

УДК 517.5

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛАХ КРИСТОФФЕЛЯ – ШВАРЦА

Н.Н. Накипов, С.Р. Насыров

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Предложен метод нахождения акцессорных параметров в обобщенном интеграле Кристоффеля – Шварца, дающем конформное отображение полуплоскости на многолиственный многоугольник с внутренними точками ветвления. Этот метод основан на включении искомого отображения в однопараметрическое семейство отображений верхней полуплоскости на римановы поверхности, которые получаются из заданной компактной поверхности проведением удлиняющегося полигонального разреза. Выводится система обыкновенных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют параметры, входящие в интегралы Кристоффеля – Шварца, – прообразы вершин многоугольника и его точек ветвления. Реализация метода состоит в последовательном решении задач Коши, когда конец движущегося разреза обходит одно за другим звенья ломаной. При этом решения, полученные на каждом из этапов, кроме последнего, определяют начальные данные для решения системы на последующем этапе. Рассмотрен пример, показывающий эффективность предложенного метода. Для однолистных отображений подобный метод был впервые предложен П.П. Куфаревым.

Ключевые слова: интегралы Кристоффеля – Шварца, многолистные функции, параметрический метод

Введение

В настоящей статье предложен алгоритм нахождения акцессорных параметров в обобщенном интеграле Кристоффеля – Шварца, дающем конформное отображение верхней полуплоскости на многоугольную риманову поверхность, содержащую внутренние точки ветвления.

Как известно, впервые формулу для конформного отображения канонической области (круга или полуплоскости) на однолиственный многоугольник предложили в своих работах Э. Кристоффель [1] и Х. Шварц [2]. В интегральное представление для указанного отображения входят неизвестные параметры, которые называются акцессорными. Определение этих параметров является непростой задачей, которой занимались многие видные математики. Отметим некоторые из публикаций. Так, М.А. Лаврентьев [3, 4] исследовал случаи, когда интеграл Кристоффеля – Шварца можно проинтегрировать в явном виде. А. Вайнштейн [5, 6] для нахождения акцессорных параметров разработал конструктивную схему, названную методом непрерывности. Два способа отыскания акцессорных параметров предложены С. Бергманом [7, 8]. Н.П. Стенин [9] для определения констант интеграла Кристоффеля – Шварца использовал метод Ньютона – Фурье, модифицированный для вычисления несобственных интегралов. Приближенный метод, хорошо работающий в частных случаях, предложил И.С. Хара [10]. В. Коппенфельс и Ф. Штальман [11] разобрали случай произвольного четырехугольника, используя гипергеометрические

ряды. П.Ф. Фильчаков [12] использовал для определения параметров интеграла Кристоффеля–Шварца степенные ряды.

Отметим также книги [13, 14] и обзорную статью [15], в которых дается описание некоторых современных публикаций по данной тематике и приводятся соответствующие библиографические ссылки. Следует упомянуть, что Т.А. Дрискол [16] создал для математического пакета MATLAB расширение “The Schwartz–Christoffel Toolbox”, позволяющее достаточно точно определять акцессорные параметры для довольно сложных полигональных областей.

Одним из наиболее эффективных методов в теории однолистных функций является параметрический метод Левнера (см., например, [17, 18]). Он основан на рассмотрении однопараметрических семейств однолистных функций, зависящих от вещественного параметра, и исследовании дифференциального уравнения, которому удовлетворяют функции этого семейства, так называемого уравнения Левнера и его модификаций.

Используя уравнение Левнера, в 1947 г. П.П. Куфарев (см. [18, 19]) показал, что определение акцессорных параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца может быть сведено к численному интегрированию некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Реализовал метод П.П. Куфарева и первым провел численные расчеты Ю.В. Чистяков [20]; в [23] также было проведено тестирование этого метода. В 1993 г. В.Я. Гутлянский и А.О. Зайдан [21] (см. также [22]) предложили другой метод, идейно близкий к методу Куфарева. Они отказались от нормировки конформных отображений во внутренней точке и вывели систему ОДУ, которым удовлетворяют акцессорные параметры. Несколько другой подход, близкий к работе [21], был предложен Л.Ю. Низамиевой [24–26]; она в качестве основного аппарата использовала краевую задачу Гильберта. Заметим, что геометрическая интерпретация решения краевой задачи Гильберта с кусочно постоянными коэффициентами часто используется в различных задачах, см., например, [27]. Отметим также работу И.А. Колесникова [28], в которой однопараметрический метод применяется к задаче нахождения акцессорных параметров для отображений счетноугольников с симметрией переноса.

В настоящей статье мы используем идеи работ [24–26] и предлагаем метод для определения акцессорных параметров в случае многолистных многоугольников, содержащих точки ветвления. Эти результаты частично анонсированы в [29, 30].

Под *многолистным многоугольником* мы понимаем односвязную компактную риманову поверхность с краем, которая разветвленно накрывает комплексную плоскость, при этом край проектируется в замкнутую ломаную Γ . Для удобства изложения при описании будем отождествлять геометрические компоненты края поверхности и ломаной, которая является его проекцией на комплексную плоскость. Например, говоря о стороне или вершине ломаной (на римановой поверхности), мы будем иметь в виду часть края или точку, которые проектируются в соответствующую сторону или вершину ломаной.

Кратко изложим суть предлагаемого нами метода. Пусть нам нужно построить отображение верхней полуплоскости \mathbb{C}^+ на многолистый многоугольник D . Без ограничения общности можно считать, что одна из вершин многоугольника D расположена в начале координат и одна из прилегающих к ней сторон лежит на положительной части \mathbb{R}_+ вещественной оси (мы всегда можем добиться этого параллельным переносом и поворотом D). Вложим D в компактную риманову поверхность S рода нуль. Для этого построим односвязную риманову поверхность D^- с краем, проектирующимся в ломаную Γ^- ; методы построения такой поверхности описаны, например, в [31]. Склеивая D и D^- вдоль их краев, получаем искомую поверхность S . Разрежем S вдоль кривой \mathbb{R}_+ . В результате

получим некоторую поверхность \tilde{S} с краем, которая является половиной односвязной компактной римановой поверхности T рода нуль, униформизируемой полиномом. В силу симметрии можно найти полином, отображающий верхнюю полуплоскость на \tilde{S} . Методы нахождения таких полиномов изложены в [32].

Теперь рассмотрим однопараметрическое семейство \tilde{S}_t , $0 \leq t \leq L$, многолистных многоугольников, которое содержит \tilde{S} в качестве начального элемента. Как уже отмечалось, \tilde{S} получается из S проведением разреза вдоль \mathbb{R}_+ . При возрастании параметра этот разрез начинает удлиняться и обходить сторону ломаной, смежную с той, которая располагается над \mathbb{R}_+ . После того, как разрез пройдет всю эту сторону, он начинает двигаться вдоль следующей стороны и т. д. В результате за $(p - 1)$ этап, где p – число сторон ломаной, мы обойдем весь край. Последовательность \tilde{S}_t , когда t стремится к финальному значению L , сходится к многоугольнику D как к ядру относительно любой точки этого многоугольника (подробнее см. [31, гл. 4]). При соответствующей нормировке функций f_t , отображающих верхнюю полуплоскость на \tilde{S}_t , они сходятся к конформному отображению f верхней полуплоскости на D . При этом акцессорные параметры, соответствующие \tilde{S}_t , будут сходиться к искомым акцессорным параметрам. Таким образом, следует определить акцессорные параметры для \tilde{S}_t на каждом из этапов. Мы выведем систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют параметры. Тогда метод сведется к решению задачи Коши для этой системы. В качестве начальных значений параметров на n -м этапе служат финальные значения соответствующих параметров на $(n - 1)$ -м этапе.

1. Обобщенный интеграл Кристоффеля – Шварца как решение краевой задачи Гильберта

Напомним, что классический интеграл Кристоффеля – Шварца является решением задачи о конформном отображении верхней полуплоскости на однолиственный многоугольник. Он имеет вид

$$z(\zeta) = C_0 \int_{t_0}^{\zeta} \prod_{k=1}^p (\omega - t_k)^{\beta_k} d\omega + C_1,$$

где $\beta_k = \alpha_k - 1$ – меры углов многоугольника в долях π , уменьшенные на единицу, вещественные величины t_k – прообразы его вершин, C_0, C_1 – комплексные константы, определяющие поворот, растяжение и сдвиг. Параметры t_k называются акцессорными.

