{\sigma\lambda_n} = \sum_{k=1}^{\infty} n_k^{-2} \exp(2\sigma \ln n_k) + \sum_{n=1,\, n\neq n_k}^{\infty} n^{-2} \exp(-\sigma n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (k!)^{-2(1-\sigma)} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < +\infty.$$

Для $0 \leq \sigma < A$ и $F \in \Pi_D(A)$ положим $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, и пусть $\mu(\sigma, F) = \max\{|b_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 1\}$ — максимальный член ряда (1). Из доказательства теоремы 1.5 в [2] следует неравенство $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$, являющееся аналогом известного неравенства Коши.

Целью данной статьи является оценка $M(\sigma, F)$ через $\mu(\sigma, F)$ сверху для $F \in \Pi_D(A)$ как в случае $0 < A < +\infty$, так и в случае $A = +\infty$.

Лемма 2. *Пусть $b_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$, $p \geq 0$, $q > 0$, а ряд Дирихле* (1) *абсолютно сходится в точках $s = \sigma$ и $s = \frac{1}{q}(\sigma + p)$. Тогда, если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{1-q} \exp(-p\lambda_n) = K_0 < \infty, \tag{4}$$

то

$$M(\sigma, F) \leq K_0 \mu\left(\frac{\sigma + p}{q}, F\right)^q. \tag{5}$$

Действительно,

$$M(\sigma, F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \exp(\sigma\lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{1-q} \left\{|b_n| \exp\left(\frac{\sigma + p}{q}\lambda_n\right)\right\}^q \exp(-p\lambda_n) \leq$$
$$\leq \mu\left(\frac{\sigma + p}{q}\right)^q \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^{1-q} \exp(-p\lambda_n) = K_0 \mu\left(\frac{\sigma + p}{q}, F\right)^q.$$

Нам будут нужны также следующие леммы.

Лемма 3 ([3]). *Из каждой положительной возрастающей последовательности μ_n такой, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\mu_n} \ln n \geq a > 0,$$

можно выделить подпоследовательность (μ_k^*) такую, что $\ln k \leq a\mu_k^* + 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\ln k_j \geq a\mu_{k_j}^*$ для некоторой возрастающей последовательности (k_j) натуральных чисел.

Лемма 4 ([4], с.20–22). *Пусть φ — положительная дважды непрерывно дифференцируемая на $[a,+\infty)$ функция такая, что $\varphi'(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$, $x^2\varphi''(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$, $\varphi''(u(x))\sim\varphi''(x)$ при $x\to+\infty$, $|u(x)-x|\le\frac{A}{\sqrt{p''(x)}}$, где A — произвольное положительное число. Тогда функция $H(x;\lambda)=x\lambda-\varphi(x)$ имеет при больших значениях λ единственную точку максимума $x(\lambda)$ и*

$$\int_a^\infty e^{H(x;\lambda)}dx=(1+o(1))\sqrt{\frac{2\pi}{p''(x(\lambda))}}\,e^{H(x(\lambda);\lambda)},\quad \lambda\to+\infty. \tag{6}$$

2. Пусть сначала $0<A<+\infty$. Через $\Pi_D(A,h)$ обозначим класс функций $F\in\Pi_D(A)$ таких, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(|b_n|\exp\{A\lambda_n\})}\le h\in[0,+\infty).$$

Теорема 1. *Пусть $\beta\in[0,+\infty)$. Для того чтобы для любой функции $F\in\Pi_D(A,h)$ выполнялось неравенство*

$$M(\sigma,F)\le K_0\mu\Big(\frac{\sigma+A\beta}{1+\beta},F\Big)^{1+\beta},\quad K_0=\mathrm{const}>0, \tag{7}$$

для всех $\sigma\in[0,A)$, необходимо и достаточно, чтобы $\beta>h$.

Доказательство. Пусть $\beta>h$ и F — произвольная функция из $\Pi_D(A,h)$. Положим $p=\beta A$ и $q=1+\beta$. Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{(q-1)\ln|b_n|+p\lambda_n}{\ln n}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\beta(\ln|b_n|+A\lambda_n)}{\ln n}\ge\frac{\beta}{h}>1,$$

откуда легко следует выполнение условия (4) леммы 2. Так как

$$0<\frac{\sigma+p}{q}=\frac{\sigma+\beta A}{1+\beta}<A$$

для всех $\sigma\in[0,A)$, то по лемме 2 имеет место неравенство (5), которое в данном случае равносильно неравенству (7). Достаточность условия $\beta>h$ доказана.

