Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2017, №4, с. 43–49 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

О.А. РЕПИН, С.К. КУМЫКОВА

ЗАДАЧА С ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Аннотация. Исследован вопрос однозначной разрешимости внутренней краевой задачи с дробными производными для уравнения смешанного типа второго порядка. При ограничениях типа неравенств на известные функции доказана теорема единственности. Существование решения задачи доказывается путем редукции к уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

Ключевые слова: оператор дробного дифференцирования, гипергеометрическая функция Гаусса, задача Коши, интегральное уравнение Фредгольма.

УДК: 517.946

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & y > 0; \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \alpha(-y)^{m-1} u_y, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

$\alpha = \text{const}$, $0 < m < 2$, в конечной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно и характеристиками $AC : x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0$, $BC : x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1$ уравнения (1).

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, $I \equiv AB$ — единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup I) \cap C^1(\Omega_2 \cup I) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, являющуюся решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{2}$$

$$a(x)D_{0x}^{1-\beta} u[\Theta_0(x)] + b(x)D_{x1}^{1-\beta} u[\Theta_1(x)] + c(x)u(x, 0) + \\ + d(x) \lim_{y\to -0} (-y)^\alpha u_y(x, y) = \gamma(x) \quad \forall x \in I \tag{3}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} u_y(x, y) = \lim_{y\to -0} (-y)^\alpha u_y(x, y), \tag{4}$$

где

$$\beta = \frac{2\alpha - m}{2(2 - m)}, \quad m - 1 < \alpha < \frac{m}{2}, \quad -\frac{1}{2} < \beta < 0,$$

$\varphi_i(y)$, $i = 1, 2$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $\gamma(x)$ — заданные функции, для которых

$$a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) + d^2(x) \ne 0,$$

Поступила 26.09.2015

$$\varphi_i(y) \in C[0,1], \quad a(x),\, b(x),\, c(x),\, d(x),\, \gamma(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^3(I);$$

$\Theta_0(x), \Theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)\in I$ с характеристиками AC, BC соответственно; D^l_{0x}, D^l_{x1} — операторы дробного в смысле Римана–Лиувилля дифференцирования ([1], с. 44; [2], с. 9).

Исследуемая задача относится к классу краевых задач со смещением ([3], с. 29; [4], [5]). Изучение нелокальных задач связано с тем, что подобные граничные условия возникают при математическом моделировании задач газовой динамики, теории плазмы, излучения лазера, при описании процессов диффузии частиц в турбулентной плазме и динамики почвенной влаги. Интерес к двумерным краевым задачам со смещением для уравнений смешанного типа объясняется не только тем, что они обобщают задачу Трикоми, имеют многомерные аналоги, содержат широкий класс корректных самосопряженных задач, но и в связи с многочисленными приложениями уравнений смешанного типа при моделировании процессов синергетического характера.

2. Единственность решения задачи.

Теорема 1. *В области Ω не может существовать более одного решения задачи* (1)–(3)*, если*

$$a(x) = x^{2+\beta} a_1(x), \quad b(x) = (1-x)^{2+\beta} b_1(x), \quad a_1(x), b_1(x) \in C^1(\overline{I}) \cap C^3(I),$$

$$a_2(x) = \frac{a_1(x)}{E(x)}, \quad b_2(x) = \frac{b_1(x)}{E(x)}, \quad c_1(x) = \frac{c(x)}{E(x)},$$

$$E(x) = d(x) - \varkappa_2 \Gamma(1-\beta)[a(x)x^{-\beta} + b(x)(1-x)^{-\beta}] \neq 0,$$

$$a_2(x) > 0, \quad b_2(x) > 0, \quad c_1(x) < 0.$$

Отметим, что при $y < 0$ характеристики уравнения (1) имеют своей огибающей ось $y = 0$, которая является одновременно линией параболического вырождения и характеристикой уравнения. Это обстоятельство существенно отличает уравнение (1) от гиперболических уравнений первого рода.