Аналогично строится отображение полуплоскости на многолиственный многоугольник с внутренними точками ветвления – обобщенный интеграл Кристоффеля – Шварца (см, например, [11]):

$$z(\zeta) = C_0 \int_{t_0}^{\zeta} \prod_{k=1}^p (\omega - t_k)^{\beta_k} \prod_{j=1}^m ((\omega - \zeta_j)(\omega - \bar{\zeta}_j))^{\gamma_j} d\omega + C_1, \quad (1)$$

где ζ_j – прообразы внутренних точек ветвления, $\text{Im } \zeta_j > 0$, γ_j – порядки этих точек ветвления, параметры β_k и t_k имеют тот же геометрический смысл, что и для обычных интегралов Кристоффеля – Шварца. Параметры ζ_j , так же как и t_k , будем называть акцессорными параметрами.

В силу сказанного во введении достаточно описать ситуацию на n -м шаге. Рассмотрим однопараметрическое семейство конформных отображений \mathbb{C}^+ на римановы поверхности S_T , которые получаются разрезанием S вдоль \mathbb{R}_+ и n -звенной

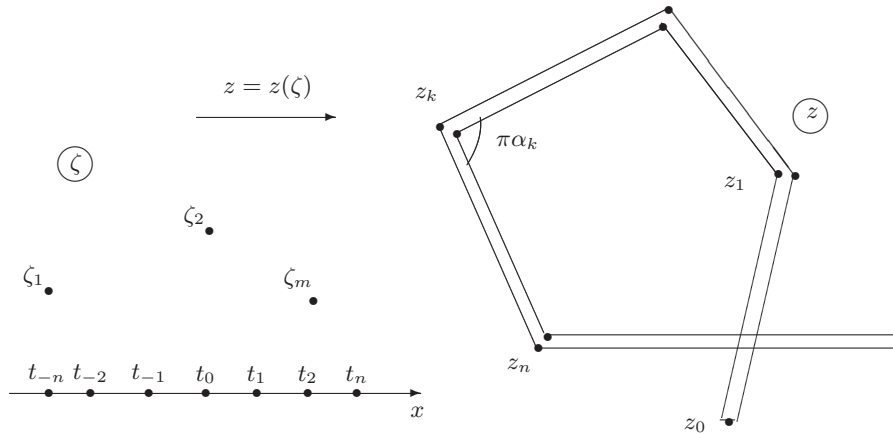


Рис. 1

ломаной, у которой все звенья фиксированы, а длина T последнего звена изменяется от 0 до некоторой величины, равной длине n -го звена границы ломаной ∂D . В дальнейшем будем использовать другую нумерацию вершин ∂D , противоположную заданной изначально: за первое звено будем считать то, длина которого равна T , а за n -е – первое. Тогда вершины ломаной, вдоль которой разрезается S , чтобы получить S_T , суть $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$, где z_0 – движущийся конец разреза, а точкам $z_k, 1 \leq k \leq n$, соответствуют по две точки (простых конца) на разных берегах разреза с углами $\pi \alpha_k$ и $\pi(2 - \alpha_k)$. Обозначим через $t_{\pm k}$ прообразы этих двух точек, занумерованные так, что $t_{-n} < \dots < t_{-k} < \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_n$ (рис. 1). Тогда отображение верхней полуплоскости на S_T запишется в виде обобщенного интеграла Кристоффеля – Шварца

$$z(\zeta) = z(\zeta, T) = z_0 + C \int_{t_0}^{\zeta} \prod_{k=-n}^n (\omega - t_k)^{\beta_k} \prod_{j=1}^m ((\omega - \zeta_j)(\omega - \bar{\zeta}_j))^{\gamma_j} d\omega, \quad (2)$$

где $\beta_{-k} := -\beta_k, \beta_0 = 1$, величины $t_k, \zeta_j, C > 0$ зависят от $T, z(t_0) = z_0 = z_0(T)$ – подвижный конец разреза, $z(t_{\pm k}) = z_k = \text{const}$ – вершины ломаной, $z(\zeta_j) = w_j = \text{const}$ – проекции точек ветвления D . Пусть $\sum_{j=1}^m \gamma_j = N$. Очевидно, что $z(\zeta) \sim (C/(2N + 2))\zeta^{2N+2}$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Из общих принципов теории конформных отображений следует, что если мы зафиксируем значения t_0 и C и будем считать их не зависящими от T , то набор параметров t_k и ζ_j определится единственным образом.

Функция $z(\zeta, T)$ аналитична по ζ при фиксированном T . Кроме того, параметры t_k и ζ_j непрерывно дифференцируемы по T , что доказывается аналогично тому, как это было сделано в [33], где рассматривался случай простых точек ветвления произвольных многоугольных областей и была установлена непрерывная дифференцируемость аксессуарных параметров как функций от длин многоугольников). Следовательно, $z(\zeta, T)$ также непрерывно дифференцируема по T .

Для краткости будем обозначать частные производные по комплексному переменному ζ штрихом, а по вещественному параметру T – точкой сверху; например, $z'(\zeta, T) := \partial z(\zeta, T)/\partial \zeta, \dot{z}(\zeta, T) := \partial z(\zeta, T)/\partial T$. При фиксированном T функция $z(\zeta, T)$ аналитична по ζ , и там, где это не вызывает недоразумений, когда будет идти речь о соответствующем конформном отображении, мы не будем для

краткости указывать явно ее зависимость от параметра T и писать вместо $z(\zeta, T)$ просто $z(\zeta)$.

Заметим, что отображение $z(\zeta) = x(\zeta) + iy(\zeta)$ является решением неоднородной краевой задачи Гильберта для верхней полуплоскости

$$a_k x(t) + b_k y(t) = c_k, \quad t \in (t_{k-1}, t_k), \quad -n \leq k \leq n+1, \quad (3)$$

удовлетворяющим условиям

$$z(\zeta_j) = w_j, \quad z^{(k)}(\zeta_j) = 0, \quad 1 \leq k \leq \gamma_j - 1, \quad 1 \leq j \leq m,$$

$$z(\zeta) \sim \frac{C}{2N+2} \zeta^{2N+2} \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty,$$

где t_k , $k \in \{-n, \dots, n\}$, – искомые аксессуарные параметры, причем $t_{-n-1} = -\infty$, $t_{n+1} = +\infty$, вещественные коэффициенты a_k , b_k , c_k таковы, что уравнение $a_k x + b_k y = c_k$ задает прямую, на которой лежит соответствующая сторона многоугольника. По принципу симметрии Римана – Шварца из аналитичности получаем

$$z(\bar{\zeta}_j) = \bar{w}_j, \quad z^{(k)}(\bar{\zeta}_j) = 0, \quad 1 \leq k \leq \gamma_j - 1, \quad 1 \leq j \leq m.$$

В силу того, что a_k , b_k и c_k не зависят от T , имеем

$$a_k \dot{x}(t) + b_k \dot{y}(t) = 0, \quad t \in (t_{k-1}, t_k).$$

Таким образом, можно определить функцию $\dot{z}(\zeta) = \dot{x}(\zeta) + i\dot{y}(\zeta)$ как решение однородной краевой задачи Гильберта, соответствующей записанной выше неоднородной задаче (3). Отметим, что поскольку C не зависит от T , функция \dot{z} имеет на бесконечности порядок не выше чем $2N+1$. Согласно [35, гл. 3, § 29] получаем

$$\dot{z}(\zeta) = P(\zeta) \prod_{j=1}^m ((\zeta - \zeta_j)(\zeta - \bar{\zeta}_j))^{\gamma_j} \prod_{k=-n}^n (\zeta - t_k)^{\beta_k + \varepsilon_k}, \quad (4)$$

где $\varepsilon_k \in \mathbb{Z}$, $P(\zeta)$ – некоторый полином с вещественными коэффициентами, не обращающийся в нуль в точках t_k и ζ_j .

Будем писать для краткости $f|_z$ при рассмотрении поведения функции f в окрестности точки z . В дальнейшем нам будет удобно переобозначить аксессуарные параметры. Пусть $s_k = t_k$, $\nu_k = \beta_k$, $|k| \leq n$, $s_k = \zeta_{k-n}$, $s_{-k} = \bar{s}_k$, $\nu_k = \nu_{-k} = \gamma_{k-n}$, $n+1 \leq k \leq m+n$. Обозначим $S_k = z(s_k)$, $|k| \leq n+m$. Для упрощения записи в дальнейшем мы будем часто опускать пределы в произведениях и суммах, содержащих s_k , подразумевая произведение или сумму по всем возможным индексам k , если не указано иное.

