ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 3 (502)

УДК 512.554

Н.А. КОРЕШКОВ

О НИЛЬПОТЕНТНОСТИ ЭНГЕЛЕВЫХ АЛГЕБР ЛИЕВСКОГО ТИПА

В данной работе доказана нильпотентность конечномерной энгелевой алгебры лиевского типа и установлено существование картановских подалгебр в конечномерных антикоммутативных алгебрах лиевского типа с упорядоченной градуировкой.

Класс алгебр лиевского типа был введен в работе [1], в которой изучались тождества этих алгебр (см. также [2]).

Приведем соответствующее определение этих алгебр. Пусть G — абелева группа. Будем говорить, что L — G-градуированная алгебра над полем k, если существует такое конечное подмножество P в группе G, что $L = \bigoplus\limits_{\alpha \in P} L_\alpha$, где L_α — векторное пространство над k, причем $L_\alpha L_\beta \subseteq L_{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in G$ и $L_\gamma = 0$, если $\gamma \notin P$. G-градуированную алгебру L назовем алгеброй лиевского типа, если для любых $\alpha, \beta, \gamma \in P$ существуют элементы $\lambda, \mu \in K$ такие, что для любых однородных элементов $e_\alpha \in L_\alpha$, $e_\beta \in L_\beta$, $e_\gamma \in L_\gamma$ имеет место соотношение

$$e_\alpha(e_\beta e_\gamma) = \lambda(e_\alpha e_\beta)e_\gamma + \mu(e_\alpha e_\gamma)e_\beta, \qquad (1)$$

причем $\lambda \neq 0$. Очевидно, при $\lambda = 1$, $\mu = 0$ получим ассоциативную алгебру, а при $\lambda = 1$, $\mu = -1$ — алгебру Ли. Как отмечено в [2], класс алгебр лиевского типа включает супералгебры Ли с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой, цветные супералгебры Ли и квантовые алгебры Ли.

Приведем еще два примера, связанные с алгебрами картановского типа. Пусть L — свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $e_{-1}, e_0, \dots, e_{p-2}$. Превратим его в алгебру, полагая

$$e_i e_j = \begin{cases} (j-i)e_{i+j}, & -1 \le i+j \le p-2; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Несложно проверить, что $\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L$ является алгеброй лиевского типа (хотя и не будет алгеброй Ли), причем $F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L = W_1$ — алгебра Витта, определенная над простым полем F_p.

Второй пример связан с гамильтоновой алгеброй H_1 ранга один, отождествляемой обычно с фактор-кольцом кольца многочленов от двух переменных $F_p[x, y]$, факторизованным по идеалу, порожденному элементами x^p, y^p. Причем умножение задается формулой $[f, g] = f'_x g'_y - f'_y g'_x$, $f, g \in H_1$.

Рассмотрим свободный $\mathbb{Z}$-модуль L с базисом e_{ij}, $-1 \le i, j \le p-1$. Превратим его в алгебру над $\mathbb{Z}$, полагая

$$e_{ij} \circ e_{km} = \begin{cases} \begin{vmatrix} i+1 & j+1 \\ k+1 & m+1 \end{vmatrix} e_{i+k,\ j+m}, & -1 \le i+k,\ j+m \le p-1; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L$ является алгеброй лиевского типа, если $\mathbb{Q} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L$ рассматривать как $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-градуированную алгебру, а пространства градуировки вида $\mathbb{Q}e_{ij}$, $-1 \le i, j \le p-1$, одномерные. Заметим, что $F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L \cong H_1$.

Для G-градуированной алгебры введем понятие представления лиевского типа.