Чтобы доказать его необходимость, нужно показать, что существует функция $F_1\in\Pi_D(A,h)$ такая, что для любого $\beta\le h$ неравенство (7) не выполняется.

Пусть сначала $h>0$, а

$$F_1(s)=\sum_{n=2}^\infty n^{1/h}e^{-A\ln n\ln\ln n}e^{s\ln n\ln\ln n}. \tag{8}$$

Так как здесь $b_n=n^{1/h}\exp\{-A\ln n\ln\ln n\}$, то легко видеть, что $\tau=0$ и $\gamma=1/A$. Поэтому по лемме 1 абсцисса абсолютной сходимости ряда (8) равна A, и легко видеть, что $F_1\in\Pi_D(A,h)$.

Обозначим $\Phi(t)=\frac{1}{h}t-(A-\sigma)t\ln t$, $0\le\sigma<A$. Нетрудно проверить, что функция Φ вогнутая на $[0,+\infty)$, имеет единственную точку максимума $t(\sigma)=\frac{1}{e}\exp\Big\{\frac{1}{h(A-\sigma)}\Big\}$ и $\Phi(t(\sigma))=\frac{A-\sigma}{e}\exp\Big\{\frac{1}{h(A-\sigma)}\Big\}$. Отсюда следует, во-первых, что

$$\mu(\sigma,F_1)=\max\{e^{\Phi(\ln n)}:n\ge2\}\le\exp(\max\{\Phi(t):t\ge0\})=$$
$$=\exp\Big(\frac{A-\sigma}{e}\exp\Big\{\frac{1}{h(A-\sigma)}\Big\}\Big),\quad 0\le\sigma<A, \tag{9}$$

и, во-вторых,

$$M(\sigma,F_1)=F_1(\sigma)=\sum_{n=2}^{\infty}\exp\{\Phi(\ln n)\}\geq\int_1^{\infty}\exp\{\Phi(\ln t)\}dt-\exp\Phi(t(\sigma))=$$
$$=\int_0^{\infty}\exp\{\Phi(t)+t\}dt-\exp\left(\frac{A-\sigma}{e}\exp\left\{\frac{1}{h(A-\sigma)}\right\}\right).\quad(10)$$

Произведем в последнем интеграле замену $t=\frac{x}{A-\sigma}$. Тогда

$$\int_0^{\infty}\exp\{\Phi(t)+t\}dt=\frac{1}{A-\sigma}\int_0^{\infty}\exp\left\{\left(\frac{1+h}{h(A-\sigma)}-\ln\frac{1}{A-\sigma}\right)x-x\ln x\right\}dx$$

и, если положим $\lambda=\frac{1+h}{h(A-\sigma)}-\ln\frac{1}{A-\sigma}$ и $\varphi(x)=x\ln x$, то функция φ удовлетворяет условиям леммы 4, $x(\lambda)=\frac{1}{\varphi''(x(\sigma))}=H(x(\lambda);\lambda)=e^{\lambda-1}$. Поэтому

$$\int_0^{\infty}\exp\{\Phi(t)+t\}dt=\frac{1+o(1)}{A-\sigma}\sqrt{\frac{2\pi}{e}e^{\lambda}}\exp\left\{\frac{1}{e}e^{\lambda}\right\}=$$
$$=(1+o(1))\sqrt{\frac{2\pi}{e(A-\sigma)}\exp\frac{1+h}{h(A-\sigma)}}\exp\left(\frac{A-\sigma}{e}\exp\frac{1+h}{h(A-\sigma)}\right)$$

при $\sigma\to A$. Поэтому из (9) и (10) при $\beta\leq h$ имеем

$$\frac{M(\sigma,F_1)}{\mu\left(\frac{\sigma+\beta A}{1+\beta},F_1\right)^{1+\beta}}\geq(1+o(1))\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{e(A-\sigma)}\exp\frac{1+h}{h(A-\sigma)}}\exp\left(\frac{A-\sigma}{e}\exp\frac{1+h}{h(A-\sigma)}\right)}{\exp\left(\frac{A-\sigma}{e}\exp\frac{1+h}{h(A-\sigma)}\right)}\geq$$
$$\geq(1+o(1))\sqrt{\frac{2\pi}{e(A-\sigma)}\exp\frac{1+h}{h(A-\sigma)}}\longrightarrow+\infty\quad(\sigma\to A),$$

т.е. неравенство (7) не выполняется.