Поведение решения уравнения (1) в окрестности линии параболического вырождения зависит от коэффициента при u_y в уравнении (1) $(y < 0)$ и показателя m. Решение и его производная u_y могут обращаться в бесконечность на параболической линии. Поэтому вместо задачи Коши в обычной постановке, которая может оказаться некорректной, естественно исследовать видоизмененную задачу Коши.

Хорошо известно ([6], с. 113), что регулярное в области Ω_2 решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \tau(x), \quad \lim_{y\to -0} (-y)^\alpha u_y(x,y) = \nu(x), \quad m-1 < \alpha < m/2, \tag{5}$$

единственно и имеет вид

$$\begin{gathered} u(x,y) = \varkappa_1 \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(2t-1)\right] t^\beta (1-t)^\beta \, dt + \\ + \frac{2\varkappa_1}{(1+2\beta)(2-m)}(-y)^{\frac{2-m}{2}} \int_0^1 \tau'\left[x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(2t-1)\right] t^\beta (1-t)^\beta (2t-1)\, dt - \\ - \left(\frac{2-m}{4}\right)^{2\beta-1} \varkappa_2 (-y)^{1-\alpha} \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(2t-1)\right] t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\, dt, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}, \quad \varkappa_2 = \left(\frac{2-m}{4}\right)^{1-2\beta} \frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Если $\tau(x) \in C^3(0,1)$, $\nu(x) \in C^2(0,1)$, то функция (6) является дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши (5) для уравнения (1).

Используя (6), найдем

$$u[\Theta_0(x)] = \varkappa_1 x^{-1-2\beta} \int_0^x \frac{\tau(\xi)d\xi}{\xi^{-\beta}(x-\xi)^{-\beta}} + \frac{\varkappa_1 x^{-1-2\beta}}{2(1+2\beta)} \left[\int_0^x \frac{\xi^{1+\beta}\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-\beta}} - \right.$$
$$\left. - \int_0^x \frac{(x-\xi)^{1+\beta}\tau'(\xi)d\xi}{\xi^{-\beta}} \right] - \varkappa_2 \int_0^x \xi^{-\beta}(x-\xi)^{-\beta}\nu(\xi)d\xi \quad (7)$$

и

$$u[\Theta_1(x)] = \varkappa_1 (1-x)^{-1-2\beta} \int_x^1 \frac{\tau(\xi)d\xi}{(1-\xi)^{-\beta}(\xi-x)^{-\beta}} + \frac{\varkappa_1 (1-x)^{-1-2\beta}}{2(1+2\beta)} \times$$
$$\times \left[\int_x^1 \frac{(\xi-x)^{1+\beta}\tau'(\xi)d\xi}{(1-\xi)^{-\beta}} - \int_x^1 \frac{(1-\xi)^{1+\beta}\tau'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-\beta}} \right] - \varkappa_2 \int_x^1 (1-\xi)^{-\beta}(\xi-x)^{-\beta}\nu(\xi)d\xi. \quad (8)$$

Подставляя (7), (8) в условие (3) и проводя необходимые вычисления, получим громоздкое функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенное на линию $y = 0$ из области Ω_2,

$$-\frac{\varkappa_1\Gamma(1+\beta)(1+\beta)a_1(x)}{\Gamma(1+2\beta)} \int_0^x \frac{\tau(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} + \frac{\varkappa_1\Gamma(1+\beta)a_1(x)}{\Gamma(1+2\beta)}\, x \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} -$$
$$-\frac{\varkappa_1\Gamma(1+\beta)(1+\beta)a_1(x)}{(1+2\beta)\Gamma(1+2\beta)} \int_0^x \frac{\xi\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} + \frac{\varkappa_1\Gamma(1+\beta)a_1(x)}{2(1+2\beta)\Gamma(1+2\beta)}\, x \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\xi\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} -$$
$$-\varkappa_2\Gamma(1-\beta)x^2 a_1(x)\nu(x) - \frac{\varkappa_1\Gamma(1+\beta)(1+\beta)b_1(x)}{\Gamma(1+2\beta)} \int_x^1 \frac{\tau(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} -$$
$$-\frac{\varkappa_1\Gamma(1+\beta)b_1(x)}{\Gamma(1+2\beta)}(1-x)\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\tau(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} + \frac{\varkappa_1\Gamma(1+\beta)(1+\beta)b_1(x)}{(1+2\beta)\Gamma(1+2\beta)} \int_x^1 \frac{(1-\xi)\tau'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} -$$
$$-\frac{\varkappa_1\Gamma(1+\beta)b_1(x)}{2\Gamma(1+2\beta)(1+2\beta)}(1-x)\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{(1-\xi)\tau'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} +$$
$$+ b_1(x)\Gamma(1-\beta)\varkappa_2(1-x)^2\nu(x) + c(x)\tau(x) + d(x)\nu(x) = \gamma(x). \quad (9)$$