Имеем

$$z'(\zeta) = C \prod_k (\zeta - s_k)^{\nu_k}. \quad (5)$$

Разложим функцию $z'(\zeta)$ в ряд в окрестности s_k :

$$z'(\zeta) \Big|_{s_k} = (\zeta - s_k)^{\nu_k} \sum_{l=0}^{\infty} A_l^k (\zeta - s_k)^l = \sum_{l=0}^{\infty} A_l^k (\zeta - s_k)^{\nu_k + l}.$$

Отметим, что коэффициенты A_l^k гладким образом зависят от T , причем $A_0^k \neq 0$. Интегрируя по ζ , найдем

$$z(\zeta) \Big|_{s_k} = S_k + \sum_{l=0}^{\infty} A_l^k \frac{(\zeta - s_k)^{\nu_k + l + 1}}{\nu_k + l + 1}.$$

Вычислим производную по T :

$$\begin{aligned} \dot{z}(\zeta)\Big|_{s_k} &= \dot{S}_k + \sum_{l=0}^{\infty} \left(\dot{A}_l^k \frac{(\zeta - s_k)^{\nu_k+l+1}}{\nu_k+l+1} - A_l^k \dot{s}_k (\zeta - s_k)^{\nu_k+l} \right) = \\ &= \dot{S}_k - A_0^k \dot{s}_k (\zeta - s_k)^{\nu_k} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu_k+l} \dot{A}_{l-1}^k - A_l^k \dot{s}_k \right) (\zeta - s_k)^{\nu_k+l}. \end{aligned}$$

Поскольку $\dot{S}_k \neq 0$ только для подвижного конца разреза, а $\dot{s}_k = 0$ только для $s_k = \text{const}$, в (4) все $\varepsilon_k = 0$, кроме $\varepsilon_0 = -1$.

Теперь рассмотрим поведение изучаемых функций в бесконечно удаленной точке. Имеем

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(\frac{z - t_k}{z - t_{-k}} \right)^{\beta_k} = 1,$$

поэтому

$$z'(\zeta)\Big|_{\infty} = C \prod_{j=1}^m ((\zeta - \zeta_j)(\zeta - \bar{\zeta}_j))^{\gamma_j} \times (\zeta - t_0) \left(1 + \frac{c_{-1}}{\zeta} + \frac{c_{-2}}{\zeta^2} + \dots \right),$$

где

$$c_{-1} = -\text{res}_{\infty} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\zeta - t_k}{\zeta - t_{-k}} \right)^{\beta_k} = \sum_{0 < |j| \leq n} \beta_j t_j.$$

Значит,

$$\begin{aligned} z'(\zeta)\Big|_{\infty} &= C \prod_{j=1}^m (\zeta^2 - (\zeta_j + \bar{\zeta}_j)\zeta - |\zeta_j|^2)^{\gamma_j} (\zeta - t_0) \left(1 - \frac{1}{\zeta} \sum_{0 < |k| \leq n} \beta_k t_k + \frac{c_{-2}}{\zeta^2} + \dots \right) = \\ &= C \left(\zeta^{2N+1} - \left(\sum_{j=1}^m \gamma_j (\zeta_j + \bar{\zeta}_j) + \sum_{k=-n}^n \beta_k t_k \right) \zeta^{2N} + \dots \right), \end{aligned}$$

или в новых обозначениях

$$z'(\zeta)\Big|_{\infty} = C \left(\zeta^{2N+1} - \zeta^{2N} \sum_k \nu_k s_k + \dots \right).$$

Тогда с учетом того, что C не зависит от T , получим

$$\begin{aligned} z(\zeta)\Big|_{\infty} &= C \left(\frac{\zeta^{2N+2}}{2N+2} - \frac{\zeta^{2N+1}}{2N+1} \sum_k \nu_k s_k + \dots \right), \\ \dot{z}(\zeta)\Big|_{\infty} &= C \left(-\frac{\zeta^{2N+1}}{2N+1} \sum_k \nu_k \dot{s}_k + \dots \right). \end{aligned}$$

Поскольку $s_0 = 0$, $\varepsilon_0 = -1$, $\deg \prod_{j=1}^m (\zeta - \zeta_j)^{\gamma_j} (\zeta - \bar{\zeta}_j)^{\gamma_j} = 2N$ и выше было показано, что в (4) все $\varepsilon_k = 0$, кроме $\varepsilon_0 = -1$, имеем

$$\dot{z} = -(a\zeta + b) \prod_{k \neq 0} (\zeta - s_k)^{\nu_k}, \quad (6)$$

где

$$a = - \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left(\zeta^{-(2N+1)} \dot{z} \Big|_{\infty} \right) = \frac{C}{2N+1} \sum_k \nu_k \dot{s}_k,$$

$$b = -a s_0 - \lim_{\zeta \rightarrow s_0} \frac{\dot{z} \Big|_{s_0}}{\prod_{k \neq 0} (s_0 - s_k)^{\nu_k}} = -\dot{S}_0 / \prod_{k \neq 0} (-s_k)^{\nu_k}.$$

Из соотношений

$$\left(\frac{-t_k}{-t_{-k}} \right)^{\beta_k} = \left| \frac{t_k}{t_{-k}} \right|^{\beta_k} \exp(i\pi\beta_k), \quad \dot{S}_0 = - \exp \left(i\pi \sum_{k=1}^n \beta_k \right) |\dot{S}_0|, \quad \zeta^{\gamma_j} \bar{\zeta}^{\gamma_j} = |\zeta|^{\gamma_j} |\bar{\zeta}|^{\gamma_j},$$

следует

$$a = \frac{C}{2N+1} \sum_k \nu_k \dot{s}_k, \quad b = |\dot{S}_0| / \prod_{k \neq 0} |s_k|^{\nu_k}. \quad (7)$$

2. Вывод системы дифференциальных уравнений для акцессорных параметров

В силу формулы логарифмического дифференцирования из (5) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial z}{\partial \zeta} = C \prod (\zeta - s_k)^{\nu_k} \left(- \sum \frac{\nu_k}{\zeta - s_k} \dot{s}_k \right). \quad (8)$$

С другой стороны, согласно (6)

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial T} = - \prod_{k \neq 0} (\zeta - s_k)^{\nu_k} \left(a + \sum_{k \neq 0} \nu_k \frac{a\zeta + b}{\zeta - s_k} \right). \quad (9)$$

Приравнявая производные (8) и (9), приходим к равенству

$$-C\zeta \prod_{k \neq 0} (\zeta - s_k)^{\nu_k} \sum_{k \neq 0} \frac{\nu_k}{\zeta - s_k} \dot{s}_k = - \prod_{k \neq 0} (\zeta - s_k)^{\nu_k} \left(a + \sum_{k \neq 0} \nu_k \frac{a\zeta + b}{\zeta - s_k} \right),$$

откуда

$$C \sum_{k \neq 0} \nu_k \dot{s}_k \frac{\zeta}{\zeta - s_k} = a + \sum_{k \neq 0} \nu_k \frac{a\zeta + b}{\zeta - s_k}.$$

Последнее есть равенство рациональных функций. Приравнявая их вычеты во всех точках s_k , $k \neq 0$, получаем $C s_k \dot{s}_k = a s_k + b$. Учитывая значения параметров a и b , из (7) имеем

$$C s_k \dot{s}_k = \frac{C}{2N+1} s_k \sum_{j \neq 0} \nu_j \dot{s}_j + |\dot{S}_0| / \prod_{l \neq 0} |s_l|^{\nu_l},$$

или

$$\dot{s}_k - \frac{1}{2N+1} \sum_{j \neq 0} \nu_j \dot{s}_j = \frac{A}{s_k}, \quad (10)$$

где $A = |\dot{S}_0| / \left(C \prod_{k \neq 0} |s_k|^{\nu_k} \right)$.