Определение 1. Пусть $L = \bigoplus\limits_{\alpha\in P} L_\alpha$ — G-градуированная алгебра над k, $M = \bigoplus\limits_{\alpha\in P} M_\alpha$ — векторное пространство над k, являющееся прямой суммой подпространств M_α. Линейное отображение ρ из L в $\mathrm{End}_k(M)$ будем называть представлением лиевского типа, если $M_\alpha\rho(L_\beta) \subseteq M_{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in G$, $M_\gamma = 0$, когда $\gamma \notin P$ и для любых однородных элементов $v_\alpha \in M_\alpha$, $e_\beta \in L_\beta$, $e_\gamma \in L_\gamma$ существуют константы $\lambda, \mu \in k$ такие, что

$$v_\alpha\rho(e_\beta e_\gamma) = \lambda(v_\alpha\rho(e_\beta))\rho(e_\gamma) + \mu(v_\alpha\rho(e_\gamma))\rho(e_\beta), \tag{2}$$

причем $\lambda \neq 0$.

Пространство M будем называть L-модулем лиевского типа, а соотношение (2) записывать в виде

$$v_\alpha(e_\beta e_\gamma) = \lambda(v_\alpha e_\beta)e_\gamma + \mu(v_\alpha e_\gamma)e_\beta.$$

Если L — алгебра лиевского типа, то при $M = L$ и $\rho(l) = R_l$, $l \in L$, R_l — оператор правого умножения, получим пример представления лиевского типа.

Имеет место утверждение, являющееся аналогом теоремы Энгеля (в форме Джекобсона).

Теорема 1. *Пусть M — L-модуль лиевского типа конечномерной G-градуированной алгебры $L = \bigoplus\limits_{\alpha\in P} L_\alpha$. Если для любого $x \in L_\alpha$ оператор $\rho(x)$ нильпотентен (где ρ — представление, отвечающее модулю M), то ассоциативная алгебра $A(\rho(L))$, порожденная операторами $\rho(x)$, $x \in L$, нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $U = \bigoplus\limits_{\alpha\in P} U_\alpha$, $U_\alpha = L_\alpha \cap U$, — G-градуированное подпространство в L максимальной размерности, для которого ассоциативная подалгебра $A(\rho(U))$ в $\mathrm{End}_k(M)$ нильпотентна. Так как для любого однородного элемента $x \in L_\alpha$ алгебра $A(\rho(kx))$ нильпотентна, то $U \neq 0$.

Если n — степень нильпотентности алгебры $A(\rho(L))$, то для любого $z \in L_\alpha$ и любых $u_{\alpha_j} \in U_{\alpha_j}$, $j = 1, \ldots, 2n-1$, $\rho(\ldots(zu_{\alpha_1})u_{\alpha_2}\ldots u_{\alpha_{2n-1}}) = 0$.

Действительно, для любых однородных элементов $y \in M_\alpha$, $z \in L_\beta$, $x_{\gamma_j} \in L_{\gamma_j}$, $j = 1, \ldots, k$, имеет место формула

$$y\rho(\ldots(zu_{\gamma_1})\ldots u_{\gamma_k}) = y\sum_{i=0}^{k}\sum_{\pi\in S_k}\lambda_{\pi,i}\rho(u_{\gamma_{\pi(1)}})\ldots\rho(u_{\gamma_{\pi(i)}})\rho(z)\rho(u_{\gamma_{\pi(i+1)}})\ldots\rho(u_{\gamma_{\pi(k)}}), \tag{3}$$

где $\lambda_{\pi,i} \in k$, S_k — группа подстановок k-й степени, $\rho(u_{\gamma_{\pi(0)}}) = 1$. При $k = 1$ формула (3) превращается в формулу (2). Вычислим