Используя лемму 4, можно также показать, что для принадлежащей классу $\Pi_D(A,0)$ функции

$$F_1(\sigma)=\sum_{n=9}^{\infty}e^{\ln n\ln\ln\ln n}e^{-A\ln n\ln\ln n}e^{\sigma\ln n\ln\ln n}$$

неравенство (7) с $\beta=0$ не выполняется. □

3. Перейдем к рассмотрению случая $A=+\infty$. Через $\Pi_D(\infty,h)$ обозначим класс функций $F\in\Pi_D(\infty)$ таких, что

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(1/|b_n|)}\leq h\in[0,1).$$

Теорема 2. *Пусть $\beta\in[0,1)$. Для того чтобы для любой функции $F\in\Pi_D(\infty,h)$ выполнялось неравенство*

$$M(\sigma,F)\leq K_0\mu\left(\frac{\sigma}{1-\beta},F\right)^{1-\beta},\quad K_0=\mathrm{const}>0,\quad(11)$$

для всех $\sigma\geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\beta>h$.

Доказательство. Пусть $h<\beta<1$ и $F\in\Pi_G(\infty,h)$. Выберем $p=0$ и $q=1-\beta$. Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{(q-1)\ln|b_n|+p\lambda_n}{\ln n}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\beta\ln 1/|b_n|}{\ln n}\geq\frac{\beta}{h}>1,$$

т.е. выполнено условие (4) леммы 2, и поскольку $\frac{\sigma}{1-\beta} \geq 0$ при $\sigma \geq 0$, то для всех $\sigma \geq 0$ имеет место неравенство (3), которое в данном случае равносильно неравенству (11). Достаточность условия $\beta > h$ доказана.

Пусть теперь $0 < h < 1$. Рассмотрим функцию

$$F_2(\sigma) = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1/h} e^{\sigma \ln\ln n}. \tag{12}$$

Так как здесь $\tau = h \in (0,1)$ и $\gamma = 0$, то по лемме 1 абсцисса абсолютной сходимости ряда (12) равна $+\infty$, и легко видеть, что $F_2 \in \Pi_D(\infty, h)$.

Обозначим $\Phi(t) = -\frac{1}{h}e^t + \sigma t$, $\sigma \geq 0$. Функция Φ вогнутая на $(-\infty, +\infty)$, имеет единственную точку максимума $t(\sigma) = \ln(h\sigma)$ и $\Phi(t(\sigma)) = \sigma \ln \frac{\sigma h}{e}$. Поэтому, как при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\mu(\sigma, F_2) \leq \frac{\sigma h}{e}, \quad \sigma \geq 0, \tag{13}$$

и

$$M(\sigma, F_2) + \left(\frac{\sigma n}{e}\right)^{\sigma} \geq \int_2^{\infty} e^{\Phi(\ln\ln t)} dt = \int_{\ln\ln 2}^{\infty} e^{\Phi(t)} e^{e^t} e^t\, dt \geq \int_0^{\infty} \exp\left\{(\sigma+1)s - \frac{1-h}{h} e^x\right\} dx. \tag{14}$$

Полагая $\lambda = \sigma + 1$ и $\varphi(t) = \frac{1-h}{h} e^t$, видим, что функция φ удовлетворяет условиям леммы 4, $x(\lambda) = \ln \frac{h(\sigma+1)}{1-h}$, $\varphi''(x(\lambda)) = \sigma + 1$ и $H(x(\lambda); \lambda) = (\sigma+1) \ln \frac{h(\sigma+1)}{1-h}$. Поэтому

$$M(\sigma, F_2) \geq (1 + o(1)) \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma+1}} \left(\frac{h(\sigma+1)}{e(1-h)}\right)^{\sigma+1}, \quad \sigma \to +\infty,$$