Соотношения (10) представляют собой систему линейных уравнений относительно производных \dot{s}_k . Суммируя их по k с коэффициентами ν_k , получим

$$\sum_{k \neq 0} \nu_k \frac{A}{s_k} = \sum_{k \neq 0} \nu_k \dot{s}_k - \frac{1}{2N+1} \sum_{j \neq 0} \nu_j \dot{s}_j \sum_{k \neq 0} \nu_k = \frac{1}{2N+1} \sum_{k \neq 0} \nu_k \dot{s}_k,$$

так как $\sum_{k \neq 0} \nu_k = 2N$. С учетом последнего равенства из (10) в итоге находим

$$\dot{s}_k = A \left(\frac{1}{s_k} + \sum_{j \neq 0} \frac{\nu_j}{s_j} \right) \quad (11)$$

или в исходных обозначениях

$$\dot{t}_k = A \left(\frac{1}{t_k} + \sum_{0 < |j| \leq n} \frac{\beta_j}{t_j} + \sum_{l=1}^m \frac{\gamma_l}{\zeta_l} + \sum_{l=1}^m \frac{\gamma_l}{\bar{\zeta}_l} \right), \quad (12)$$

$$\dot{\zeta}_j = A \left(\frac{1}{\zeta_j} + \sum_{0 < |k| \leq n} \frac{\beta_k}{t_k} + \sum_{l=1}^m \frac{\gamma_l}{\zeta_l} + \sum_{l=1}^m \frac{\gamma_l}{\bar{\zeta}_l} \right), \quad (13)$$

где

$$A = |\dot{z}_0| / \left(C \prod_{0 < |k| \leq n} |t_k|^{\beta_k} \prod_{j=1}^m |\zeta_j|^{2\gamma_j} \right). \quad (14)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть формула (2) задает семейство конформных отображений $z(\zeta, T)$ верхней полуплоскости на однопараметрическое семейство многоугольных римановых поверхностей, которое получается из некоторой компактной римановой поверхности проведением разреза вдоль ломаной, конец которой движется прямолинейно вдоль звена этой ломаной. Пусть далее параметр T совпадает с длиной этого звена. Тогда акцессорные параметры $t_k = t_k(T)$, $1 \leq |k| \leq n$, $\zeta_j = \zeta_j(T)$, $1 \leq j \leq m$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (12), (13).

Отделяя действительную и мнимую части, можем найти систему для определения t_k , $\xi_j = \operatorname{Re} \zeta_j$, $\eta_j = \operatorname{Im} \zeta_j$:

$$\begin{aligned} \dot{t}_k &= A \left(\frac{1}{t_k} + \sum_{0 < |j| \leq n} \frac{\beta_j}{t_j} + 2 \sum_{l=1}^m \frac{\xi_l}{\xi_l^2 + \eta_l^2} \right), \\ \dot{\xi}_j &= A \left(\frac{\xi_j}{\xi_j^2 + \eta_j^2} + \sum_{0 < |k| \leq n} \frac{\beta_k}{t_k} + 2 \sum_{l=1}^m \frac{\xi_l}{\xi_l^2 + \eta_l^2} \right), \\ \dot{\eta}_j &= -A \frac{\eta_j}{\xi_j^2 + \eta_j^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$A = |\dot{z}_0| / \left(C \prod_{0 < |k| \leq n} |t_k|^{\beta_k} \prod_{j=1}^m (\xi_j^2 + \eta_j^2)^{\gamma_j} \right).$$

3. Существование и единственность решений полученной системы дифференциальных уравнений

Полученная система (12), (13) является нормальной системой дифференциальных уравнений. Выражения, стоящие в правых частях, имеют непрерывные частные производные по s_k на любом отрезке $T \in [\varepsilon_0, 1]$, где $\varepsilon_0 > 0$, следовательно, по теореме существования и единственности решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (см., например, [34]) решение системы существует и единственно на отрезке $T \in [\varepsilon_0, 1]$, если мы зададим значения аксессуарных параметров в любой точке полуинтервала $[\varepsilon_0, 1)$. Однако в момент перехода к новому звену (во время «расщепления» t_0 на новые параметры t_{-1} , t_0 , t_1) при $T = 0$ правые части имеют особенности. Поэтому встает вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши, если мы ищем непрерывное на $[0, 1]$ и дифференцируемое на $(0, 1]$ решение этой системы, задавая значения в точке $T = 0$ так, что $t_{-1}(0) = t_1(0) = 0$.

Докажем, что в момент перехода к новому звену параметры t_{-1} и t_1 удовлетворяют соотношению

$$t_{-1} \sim \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1 + 1} t_1. \quad (16)$$

Без ограничения общности можно считать, что $t_0 = 0$.

Пусть функции $t_k = t_k(T)$, $\zeta_j = \zeta_j(T)$ удовлетворяют системе (12), (13) на достаточно малом полуинтервале $(0, \varepsilon]$ и непрерывны на $[0, \varepsilon]$, причем $t_{-1}(0) = t_1(0) = 0$, остальные $t_k(0) \neq 0$, $\text{Im} \zeta_j(0) > 0$. Будем также предполагать, что $t_{-1}(T) < 0 < t_1(T)$, $0 < T \leq \varepsilon$. За счет изменения ε можно добиться, чтобы $t_k(T) \neq 0$, $\text{Im} \zeta_j(T) > 0$ на $(0, \varepsilon]$. Докажем, что при таких предположениях функции $t_k = t_k(T)$, $\zeta_j = \zeta_j(T)$ определяются единственным образом, и выясним асимптотику функций $t_{-1}(T)$ и $t_1(T)$ при $T \rightarrow 0+$.

Для этого запишем уравнения для $t_{-1}(T)$ и $t_1(T)$:

$$\dot{t}_1 = A \left(\frac{1 + \beta_1}{t_1} + \frac{\beta_{-1}}{t_{-1}} + \sum_{2 \leq |j| \leq n} \frac{\beta_j}{t_j} + \sum_{l=1}^m \frac{\gamma_l}{\zeta_l} + \sum_{l=1}^m \frac{\gamma_l}{\bar{\zeta}_l} \right), \quad (17)$$

$$\dot{t}_{-1} = A \left(\frac{\beta_1}{t_1} + \frac{1 + \beta_{-1}}{t_{-1}} + \sum_{2 \leq |j| \leq n} \frac{\beta_j}{t_j} + \sum_{l=1}^m \frac{\gamma_l}{\zeta_l} + \sum_{l=1}^m \frac{\gamma_l}{\bar{\zeta}_l} \right). \quad (18)$$

Пусть

$$\tau(T) = \int_0^T \frac{A(\xi) d\xi}{t_1(\xi) t_{-1}(\xi)}, \quad (19)$$

если этот несобственный интеграл сходится, и

$$\tau(T) = \int_\varepsilon^T \frac{A(\xi) d\xi}{t_1(\xi) t_{-1}(\xi)},$$

если он расходится. Тогда

$$\frac{d\tau}{dT} = \frac{A}{t_1 t_{-1}} \quad (20)$$

и, принимая τ за новую переменную, получаем с учетом того, что $\beta_{-1} = -\beta_1$,

$$\frac{dt_1}{d\tau} = (1 + \beta_1) t_{-1} - \beta_1 t_1 + O(t_1 t_{-1}), \quad (21)$$

$$\frac{dt_{-1}}{d\tau} = \beta_1 t_{-1} + (1 - \beta_1)t_1 + O(t_1 t_{-1}), \quad (22)$$

где $\tau \rightarrow 0+$ в случае, если интеграл (19) сходится, и $\tau \rightarrow -\infty$, если расходится. Поведение траекторий полученной системы можно исследовать с помощью качественной теории дифференциальных уравнений (см, например, [36, гл. 1, § 1]). Составляя характеристическое квадратное уравнение $(1 - \beta_1) + 2\beta_1 x - (1 + \beta_1)x^2 = 0$ и решая его, получаем, что уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = (\beta_1 - 1)/(\beta_1 + 1) < 0 \quad (23)$$

и $x_2 = 1 > 0$. Поскольку эти корни имеют разные знаки, заключаем, что существует ровно две траектории системы, проходящих через начало координат. Принимая во внимание то, что $t_{-1} < 0$, $t_1 > 0$, получаем, что возможен только первый случай и $t_{-1} \sim x_1 t_1$ при приближении к началу координат. Таким образом, имеет место (16).