Преобразуем (9) с учетом граничных условий. Нетрудно видеть, что имеют место следующие равенства:

$$\int_0^x \frac{\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\tau(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} - \frac{\varphi_1(0)}{x^{-2\beta}},$$
$$\int_x^1 \frac{\tau'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} = \frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\tau(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} + \frac{\varphi_2(0)}{(1-x)^{-2\beta}}, \quad (10)$$

$$\int_0^x \frac{\xi\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} = -(1+2\beta)\int_0^x \frac{\tau(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} + x\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\tau(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}}, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\xi\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} = -2\beta\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\tau(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} + x\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} + \frac{2\beta\varphi_1(0)}{x^{-2\beta}}, \quad (12)$$

$$\int_x^1 \frac{(1-\xi)\tau'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} = (1+2\beta)\int_x^1 \frac{\tau(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} + (1-x)\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\tau(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}}, \tag{13}$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{(1-\xi)\tau'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} = 2\beta\,\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\tau(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} + (1-x)\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\tau'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} + \frac{2\beta\varphi_2(0)}{(1-x)^{-2\beta}}. \tag{14}$$

Учитывая (10)–(14), после ряда преобразований получим уравнение

$$\mu x^2 a_1(x)\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} - \mu(1-x)^2 b_1(x)\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\tau'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} +$$
$$+ \varkappa_2\Gamma(1-\beta)[(1-x)^2 b_1(x) - x^2 a_1(x)]\nu(x) + c(x)\tau(x) + d(x)\nu(x) = \gamma_1(x),$$

где

$$\gamma_1(x) = \gamma(x) + 2\mu\beta[\varphi_2(0)(1-x)^{1+2\beta}b_1(x) - \varphi_1(0)x^{1+2\beta}a_1(x)], \quad \mu = \frac{1}{2\Gamma(1+\beta)}.$$

Или, что тоже самое,

$$\nu(x) = -\mu a_2(x)x^2\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\tau'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-2\beta}} +$$
$$+ \mu b_2(x)(1-x)^2\,\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{\tau'(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{-2\beta}} - c_1(x)\tau(x) + \gamma_2(x), \tag{15}$$

где $c_1(x) = c(x)/E(x)$, $\gamma_2(x) = \gamma_1(x)/E(x)$.

Полагая в (15) $\gamma(x)\equiv 0$, определим знак $\nu(x)$ в точке $x = x_0$, $0 < x_0 < 1$, положительного максимума функции $\tau(x)$. Для этого преобразуем выражение

$$D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x) = \frac{1}{\Gamma(1+2\beta)}\,\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \tau(t)(x-t)^{2\beta}dt = \frac{1}{\Gamma(1+2\beta)}\,\frac{d}{dx}\int_0^x \tau'(t)(x-t)^{2\beta}dt.$$

Теорема 2 ([7])**.** *Если функция $\tau'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha > -2\beta$ при $0 < x < 1$, то*

$$D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x)|_{x=x_0} = \frac{1}{\Gamma(1+2\beta)}\left\{2\beta\tau(x_0)x_0^{2\beta-1} - 2\beta(1-2\beta)\int_0^{x_0}[\tau(t)-\tau(x_0)](x_0-t)^{2\beta-2}dt\right\}. \tag{16}$$