и в силу (13) при $\beta \leq h$ выполняется

$$\frac{M(\sigma, F_2)}{\mu\left(\frac{\sigma}{1-\beta}, F_2\right)^{1-\beta}} \geq \frac{(1+o(1)) \frac{h\sqrt{2\pi(\sigma+1)}}{e(1-h)} \left(\frac{h(\sigma+1)}{e(1-h)}\right)^{\sigma}}{\left(\frac{\sigma h}{e(1-\beta)}\right)^{\sigma}} \geq$$

$$\geq (1 + o(1)) \frac{h\sqrt{2\pi}}{e(1-h)} \left(\frac{1-\beta}{1-h}\right)^{\sigma} \sqrt{\sigma} \to +\infty \quad (\sigma \to +\infty),$$

т.е. для функции (12) неравенство (11) с $\beta \leq h$ не выполняется.

Очевидно, функция

$$\exp e^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{sn}$$

принадлежит классу $\Pi_D(\infty, 0)$, а для нее неравенство (11) с $\beta = 0$ не выполняется. $\square$

Зафиксируем теперь последовательность $B = (b_n)$ комплексных чисел и допустим, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(1/|b_n|)} = h(B) \in [0, 1),$$

а через $\Pi_D^*(\infty, B)$ обозначим класс абсолютно сходящихся в $\{s : 0 \leq \operatorname{Re} s < \infty\}$ рядов Дирихле (1), показатели λ_n которых удовлетворяют условиям, наложенным в начале п.1.

Теорема 3. *Пусть $\delta \in [0, 1)$. Для того чтобы для каждой функции $F \in \Pi_D^*(\infty, B)$ выполнялось соотношение*

$$M(\sigma, F) \leq \mu\left(\frac{1 + o(1)}{1 + \delta} \sigma, F\right), \quad \sigma \to +\infty, \tag{15}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\delta \geq h(B)$.

Доказательство. Если $h(B) \le \delta$, то по теореме 2 для каждого $\beta \in (\delta, 1)$ и всех $\sigma \ge 0$ имеет место неравенство (11), откуда следует

$$\ln M(\sigma, F) \le \ln \mu\left(\frac{\sigma}{1-\beta}, F\right) + \ln K_0,$$

и в силу выпуклости функции $\ln \mu(\sigma, F)$ (или $M(\sigma, F)$) легко получаем соотношение (15) с β вместо δ. Так как β — произвольное число, то тем самым достаточность условия $\delta \ge h(B)$ доказана.

Для доказательства необходимости обозначим $B_n = \ln(1/|b_n|)$ и предположим, что $h(B) > \delta$. Тогда $B_n \uparrow +\infty$ $(n \to \infty)$ и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{B_n} = h \in (0, 1), \quad h = h(B).$$

Поэтому по лемме 3 существует подпоследовательность (B_k^*) такая, что $B_k^* \ge e^2$,

$$\ln k \le hB_k^* + 1 \tag{16}$$

для всех $k \in \mathbb{R}$ и

$$\ln k_j \ge hB_{k_j}^* \tag{17}$$

для некоторой возрастающей последовательности (k_j) натуральных чисел.

Положим $\lambda_n = -\infty$, если $B_n \ne B_k^*$, и $\lambda_n = \lambda_k^*$, если $B_n = B_k^*$, где $\lambda_k^* = \frac{B_k^*}{\ln\ln B_k^*}$. Таким образом, приходим к ряду Дирихле

$$F_3(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left\{-B_k + s\frac{B_k}{\ln\ln B_k}\right\},$$

где для простоты $B_k = B_k^*$. В силу (16) этот ряд целый. Ясно, что

$$\ln \mu(\sigma, F_3) \le \max\left\{t\left(\frac{\sigma}{\ln\ln t} - 1\right) : t \ge e^2\right\}.$$

Этот максимум достигается в точке $t = t(\sigma)$, удовлетворяющей уравнению

$$\sigma(\ln t \ln\ln t - 1) = \ln t \ln^2 \ln t, \tag{18}$$

а

$$\ln \mu(\sigma, F_3) \le \frac{\sigma t(\sigma)}{\ln t(\sigma) \ln^2 \ln t(\sigma)} = \frac{t(\sigma)}{\ln t(\sigma) \ln\ln t(\sigma) - 1}. \tag{19}$$