С помощью соотношений (21), (22) находим, что в окрестности начала координат $t_1 \sim ce^{-\tau}$, $t_{-1} \sim cx_1 e^{-\tau}$. Поэтому при стремлении t_{-1} и t_1 к нулю τ стремится к $-\infty$. При этом величина

$$|t_1|^{\beta_1} |t_{-1}|^{\beta-1} = \left| \frac{t_1}{t_{-1}} \right|^{\beta_1} \rightarrow \left(\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1} \right)^{\beta_1} \neq 0,$$

а значит,

$$A^{-1} \rightarrow A^{-1}(0) := C \left(\frac{1 + \beta_1}{1 - \beta_1} \right)^{\beta_1} \prod_{2 \leq |k| \leq n} |t_k(0)|^{\beta_k} \prod_{j=1}^m |\zeta_j(0)|^{2\gamma_j}$$

и из (20) вытекает, что

$$T \sim \frac{c^2 |x_1| e^{-2\tau}}{2A(0)}, \quad \tau \rightarrow -\infty,$$

откуда

$$\frac{t_1(T)}{\sqrt{T}} \rightarrow \sqrt{\frac{2A(0)}{|x_1|}}, \quad \frac{t_{-1}(T)}{\sqrt{T}} \rightarrow -\sqrt{2A(0)|x_1|}. \quad (24)$$

Для доказательства единственности решения системы (12), (13) запишем ее в другом виде. Из (17) и (18) следует, что

$$\frac{d(t_1 - t_{-1})}{dT} = A \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_{-1}} \right),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d(t_k - \beta_1(t_1 - t_{-1}))}{dT} &= A \left(\frac{1}{t_k} + \sum_{2 \leq |j| \leq n} \frac{\beta_j}{t_j} + 2 \sum_{l=1}^m \frac{\xi_l}{\xi_l^2 + \eta_l^2} \right), \\ \frac{d(\xi_j - \beta_1(t_1 - t_{-1}))}{dT} &= A \left(\frac{\xi_j}{\xi_j^2 + \eta_j^2} + \sum_{2 \leq |k| \leq n} \frac{\beta_k}{t_k} + 2 \sum_{l=1}^m \frac{\xi_l}{\xi_l^2 + \eta_l^2} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что правые части полученных уравнений не имеют особенностей в начальный момент времени $T = 0$. Вводя новые функции $\tilde{t}_k = t_k - t_k(0) - \beta_1(t_1 - t_{-1})$, $2 \leq |k| \leq n$, и $\tilde{\xi}_j = \xi_j - \xi_j(0) - \beta_1(t_1 - t_{-1})$, $1 \leq j \leq m$, $\tilde{\eta}_j = \eta_j - \eta_j(0)$ и делая замену переменных согласно (20), получаем систему вида

$$\frac{dt_1}{d\tau} = (1 + \beta_1)t_{-1} + \beta_{-1}t_1 + t_{-1}t_1 f_1(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{n}),$$

$$\begin{aligned}\frac{dt_{-1}}{d\tau} &= \beta_1 t_{-1} + (1 + \beta_{-1})t_1 + t_{-1}t_1 f_{-1}(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{n}), \\ \frac{d\tilde{t}_k}{d\tau} &= t_{-1}t_1 f_k(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{n}), \quad 2 \leq |k| \leq n, \\ \frac{d\tilde{\xi}_j}{d\tau} &= t_{-1}t_1 g_j(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{n}), \quad \frac{d\tilde{\eta}_j}{dT} = t_{-1}t_1 h_j(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{n}), \quad 1 \leq j \leq m,\end{aligned}$$

где $\mathbf{t} = (t_{\pm 1}, \tilde{t}_{\pm 1}, \dots, \tilde{t}_{\pm n})$, $\mathbf{e} = (\tilde{\xi}_1 \dots, \tilde{\xi}_m)$, $\mathbf{n} = (\tilde{\eta}_1 \dots, \tilde{\eta}_m)$, а функции $f_k(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{n})$, $g_k(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{n})$ и $h_k(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{n})$ аналитические в окрестности нуля. Из аналитичности этих функций следует, что поведение решений системы такое же, как и для линейной системы, которая получается из данной заменой функций $f_k(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{n})$, $g_k(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{n})$ и $h_k(\mathbf{t}, \mathbf{e}, \mathbf{n})$ тождественными нулями. По сути дела ситуация сводится к исследованию автономной динамической системы на плоскости. Из проведенного выше анализа следует, что существует ровно одна траектория этой системы, удовлетворяющая условиям $t_{-1} < 0$, $t_1 > 0$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть даны действительные числа t_k^0 , $0 < |k| \leq n$, такие, что

$$t_{-n}^0 < t_{-n+1}^0 < \dots < t_{-1}^0 = 0 = t_1^0 < \dots < t_{n-1}^0 < t_n^0,$$

и комплексные числа ζ_j^0 , $1 \leq j \leq m$, лежащие в верхней полуплоскости. Система (12), (13) на достаточно малом полуинтервале $(0, \varepsilon]$ имеет ровно одно решение, удовлетворяющее условиям: 1) оно непрерывно на $[0, \varepsilon]$; 2) удовлетворяет начальным условиям $t_k(0) = t_k^0$, $\zeta_j(0) = \zeta_j^0$; 3) $t_{-1}(T) < 0 < t_1(T)$, $T \in (0, \varepsilon]$. При $T \rightarrow 0+$ функции $t_{\pm 1}$ имеют асимптотику (24), где x_1 определено в (23).

Отметим в заключение, что асимптотику (24) можно получить из геометрических соображений, записывая равенство длин сторон ломаной, которые стремятся к нулю (см. [29]).

4. Нахождение аксессуарных параметров при движении по последнему звену

Итак, нами была получена система для определения аксессуарных параметров и доказаны существование и единственность решения этой системы. Следует отметить, что на последнем p -м этапе данную систему необходимо преобразовать. Дело в том, что когда конец разреза обходит всю ломаную и замыкается на себя, соответствующее семейство римановых поверхностей имеет два ядра: одно представляет собой нужную многоугольную область D , а второе D_1 является дополнением D до компактной римановой поверхности, из которой мы вырезаем D , разрезанное вдоль луча, идущего из бесконечности до границы ∂D . С использованием теоремы 14.6 из [31] о сходимости конформных отображений односвязных римановых поверхностей, нормированных в трех граничных точках (простых концах) можно сделать вывод, что предельное отображение сходится к конформному отображению верхней полуплоскости не на D , а на другое, дополнительное ядро D_1 . При этом согласно теореме 14.5 из [31] точки s_k , $1 \leq k \leq n$ сходятся к нулю.

Чтобы при движении разреза по последнему звену функции сходились к нужному нам отображению, сделаем перепараметризацию. Ранее мы получили систему (11) относительно переменных s_j . Перейдем от них к новым переменным ω_j с помощью конформного отображения

$$\omega = \frac{L}{s_n - s}, \quad \text{где } L = M(s_n - s_{n-1}), \quad M \equiv \text{const} > 0.$$

Величина M может влиять на точность и скорость вычислений, поэтому нам представляется полезным наличие возможности ее свободного задания.

Рассмотрим результат замены переменных $\omega = \omega(s)$. Бесконечно удаленная точка плоскости s перейдет в нуль плоскости ω ; s_n и s_{n-1} перейдут в константы $\omega_n = \infty$ и $\omega_{n-1} = 1$ соответственно. При этом прообраз подвижного конца $\omega_0 = L/s_n$ станет переменным, величина L также зависит от параметра T .

Запишем, используя приведенные выше равенства,

$$s = \frac{L}{\omega_0} - \frac{L}{\omega}, \quad s_n = \frac{L}{\omega_0}, \quad s_{n-1} = \frac{L}{\omega_0} - \frac{L}{M}.$$

Изучим поведение L . Оценим логарифмическую производную

$$\frac{d \ln L}{dT} = \frac{\dot{s}_n - \dot{s}_{n-1}}{s_n - s_{n-1}} = -\frac{A}{s_n s_{n-1}} < 0.$$

Таким образом, L строго монотонно убывает. Выше отмечалось, что аксессуарные параметры s_k с индексами k от 1 до n сходятся к $s_0 = 0$. Таким образом, L уменьшается с величины $M(s_n(0) - s_{n-1}(0))$ до 0. Поэтому в качестве параметра вместо T можно взять L или $\ln L$.