Аналогично при выполнении условий теоремы 2

$$D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x)|_{x=x_0} = \frac{1}{\Gamma(1+2\beta)}\Bigg\{2\beta\tau(x_0)(1-x_0)^{2\beta-1} -$$
$$- 2\beta(1-2\beta)\int_{x_0}^1[\tau(t)-\tau(x_0)](t-x_0)^{2\beta-2}dt\Bigg\}, \tag{17}$$

где

$$D_{x1}^{1-2\beta}\tau(x) = \frac{1}{\Gamma(1+2\beta)}\,\frac{d}{dx}\int_x^1 \tau'(t)(t-x)^{2\beta}dt.$$

Поскольку $\mu > 0$, то, учитывая условия теоремы 1 и соотношения (16), (17), имеем

$$\nu(x_0) < 0. \tag{18}$$

Аналогично можно показать, что

$$\nu(x_0) > 0, \tag{19}$$

если $x = x_0$, $0 < x_0 < 1$, есть точка отрицательного минимума функции $\tau(x)$.

В области Ω_1 функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$u_{xx} - u_y = 0. \tag{20}$$

Переходя к пределу при $y \to +0$, в силу непрерывности $u_y(x,y)$ в области $\Omega_1 \cup I$ из уравнения (20) получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на линии вырождения $y=0$ уравнения (1)

$$\tau''(x) - \nu(x) = 0, \quad \tau(0) = \tau(1) = 0, \tag{21}$$

или

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t)\nu(t)dt + x\int_0^1 (t-1)\nu(t)dt. \tag{22}$$

Предположим, что функция $u(x,y)$ в области Ω_1 достигает положительного максимума (отрицательного минимума) в точке $x = x_0$ отрезка I. Пользуясь принципом экстремума для уравнения теплопроводности [8], из (21) заключаем, что $\nu(x_0) = 0$. Это противоречит неравенствам (18) или (19).

Таким образом, если существует решение задачи (1)–(4), то оно единственно.

3. Существование решения задачи. Подставим $\tau(x)$, определяемую формулой (22), и

$$\tau'(x) = \int_0^x \nu(t)dt + \int_0^1 (t-1)\nu(t)dt$$

в (15). После вычислений будем иметь

$$\begin{aligned}\nu(x) + \mu x^2 a_2(x)\Bigg[x^{2\beta}\bigg(\varphi_2(0) - \varphi_1(0) - \int_0^1 (1-t)\nu(t)dt\bigg) + \int_0^x \frac{\nu(t)dt}{(x-t)^{-2\beta}}\Bigg] - \\ - \mu(1-x)^2 b_2(x)\Bigg[-\bigg(\varphi_2(0) - \varphi_1(0) - \int_0^1 (1-t)\nu(t)dt\bigg)(1-x)^{2\beta} - \\ - \frac{1}{(1-x)^{-2\beta}}\int_0^1 \nu(t)dt + \int_x^1 \frac{\nu(t)dt}{(t-x)^{-2\beta}}\Bigg] + \\ + c_1(x)\Bigg[\varphi_1(0) + (\varphi_2(0) - \varphi_1(0))\,x - x\int_0^1 (1-t)\nu(t)dt + \int_0^x (x-t)\nu(t)dt\Bigg] = \gamma_2(x).\end{aligned} \tag{23}$$

Уравнение (23) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\nu(x) + [\mu(1-x)^{2+2\beta}b_2(x) - \mu x^{2+2\beta}a_2(x) - c_1(x)x]\int_0^1 (1-t)\nu(t)dt + \\ + \mu(1-x)^{2+2\beta}b_2(x)\int_0^1 \nu(t)dt + \mu x^2 a_2(x)\int_0^x \frac{\nu(t)dt}{(x-t)^{-2\beta}} - \\ - \mu(1-x)^2 b_2(x)\int_x^1 \frac{\nu(t)dt}{(t-x)^{-2\beta}} + c_1(x)\int_0^x (x-t)\nu(t)dt = f(x),\end{aligned}$$