$$\begin{aligned}
y\rho(\ldots(zu_{\gamma_1})\ldots u_{\gamma_{k+1}}) &= \lambda y\rho(\ldots(zu_{\gamma_1})\ldots u_{\gamma_k})\rho(u_{\gamma_{k+1}}) + \mu y\rho(u_{\gamma_{k+1}})\rho(\ldots(zu_{\gamma_1})\ldots z_{\gamma_k}) = \\
&= \lambda y\sum_{i=0}^{k}\sum_{\pi\in S_k}\lambda_{\pi,i}\rho(u_{\gamma_{\pi(1)}})\ldots\rho(u_{\gamma_{\pi(i)}})\rho(z)\rho(u_{\gamma_{\pi(i+1)}})\ldots\rho(u_{\gamma_{\pi(k)}})\rho(u_{\gamma_{k+1}}) + \\
&+ \mu y\rho(u_{\gamma_{k+1}})\sum_{i=0}^{k}\sum_{\pi\in S_k}\lambda'_{\pi,i}\rho(u_{\gamma_{\pi(1)}})\ldots\rho(u_{\gamma_{\pi(i)}})\rho(z)\rho(u_{\gamma_{\pi(i+1)}})\ldots\rho(u_{\gamma_{\pi(k)}}) = \\
&= y\sum_{i=0}^{k+1}\sum_{\pi\in S_{k+1}}\lambda''_{\pi,i}\rho(u_{\gamma_{\pi(1)}})\ldots\rho(u_{\gamma_{\pi(i)}})\rho(z)\rho(u_{\gamma_{\pi(i+1)}})\ldots\rho(u_{\gamma_{\pi(k+1)}}).
\end{aligned}$$

Применяя формулу (3) для $k = 2n-1$, получим $y\rho(\ldots(zu_{\gamma_1})\ldots u_{\gamma_{2n-1}}) = 0$ при $y \in M_\alpha$, $z \in L_\beta$, $u_{\gamma_i} \in U_{\gamma_i}$, $i = 1, \ldots, 2n-1$. В силу произвольности α и y получаем $\rho(\ldots(zu_{\gamma_1})\ldots u_{\gamma_{2n-1}}) = 0$.

Предположим, что $U \neq L$. Тогда существует такой однородный элемент $z \in L$, $z \notin U$, что $\rho(zu) \in \rho(U) = \{\rho(u),\ u \in U\}$ для любого однородного элемента $u \in U$. Проверим, что ассоциативная алгебра $A(\rho(U_1))$, порожденная операторами $\rho(u_1) \in \rho(U_1)$, где $U_1 = kz \oplus U$, нильпотентна. Действительно, любое произведение $y\rho(a_1)\ldots\rho(a_s)$, где каждое a_i (однородное) либо принадлежит U, либо равно z, можно представить в виде линейной комбинации произведений $y\rho(u_{\gamma_1})\dots\rho(u_{\gamma_q})\rho^t(z)$, $u_{\gamma_j}\in U_{\gamma_j}$, в силу соотношения

$$v\rho(z)\rho(u)=\overline{\mu}v\rho(u)\rho(z)+\overline{\lambda}v\rho(zu),$$

$\overline{\lambda},\overline{\mu}\in k$, v, z, u — однородные элементы из M и L. Последнее соотношение получается из (2) делением на λ.

В силу выбора z имеем $\rho(zu)=\rho(\widetilde{u})$ для некоторого однородного элемента $\widetilde{u}\in U$. Поэтому, если $s\geq(N+1)m$, где N — показатель нильпотентности алгебры $A(\rho(U))$, m — показатель нильпотентности оператора $\rho(z)$, то либо $t\geq m$, либо $q\geq N$, т.е. $\rho(a_1)\dots\rho(a_s)=0$ при $a_i\in U_1$. Получаем противоречие с максимальностью размерности пространства U. Значит, $U=L$, т.е. $A(\rho(L))$ нильпотентна. $\square$

Из доказанной теоремы легко получается утверждение, дословно повторяющее классическую теорему Энгеля.

Теорема 2. *Пусть ρ — представление лиевского типа конечномерной G-градуированной алгебры $L=\bigoplus\limits_{\alpha\in P}L_\alpha$ в конечномерном пространстве $M=\bigoplus\limits_{\alpha\in P}M_\alpha$. Если для любого $x\in L_\alpha$ оператор $\rho(x)$ нильпотентен, то существует базис в M, в котором все операторы $\rho(x)$, $x\in L$, одновременно приводятся к верхнему строго треугольному виду.*

Пусть теперь L — алгебра лиевского типа. Возьмем в качестве L-модуля лиевского типа саму алгебру L, а в качестве представления ρ — линейное отображение, ставящее каждому $x\in L$ оператор правого умножения R_x. Тогда из теоремы 1 вытекает нильпотентность ассоциативной алгебры $A(R(L))$, где $R(L)=\{R_x,\,x\in L\}$. Отсюда следует правая нильпотентность алгебры L. Легко проверить, используя формулу (1) и индукцию по количеству множителей, что любое произведение однородных элементов, имеющее n множителей, является линейной комбинацией с коэффициентами из поля k правонормированных мономов вида $(\dots(a_{i_1}a_{i_2})\dots a_{i_n})$, где все a_{i_k} также однородны.