Изучим, как будут вести себя ω_k . Вычислим логарифмические производные. Для прообраза конца разреза имеем

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \omega_0}{dT} &= \frac{d}{dT} \ln \frac{L}{s_n} = -\frac{A}{s_n s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} \frac{ds_n}{dT} = -\frac{A}{s_n s_{n-1}} - \frac{A}{s_n} \left(\frac{1}{s_n} + \sum_{k \neq 0} \frac{\nu_k}{s_k} \right) = \\ &= \frac{d \ln L}{dT} \left((1 + \nu_{n-1}) + (1 + \nu_n) \frac{M - \omega_0}{M} + \sum_{k \neq 0, n-1, n} \nu_k \frac{\omega_k (M - \omega_0)}{M(\omega_k - \omega_0)} \right). \end{aligned}$$

При $j \neq 0, n-1, n$

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \omega_j}{dT} &= \frac{d}{dT} \ln \frac{L}{s_n - s_j} = -\frac{A}{s_n s_{n-1}} - \frac{1}{s_n - s_j} (\dot{s}_n - \dot{s}_j) = \\ &= -\frac{A}{s_n s_{n-1}} \left(1 - \frac{s_{n-1}}{s_j} \right) = \frac{d \ln L}{dT} \frac{s_j - s_{n-1}}{s_j} = \frac{d \ln L}{dT} \frac{\omega_0 (\omega_j - M)}{M(\omega_j - \omega_0)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dT} &= -\frac{\omega_0^{2N+2}}{L^{2N+1} (1 - \omega_0/M)^{1+\nu_{n-1}} \prod_{j \neq 0, n-1, n} (1 - \omega_0/\omega_j)^{\nu_j}}, \\ \frac{d\omega_0}{dT} &= \frac{\omega_0}{L} \left[(1 + \nu_{n-1}) + (1 + \nu_n) \left(1 - \frac{\omega_0}{M} \right) + \sum_{k \neq 0, n-1, n} \nu_k \frac{1 - \omega_0/M}{1 - \omega_0/\omega_j} \right] \frac{dL}{dT}, \\ \frac{d\omega_k}{dT} &= \frac{\omega_k}{L} \cdot \frac{1 - \omega_k/M}{1 - \omega_k/\omega_0} \cdot \frac{dL}{dT}. \end{aligned}$$

Исключая T , перейдем к системе по параметру L

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_0}{dL} &= \frac{\omega_0}{L} \left[(1 + \nu_{n-1}) + (1 + \nu_n) \left(1 - \frac{\omega_0}{M} \right) + \sum_{k \neq 0, n-1, n} \nu_k \frac{1 - \omega_0/M}{1 - \omega_0/\omega_j} \right], \\ \frac{d\omega_k}{dL} &= \frac{\omega_k}{L} \cdot \frac{1 - \omega_k/M}{1 - \omega_k/\omega_0}, \end{aligned} \quad (25)$$

при L , изменяющемся от M до 0.

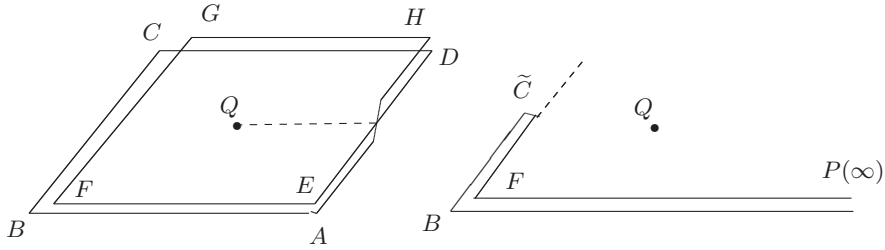


Рис. 2

После интегрирования системы (25) искомые акцессорные параметры t_k можно получить как пределы

$$\lim_{L \rightarrow 0+} \left(\frac{L}{\omega_0(L)} - \frac{L}{\omega_k(L)} \right) = \left(\frac{dL}{d\omega_0} - \frac{dL}{d\omega_k} \right) \Big|_{L=0},$$

при этом, при вычислении последних выражений можно использовать (25). Отметим, что акцессорные параметры, соответствующие «внешним» вершинам и концу разреза, будут стремиться к нулю при $L \rightarrow 0+$.

Замечание. На практике при применении предложенного метода имеет смысл разбить вычисления при движении разреза по последней на два шага. Сначала методом, предложенным в предыдущих пунктах, находим конформное отображение в случае, когда конец разреза проходит часть последней стороны, например, половину. Затем применяем перепараметризацию и проводим расчеты, когда конец разреза движется по оставшейся части последней стороны. Этот прием позволяет избежать на последнем этапе ситуации, когда правые части дифференциальных уравнений системы имеют особенности в начальный момент времени и не прибегать к дополнительным исследованиям.

5. Пример. Построение конформного отображения полуплоскости на двулиственный квадрат

Для иллюстрации предложенного метода рассмотрим задачу построения конформного отображения верхней полуплоскости на двулиственный квадрат. Под двулистным квадратом мы понимаем часть римановой поверхности S функции $w = \sqrt{z - z_0}$, $z_0 = (1 + i)/2$, которая расположена над квадратом $K := \{z \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ и является восьмиугольником с вершинами A, B, C, D, E, F, G и H . Эта поверхность имеет единственную точку ветвления Q , расположенную над точкой z_0 , а ее край проектируется в границу квадрата K , проходящую дважды (рис. 2).

При вычислениях мы использовали пакет Mathematica 8.0.

Сначала построим конформное отображение верхней полуплоскости на риманову поверхность, которая получается из S проведением разреза вдоль луча PB , лежащего над \mathbb{R}_+ ; здесь P – точка поверхности S , расположенная над бесконечностью. Оно имеет вид

$$z = \int_0^\zeta \omega(\omega - \zeta_1)(\omega - \bar{\zeta}_1) d\omega = \frac{\zeta^4}{4} - \frac{2 \operatorname{Re} \zeta_1 \zeta^3}{3} + \frac{|\zeta_1|^2 \zeta^2}{2}.$$

Подберем $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ из условия $z(\zeta_1) = (1 + i)/2$. Отделяя действительную и мнимую части в этом равенстве, получаем систему

$$\frac{\xi_1^4}{12} + \frac{\xi_1^2 \eta_1^2}{2} - \frac{\eta_1^4}{4} = 0.5, \quad \frac{2\xi_1 \eta_1^3}{3} = 0.5.$$

Решая ее численно, находим

$$\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 = 1.14868\dots + i0.867536\dots \quad (26)$$

Далее составляем систему дифференциальных уравнений для аксессуарных параметров, соответствующих семейству конформных отображений верхней полуплоскости на S с разрезом вдоль луча и части стороны BC . Она содержит два неизвестных вещественных параметра $t_{-1}^{(1)}$ и $t_1^{(1)}$ и один комплексный ζ_1^1 (верхний индекс означает номер этапа). В результате решения задачи Коши для этой системы на отрезке $[0, 1]$ (так как длина стороны квадрата равна единице) с начальными условиями $t_{-1}^{(1)}(0) = t_1^{(1)}(0) = 0$, $\zeta_1^1(0) = \zeta_1$, где ζ_1 определено равенством (26), в конечный момент времени находим значения

$$\begin{aligned} t_{-1}^{(1)}(1) &= -1.121429\dots, & t_1^{(1)}(1) &= 1.069843\dots, \\ \zeta_1^1(1) &= 1.180289\dots + i0.581695\dots \end{aligned} \quad (27)$$

На втором этапе число вещественных параметров увеличивается на два, обозначим их через $t_{-2}^{(2)}$, $t_{-1}^{(2)}$, $t_1^{(2)}$ и $t_2^{(2)}$. Неизвестный комплексный параметр обозначим через $\zeta_1^{(2)}$. Снова составляем систему дифференциальных уравнений и решаем задачу Коши с начальными условиями $t_{-1}^{(2)}(0) = t_1^{(2)}(0) = 0$, $t_{-2}^{(2)}(0) = t_{-1}^{(1)}(1)$, $t_2^{(2)}(0) = t_1^{(1)}(1)$, $\zeta_1^{(2)}(0) = \zeta_1^1(1)$. В результате решения получаем значения $t_k^2(1)$, $1 \leq |k| \leq 2$, и $\zeta_1^{(2)}(1)$, которые служат начальными данными для аксессуарных параметров $t_{k+1}^{(3)}$, $1 \leq |k| \leq 2$, и $\zeta_1^{(3)}$ на третьем этапе:

$$\begin{aligned} t_{-1}^{(2)}(1) &= -1.263836\dots, & t_1^{(2)}(1) &= 0.858538\dots, \\ t_{-2}^{(2)}(1) &= -2.010500\dots, & t_2^{(2)}(1) &= 1.049310\dots, \\ \zeta_1^{(2)}(1) &= 1.017500\dots + i0.349476\dots \end{aligned} \quad (28)$$

Продолжаем этот процесс, обходя все стороны восьмиугольника и включая последнюю, которую проходим до середины. В итоге получаем значения параметров

$$\begin{aligned} t_{-1}^{(7)}(-0.5) &= -0.075178\dots, & t_{-2}^{(7)}(-0.5) &= -0.463251\dots, \\ t_{-3}^{(7)}(-0.5) &= -1.1529\dots, & t_{-4}^{(7)}(-0.5) &= -2.04833\dots, \\ t_{-5}^{(7)}(-0.5) &= -3.01524\dots, & t_{-6}^{(7)}(-0.5) &= -3.90604, & t_{-7}^{(7)}(-0.5) &= -4.58132\dots, \\ t_1^{(7)}(-0.5) &= 0.002852\dots, & t_2^{(7)}(-0.5) &= 0.00319721\dots, \\ t_3^{(7)}(-0.5) &= 0.003306\dots, & t_4^{(7)}(-0.5) &= 0.003374\dots, \\ t_5^{(7)}(-0.5) &= 0.003438\dots, & t_6^{(7)}(-0.5) &= 0.003519\dots, & t_7^{(7)}(-0.5) &= 0.003686\dots, \\ \zeta_1^7(1) &= 0.003390\dots + i0.000157\dots \end{aligned}$$