Решение уравнения (18) будем искать в виде $t(\sigma) = \exp\{e^\sigma - \gamma(\sigma)\}$, где, естественно, $\gamma(\sigma) = o(e^\sigma)$, $\sigma \to +\infty$. Подставляя $t(\sigma)$ в (18), имеем

$$\sigma - \frac{\sigma}{(e^\sigma - \gamma(\sigma))\ln(e^\sigma - \gamma(\sigma))} = \sigma + \ln\left(1 - \frac{\gamma(\sigma)}{e^\sigma}\right),$$

т.е.

$$\gamma(\sigma) = (1 + o(1))\frac{e^\sigma \sigma}{(e^\sigma - \gamma(\sigma))\ln(e^\sigma - \gamma(\sigma))} = (1 + o(1)), \quad \sigma \to +\infty.$$

Поэтому $t(\sigma) = \frac{1+o(1)}{e}\exp\{e^\sigma\}$, $\sigma \to +\infty$, и из (19) имеем

$$\ln \mu(\sigma, F_3) \le \frac{(1 + o(1))}{e\sigma} e^{-\sigma} \exp\{e\sigma\} \tag{20}$$

для всех $\sigma \geq \sigma_0$. Далее, используя (16) и (17), получаем

$$M(\sigma, F_3) \geq \sum_{[k_j/2]\leq k\leq k_j} \exp\left\{-B_k + \sigma\frac{B_k}{\ln\ln B_k}\right\} \geq \frac{k_j}{2}\exp\left\{-B_{k_j} + \frac{\sigma}{\ln\ln B_{k_j}}B_{[k_j/2]}\right\} \geq$$

$$\geq \exp\left\{hB_{k_j} - \ln 2 - B_{k_j} + \frac{\sigma}{\ln\ln B_{k_j}}\frac{\ln[k_j/2]-1}{h}\right\} \geq$$

$$\geq \exp\left\{(h-1)B_{k_j} - \ln 2 + \frac{\sigma}{\ln\ln B_{k_j}}\left(\frac{\ln k_j}{h} - \frac{3}{h}\right)\right\} \geq$$

$$\geq \exp\left\{(h-1)B_{k_j} + \frac{\sigma}{\ln\ln B_{k_j}}B_{k_j} - \frac{3}{h}\frac{\sigma}{\ln\ln B_{k_j}} - \ln 2\right\}$$

для всех $\sigma \geq 0$. Взяв здесь $\sigma = \sigma_j = (1-h+\varepsilon)\ln\ln B_{k_j}$, где ε — произвольное положительное число, в силу (20) имеем

$$M(\sigma, F_3) \geq \exp\left\{\varepsilon B_{k_j} - \frac{3(1-h+\varepsilon)}{h} - \ln 2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\varepsilon \exp\exp\frac{\sigma_j}{1-h+\varepsilon} - \frac{3(1-h+\varepsilon)}{h} - \ln 2\right\} \geq$$

$$\geq \exp\left\{\frac{\varepsilon\sigma_j}{1-h+\varepsilon}e^{\frac{\sigma_j}{1-h+\varepsilon}}\ln\mu\left(\frac{\sigma_j}{1-h+\varepsilon}, F_3\right) - \frac{3(1-h+\varepsilon)}{h} - \ln 2\right\} \geq \mu\left(\frac{\sigma_j}{1-h+\varepsilon}, F_3\right)$$

для всех $j \geq j_0(\varepsilon)$. В силу произвольности ε отсюда следует, что неравенство (15) для функции F_3 с $\delta < H(B)$ выполняться не может. □

Литература

1. Стрелиц Ш.И. *Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений.* – Вильнюс: Минтис, 1972. – 468 с.
2. Шеремета М.М. *Цілі ряди Діріхле.* – 1993. – 168 с.
3. Шеремета М.Н. *О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества* // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57. – № 2. – С. 283–296.
4. Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции.* – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1962.– 200 с.

Львовский государственный университет (Украина)

Поступила
15.06.1995