Эти замечания позволяют сформулировать еще одно следствие из теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $L=\bigoplus\limits_{\alpha\in P}L_\alpha$ — конечномерная алгебра лиевского типа. Если для любого $x\in L_\alpha$ оператор R_x нильпотентен, то L нильпотентна.*

Заметим, что алгебра L называется нильпотентной, если существует такое натуральное число n, что произведение любых n элементов из L при любой расстановке скобок равно нулю.

Если усилить условие теоремы, потребовав нильпотентность операторов R_x для любого элемента $x\in L$, то получим утверждение, аналогичное соответствующему результату из теории алгебр Ли.

Теорема 4. *Конечномерная алгебра лиевского типа L нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого элемента $x\in L$ оператор R_x нильпотентен.*

Используя полученный результат, докажем существование картановских подалгебр (даже однородных) в алгебрах лиевского типа.

Определение 2. Подалгебра H в алгебре B называется правой картановской подалгеброй, если H правонильпотентна и совпадает со своим правым нормализатором $N_B(H)=\{b\in B,\ bh\in H\ \forall h\in H\}$.

Определение 3. Правой нуль-компонентой множества H в алгебре B называется пространство $B^0(H)=\{x\in B\mid \forall h\in H\ \exists n=n(x,h)\in\mathbb{N}\ xR_h^n=0\}$.

Если B — алгебра лиевского типа, а $H = \bigoplus_{\alpha \in P} H_\alpha$, $H_\alpha = H \cap B_\alpha$, $\alpha \in P$, — однородное пространство, то из формулы

$$(xy)R_h^n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i (xR_h^i)(yR_h^{n-i}), \tag{4}$$

где x, y, h — однородные элементы из B, легко следует, что $B^0(H)$ — однородная подалгебра. Формула (4) легко доказывается индукцией по n. При $n = 1$ это другая форма записи формулы (1).

Если, кроме того, B — антикоммутативная алгебра, то правый нормализатор становится просто нормализатором, и если H — однородное пространство, то $N_B(H)$ — однородная подалгебра. Наконец, если H — подалгебра, то $H \subseteq N_B(H)$.

Предложение. *Правая однородная картановская подалгебра H конечномерной алгебры B лиевского типа совпадает со своей нуль-компонентой $B^0(H)$.*

Доказательство. Так как H правонильпотентна, то $H \subseteq B^0(H)$. Если $B^0 = B^0(H) \supset H$, то рассмотрим действие алгебры H в пространстве B^0/H операторами $\overline{R}_h : (b_0 + H) \to (b_0 h + H)$. Из определения нуль-компоненты следует, что каждый оператор $\overline{R}_h$ нильпотентен, а пространство B^0/H является H-модулем лиевского типа. В силу теоремы 1 ассоциативная алгебра $\overline{A}(H)$, порожденная операторами $\overline{R}_h$, нильпотентна. Поэтому существует $\overline{b}_0 \in B^0/H$, $\overline{b}_0 \neq \overline{0}$, такой, что $\overline{b}_0 \overline{R}_h = \overline{0}$ $\forall h \in H$. Следовательно, $b_0 \notin H$, но $b_0 \in N_B(H)$, т. е. $N_B(H) \supset H$, что противоречит определению картановской подалгебры. $\square$

В дальнейшем будем рассматривать такие алгебры лиевского типа, у которых группа G, участвующая в определении градуировки, вполне упорядочена, т. е. на G введено отношение порядка $<$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) для любых $\alpha, \beta \in G$ либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha = \beta$, либо $\beta < \alpha$, причем эти возможности исключают друг друга;
2) если $\alpha < \beta$, то $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ для всякого $\gamma \in G$;
3) $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$ влечет $\alpha < \gamma$.