Наконец, на заключительном этапе мы используем систему, описанную в п. 4. Окончательно находим, что отображение верхней полуплоскости на двулиственный квадрат имеет вид

$$z = C \int_0^z \frac{(\omega - w_0)(\omega - \bar{w}_0)d\omega}{\sqrt{\prod_{k=1}^6 (\omega - \omega_k)}}. \quad (29)$$

где параметры ω_k и w_0

$$\begin{aligned} \omega_1 = 1758.13\dots, \quad \omega_2 = 2486.37\dots, \quad \omega_3 = 3001.32\dots, \quad \omega_4 = 3516.27\dots, \\ \omega_5 = 4244.51\dots, \quad \omega_6 = 6002.64\dots, \quad w_0 = 3001.32\dots + i 1243.18\dots \end{aligned} \quad (30)$$

Константа C может быть найдена из условия, что длина сторон ломаной известна и равна единице, например, из равенства

$$C \int_0^{\omega_1} \frac{|\omega - w_0|^2 d\omega}{\sqrt{\prod_{k=1}^6 (\omega_k - \omega)}} = 1,$$

откуда

$$C = 19.0170\dots \quad (31)$$

Численные расчеты дают весьма неплохие результаты: обобщенный интеграл Кристоффеля–Шварца (29) с полученными параметрами (30), (31) дает конформное отображение на двулиственный многоугольник, положение вершин и точки ветвления которого отличаются от заданных на величины порядка 10^{-6} .

Литература

1. *Christoffel E.B.* Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie // *Ann. Mat. Pura Appl. Ser. II.* – 1867. – V. 1. – P. 89–103.
2. *Schwarz H.A.* Ueber einige Abbildungsaufgaben // *J. Reine Angew. Math.* – 1869. – V. 70. – P. 105–120.
3. *Лаврентьев М.А.* Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 160 с.
4. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 716 с.
5. *Weinstein A.* Der Kontinuitatsbeweis des Abbildungssatzes fur Polygone // *Math. Z.* – 1924. – V. 19. – P. 72–84.
6. *Weinstein A.* Ein hydrodynamischer Unitatsatz // *Math. Z.* – 1924. – V. 19. – P. 265–274.
7. *Bergmann S.* Ueber die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Periodizitatsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators // *Math. Z.* – 1923. – V. 19. – P. 8–25.
8. *Bergmann S.* Ueber die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Einphasen-Transformator // *Z. Angew. Math. Mech.* – 1925. – V. 5. – P. 319–331.
9. *Голузин Г.М., Канторович Л.В., Крылов В.И., Мелентьев П.В., Муратов М.И., Стенин Н.П.* Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. – М.-Л.: Гостехиздат, 1937. – 105 с.
10. *Хара И.С.* Об одном методе приближенного конформного отображения многоугольных областей на единичный круг // *Докл. АН УССР.* – 1953. – № 4. – С. 289–293.
11. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. – М.: Иностран. лит., 1963. – 406 с.
12. *Фильчаков П.Ф.* Определение констант интеграла Кристоффеля–Шварца при помощи обобщенных степенных рядов // *Некоторые приложения математики и механики. К 60-летию акад. М.А. Лаврентьева.* – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1961. – С. 236–252.

13. *Driskoll T.A., Treffethen L.N.* Schwarz–Christoffel Mapping. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. – 132 p.
14. *Paranmichael N., Stylianopoulos N.S.* Numerical conformal mapping: domain decomposition and the mapping of quadrilaterals. – New Jersey–London–Singapore: World Scientific, 2010. – 241 p.
15. *Wegmann R.* Methods for numerical conformal mapping // Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, V. 2 / Ed. by R. Kühnau. – Amsterdam: Elsevier, 2005. – P. 351–477.
16. *Driscoll T.A.* A MATLAB Toolbox for Schwarz–Christoffel mapping methods. – URL: www.math.udel.edu/~driscoll/SC.
17. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
18. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 344 с.
19. Труды П.П. Куфарева: к 100-летию со дня рождения / Под общ. ред. И.А. Александрова. – Томск: Изд-во науч.-техн. лит., 2009. – С. 86–88.
20. *Чистяков Ю.В.* Об одном способе приближенного определения функции, конформно отображающей круг на области, ограниченные дугами окружностей и отрезками прямых // Учен. зап. Том. ун-та. – 1960. – № 14. – С. 143–151.
21. *Гутлянский В.Я., Зайдан А.О.* О конформных отображениях полигональных областей // Укр. матем. журн. – 1993. – Т. 45, № 11. – С. 1484–1494.
22. *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. – Киев: Наукова думка, 2011. – 428 с.
23. *Hopkins T.R., Roberts D.E.* Kufarev’s method for determination the Schwarz–Christoffel parameters // Numer. Math. – 1979. – V. 33, No 4. – P. 353–365.
24. *Низамиева Л.Ю.* Нахождение аксессуарных параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца методом движущегося разреза // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2009. – Т. 38. – С. 192–194.)
25. *Низамиева Л.Ю.* О нахождении аксессуарных параметров в интеграле Кристоффеля–Шварца // Потребительская кооперация: теория, методология, практика: Материалы Междунар. науч.-практ. конф. – М.: Рос. ун-т кооперации, 2010. – С. 313–319.
26. *Низамиева Л.Ю.* Внутренние и внешние смешанные обратные краевые задачи по параметру x : Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Казань, 2011. – 102 с.
27. *Безродных С.И., Власов В.И.* Сингулярная задача Римана–Гильберта в сложных областях // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – Т. 54, № 12. – С. 1904–1953.
28. *Колесников И.А.* Конформные отображения канонических областей на области с симметрией: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск, 2014. – 106 с.
29. *Накипов Н.Н., Насыров С.Р.* Асимптотика аксессуарных параметров в обобщенном интеграле Кристоффеля–Шварца и решение одного операторного уравнения // Сборник науч. ст. Казан. ун-та 2012 г. По результатам конкурса на лучшую научную работу студентов и по материалам итоговой научной конференции студентов 2012 г. – Казань: Казан. ун-т, 2012. – С. 43–46.
30. *Накипов Н.Н., Насыров С.Р.* Определение аксессуарных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля–Шварца // Материалы Воронежской зимней матем. шк. «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (г. Воронеж, 27 янв. – 2 февр. 2013 г.). – Воронеж: ВГУ, 2013. – С. 157–159.

31. *Насыров С.Р.* Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей. – Казань: Магариф, 2008. – 276 с.
32. *Насыров С.Р.* Нахождение полинома, униформизирующего данную компактную риманову поверхность // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91, Вып. 4. – С. 597–607.
33. *Насыров С.Р., Фаизов И.З.* Локальная единственность решения смешанной обратной краевой задачи на полигональных римановых поверхностях с простыми точками ветвления // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 48, кн. 2. – С. 97–108.
34. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 331 с.
35. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
36. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1947. – 448 с.

Поступила в редакцию
18.01.16

Накипов Нияз Наилевич, аспирант кафедры математического анализа

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *niyazn@yandex.ru*

Насыров Семен Рафаилович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *snasyrov@kpfu.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 2, pp. 202–220

A Parametric Method of Finding Accessory Parameters for the Generalized Schwarz–Christoffel Integrals

*N.N. Nakipov**, *S.R. Nasyrov***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: **niyazn@yandex.ru*, ***snasyrov@kpfu.ru*

Received January 18, 2016

Abstract

An approximate method of finding accessory parameters for the generalized Schwarz–Christoffel integrals has been suggested. The integrals provide conformal mappings of a half-plane onto the polygonal Riemann surfaces with inner branch points. The method is based on including the desired map into a one-parametric family of conformal mappings of the upper

half-plane onto the Riemann surfaces which are obtained from some fixed Riemann surface by cutting it along an elongated polygonal slit. A system of ordinary differential equations for parameters of the Schwarz–Christoffel integrals, i.e., for the preimages of their vertexes and branch points, has been deduced. Application of the method consists in solving a number of successive Cauchy problems describing the process of moving of the end of the slit along the chains of the polygon. The solution obtained in the previous step forms the initial data for the Cauchy problem in the next step. A numeric example illustrating the method has been considered. For univalent mappings, a similar method was first suggested by P.P. Kufarev.