где

$$f(x) = \gamma_2(x) - \mu[\varphi_2(0) - \varphi_1(0)]\big(x^{2+2\beta}a_2(x) - (1-x)^{2+2\beta}b_2(x)\big) - c(x)[\varphi_1(0) + (\varphi_2(0) - \varphi_1(0))x].$$

Отсюда

$$\nu(x) + \int_0^1 \frac{K(x,t)\nu(t)dt}{|x-t|^{-2\beta}} = f(x), \tag{24}$$

где

$$K(x,t)=\begin{cases}K_1(x,t) & \text{при} \quad x\geq t;\\ K_2(x,t) & \text{при} \quad x\leq t,\end{cases}$$

$$K_1(x,t)=[\mu(1-x)^{2+2\beta}b_2(x)-\mu x^{2+2\beta}a_2(x)-c_1(x)x](x-t)^{-2\beta}(1-t)+\\ +\mu(1-x)^{2+2\beta}b_2(x)(x-t)^{-2\beta}+c_1(x)(x-t)^{1-2\beta}+\mu x^2a_2(x) \quad \text{при} \quad x\geq t,$$

$$K_2(x,t)=[\mu(1-x)^{2+2\beta}b_2(x)-\mu x^{2+2\beta}a_2(x)-c_1(x)x](t-x)^{-2\beta}(1-t)+\\ +\mu(1-x)^{2+2\beta}b_2(x)(t-x)^{-2\beta}-\mu(1-x)^2b_2(x) \quad \text{при} \quad x\leq t,$$

$K_i(x,t)\in C(\overline{I}\times\overline{I})\cap C^2(I\times I)$, $i=1,2$, $f(x)\in C(\overline{I})\cap C^2(I)$.

Безусловная разрешимость уравнения (24) в требуемом классе функций следует из единственности решения исследуемой задачи.

По найденному $\nu(x)$ из (22) определяется $\tau(x)$ и решение задачи (1)–(4) как решение задачи Коши (6) в области Ω_2 и первой краевой задачи в области Ω_1 [8].

Литература

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Наука и техника, Минск, 1987).

[2] Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение* (Физматлит, М., 2003).

[3] Нахушев А.М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных* (Наука, М., 2006).

[4] Репин О.А., Кумыкова С.К. *Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области*, Дифференц. уравнения **48** (8), 1140–1149 (2012).

[5] Репин О.А., Кумыкова С.К. *Нелокальная задача для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой — полуполоса*, Дифференц. уравнения **50** (6), 807–816 (2014).

[6] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа* (Высш. шк., М., 1985).

[7] Ивашкина Г.А. *О задачах типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнения* $u_{xx}+\operatorname{sgn}y|y|^m u_{yy}=0$ $(0<m<1)$, Дифференц. уравнения **17** (6), 1078–1089 (1981).

[8] Бицадзе А.В. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1976).

О.А. Репин

Самарский государственный экономический университет,
ул. Советской Армии, д. 141, г. Самара, 443090, Россия,

`e-mail:` Matstat@mail.ru

С.К. Кумыкова

Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, д. 173, г. Нальчик, 360004, Россия,

`e-mail:` bsk@rect.kbsu.ru

O.A. Repin and S.K. Kumykova

The problem with operators of fractional differentiation in boundary condition for mixed-type equation

Abstract. We study a question of unique solvability of a boundary-value problem with fractional derivatives for a mixed-type equation of the second order. The uniqueness theorem is proved by using restrictions on known functions. The existence of a solution to the problem is proved by reduction to the Fredholm equation of the second kind. Unconditional solvability of this equation follows from the uniqueness of a solution.

Keywords: operator of fractional differentiation, Gauss hypergeometric function, Cauchy problem, Fredholm integral equation.

O.A. Repin

Samara State Economic University,
141 Sovetskoi Armii str., Samara, 443090 Russia,

`e-mail:` Matstat@mail.ru

S.K. Kumykova

Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevskogo str., Nal'chik, 360004 Russia,

`e-mail:` bsk@rect.kbsu.ru