В качестве примеров таких алгебр можно указать $\mathbb{Q}$-формы алгебр W_1 и H_1, приведенные выше.

Определение 4. Пусть $B = \bigoplus_{\alpha \in P} B_\alpha$ — G-градуированная алгебра. Элемент $a \in B_\alpha$ называется однородным регулярным элементом, если кратность нулевого характеристического корня оператора R_a минимальна среди всех элементов из B_α.

Теорема 5. *Пусть L — конечномерная антикоммутативная алгебра лиевского типа над бесконечным полем k с вполне упорядоченной группой G. Если $L_0 \neq 0$ и a — однородный регулярный элемент из L_0, то $L^0(a)$ является картановской подалгеброй в L.*

Доказательство. Убедимся в нильпотентности алгебры $L^0(a)$. Поскольку G — вполне упорядоченная группа, то для любых $\alpha, \beta \in G$, $\beta \neq 0$, существует k такое, что $L_{\alpha + k\beta} = 0$ (в силу конечности множества P). Поэтому для любого однородного элемента b из $L^0_\beta(a) = L^0(a) \cap L_\beta$, оператор R_b нильпотентен.

Проверим нильпотентность R_b, когда $b \in L^0_0(a)$. Для любого элемента $b \in L^0(a)$ матрица линейного оператора R_b в базисе, согласованном с разложением $L = L^0(a) \oplus M$, где M — некоторое дополнительное подпространство, имеет вид

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_3 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $f_b(\lambda) = |\lambda E - R_b|$ характеристический многочлен оператора R_b. Тогда $f_b(\lambda) = f_b^{(1)}(\lambda) f_\beta^{(2)}(\lambda)$, $f_b^{(1)}(\lambda) = |\lambda E_1 - B_1|$, $f_b^{(2)}(\lambda) = |\lambda E_2 - B_2|$, где E_i — единичные матрицы, отвечающие блокам B_i, $i = 1, 2$. Пусть $r = \dim_k L^0(a)$. Предположим, что существует $b \in L_0^0(a)$ такой, что $R_b\big|_{L^0(a)} = B_1$ — ненильпотентный оператор. Тогда $f_b^{(1)}(\lambda) = \lambda^t g_1(t)$, $t < r$, $\lambda \nmid g_1(\lambda)$. Дословно повторяя рассуждения из [3], получим, используя бесконечность поля k, существование таких $\mu, \nu \in k$, что $f_{\mu a + \nu b} = \lambda^t g_3(\lambda)$, $\lambda \nmid g_3(\lambda)$, т. е. оператор $R_{\mu a + \nu b}$, $\mu a + \nu b \in L_0^0(a)$, имеет кратность нулевого характеристического корня меньше, чем оператор R_a. Это противоречит регулярности a. Таким образом, для любого однородного элемента $b \in L^0(a)$ оператор R_b нильпотентен. По теореме 3 алгебра $L^0(a)$ нильпотентна. Следовательно, $L^0(a) \subseteq L^0(L^0(a)) = \{x \in L \mid \forall y \in L^o(a)\ \exists n\ xR_y^n = 0\}$. Но так как $L^0(L^0(a)) \subseteq L^0(a)$, то $L^0(a)$ совпадает со своей нуль-компонентой $L^0(L^0(a))$. Из определения нормализатора и нуль-компоненты для любой нильпотентной подалгебры T легко получить, что $N_L(T) \subseteq L^0(T)$. Итак, $L^0(a) = N_L(L^0(a))$. $\square$

Литература

1. Bahturin Y., Zaicev M. *Identities of graded algebras* // J. Algebra. – 1998. – V. 205. – № 1. – P. 1–12.
2. Бахтурин Ю.А., Зайцев М.В., Сегал С.К. *G-тождества неассоциативных алгебр* // Матем. сб. – 1999. – Т. 190. – № 11. – С. 3–14.
3. Джекобсон Н. *Алгебры Ли.* – М.: Мир, 1964. – 355 с.

Казанский государственный университет

Поступила
13.02.2002