Keywords: Schwarz–Christoffel integrals, multivalent functions, parametric method

References

1. Christoffel E.B. Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie. *Ann. Mat. Pura Appl. Ser. II*, 1867, vol. 1, pp. 89–103.
2. Schwarz H.A. Ueber einige Abbildungsaufgaben, *J. Reine Angew. Math.*, 1869, vol. 70, pp. 105–120.
3. Lavrent'ev M.A. Conformal Transformations with Applications to Certain Problems of Mechanics. Moscow–Leningrad, Gostekhizdat, 1946. 160 p. (In Russian)
4. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Methods of the Theory of Functions of Complex Variable. Moscow, Nauka, 1965. 716 p. (In Russian)
5. Weinstein A. Der Kontinuitätsbeweis des Abbildungssatzes für Polygone. *Math. Z.*, 1924, vol. 19, pp. 72–84.
6. Weinstein A. Ein hydrodynamischer Unitätsatz. *Math. Z.*, 1924, vol. 19, pp. 265–274.
7. Bergmann S. Ueber die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Periodizitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators. *Math. Z.*, 1923, vol. 19, pp. 8–25.
8. Bergmann S. Ueber die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Einphasen-Transformator. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1925, vol. 5, pp. 319–331.
9. Goluzin G.M., Kantorovich L.V., Krylov V.I., Melent'ev P.V., Muratov M.I., Stenin N.P. Conformal Mapping of Simply- and Multiply-Connected Domains. Moscow–Leningrad, Gostekhizdat, 1937. 105 p. (In Russian)
10. Khara I.S. On a Method of Approximate Conformal Mapping of Polygonal Regions on the Unit Circle. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, 1953, no. 4, pp. 289–293. (In Russian)
11. Koppenfels W., Stallman F. The Practice of Conformal Mappings. Moscow, Inostr. Lit., 1963. 406 p. (In Russian)
12. Fil'chakov P.F. Determination of the constants of the Schwarz–Christoffel integral by means of generalized power series. *Nekotorye prilozheniya matematiki i mekhaniki. K 60-letiyu akad. M.A. Lavrent'eva* [Certain Problems in Mathematics and Mechanics. On the 60th Anniversary of M.A. Lavrent'ev]. Novosibirsk, Izd. Sib. Otd. Akad. Nauk SSSR, 1961, pp. 236–252. (In Russian)
13. Driskoll T.A., Treffethen L.N. Schwarz–Christoffel Mapping. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2002. 132 p.
14. Papamichael N., Stylianopoulos N.S. Numerical conformal mapping: domain decomposition and the mapping of quadrilaterals. New Jersey–London–Singapore, World Scientific, 2010. 241 p.
15. Wegmann R. Methods for numerical conformal mapping. *Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory*. Vol. 2. Kühnau R. (Ed.). Amsterdam, Elsevier, 2005, pp. 351–477.
16. Driscoll T.A. A MATLAB Toolbox for Schwarz–Christoffel mapping methods. Available at: www.math.udel.edu/~driscoll/SC.
17. Goluzin G.M. Geometric Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow, Nauka, 1966. 628 p. (In Russian)
18. Alkesandrov I.A. Parametrical Extensions in the Theory of Univalent Functions. Moscow, Nauka, 1976. 344 p. (In Russian)
19. Transactions of P.P. Kufarev: On the 100th Anniversary of Birth. Aleksandrov I.A. (Ed.). Tomsk, Izd. Nauchno-Tekh. Lit., 2009, pp. 86–88. 372 p. (In Russian)
20. Chistyakov Yu.V. On a method of approximate computation of the function mapping conformally the circle onto domains limited by circular arcs and straight line segments. *Uch. Zap. Tomsk. Univ.*, 1960, no. 14, pp. 143–151. (In Russian)

21. Gutlyanskii V.Ya., Zaidan A.O. On conformal mapping of polygonal regions. *Ukr. Math. J.*, 1993, vol. 45, no. 11, pp. 1669–1680.
22. Gutlyanskii V.Ya., Ryazanov V.I. The Geometric and Topological Theory of Functions and Mappings. Kiev, Naukova Dumka, 2011. 428 p. (In Russian)
23. Hopkins T.R., Roberts D.E. Kufarev's method for determination the Schwarz–Christoffel parameters. *Numer. Math.*, 1979, vol. 33, no. 4, pp. 353–365.
24. Nizamieva L.Yu. Finding accessory parameters in the Schwarz–Christoffel integral by the method of moving section. *Tr. Mat. Tsentra im. N.I. Lobachevskogo, T. 38. Teoriya funktsii, ee prilozheniya i smezhnye voprosy: Materialy 9-i Mezhdunar. kazanskoi letnei nauch. shk.-konf.* [Proc. N.I. Lobachevskii Math. Cent., vol. 38. Theory of Functions, Its Applications, and Related Problems: Proc. 9th Int. Kazan. Summer Sci. Sch.-Conf.]. Kazan, Kazan. Mat. O-vo, 2009, pp. 192–194. (In Russian)
25. Nizamieva L.Yu. Finding accessory parameters in the Schwarz–Christoffel integral. *Potrebitel'skaya kooperatsiya: teoriya, metodologiya, praktika: Materialy Mezhdunar. nauch.-prakt. konf.* [Consumer Cooperation: Theory, Methodology, Practice: Proc. Int. Sci.-Pract. Conf.]. Moscow, Ross. Univ. Koop., 2010, pp. 313–319. (In Russian)
26. Nizamieva L.Yu. Internal and external mixed inverse boundary value problems for the parameter x . *Cand. Phys.-Math. Sci. Diss.* Kazan, 2011. 102 p. (In Russian)
27. Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I. Singular Riemann–Hilbert problem in complex-shaped domains. *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 54, no. 12, pp. 1826–1875.
28. Kolesnikov I.A. Conformal mappings of canonical domains onto domains with symmetry. *Cand. Phys.-Math. Sci.*, Tomsk, 2014. 106 p. (In Russian)
29. Nakipov N.N., Nasyrov S.R. Asymptotics of accessory parameters in the generalized Schwarz–Christoffel integral and solution to one operator equation. *Sbornik nauch. st. Kazan. un-ta 2012 g. Po rezul'tatam konkursa na luchshuyu nauchnyu rabotu studentov i po materialam itogovoi nauchnoi konferentsii studentov 2012 g.* [Collection of Scientific Articles of Kazan University, 2012. Based on the Results of the Competition for the Best Scientific Work between Students and the Materials of the Final Scientific Conference of Students of 2012]. Kazan, Kazan. Univ., 2012, pp. 43–46. (In Russian)
30. Nakipov N.N., Nasyrov S.R. Finding accessory parameters in the generalized Schwarz–Christoffel integrals. *Materialy Voronezhskoi zimnei matem. shk. "Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy" (g. Voronezh, 27 yanv. – 2 fevr. 2013 g.)* [Proc. Voronezh. Winter Math. Sch. "Modern Methods of the Theory of Functions and Related Problems" (Voronezh, January 27–February 2, 2013)]. Voronezh, VGU, 2013, pp. 157–159. (In Russian)
31. Nasyrov S.R. Geometric Problems in Theory of Ramified Coverings of Riemann Surfaces. Kazan, Megarif, 2008. 276 p. (In Russian)
32. Nasyrov S.R. Determination of the polynomial uniformizing a given compact Riemann surface. *Math. Notes*, 2012, vol. 91, no. 3, pp. 558–567.
33. Nasyrov S.R., Faizov I.Z. Local uniqueness of solution of a mixed boundary value problem for Riemann surfaces with branch points. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2006, vol. 48, no. 2, pp. 97–108. (In Russian)
34. Pontryagin L.S. Ordinary Differential Equations. Moscow, Nauka, 1974. 331 p. (In Russian)
35. Gakhov F.D. Boundary Value Problems. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (In Russian)
36. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equations. Moscow–Leningrad, GITTL, 1947. 448 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Накипов Н.Н., Насыров С.Р. Параметрический метод нахождения аксессуарных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля–Шварца // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 2. – С. 202–220. ⟩

⟨ **For citation:** Nakipov N.N., Nasyrov S.R. A parametric method of finding accessory parameters for the generalized Schwarz–Christoffel integrals. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 2, pp. 202–220. (In Russian) ⟩