Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №10, с. 89–93 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0110*

М.А. АУХАДИЕВ, С.А. ГРИГОРЯН, Е.В. ЛИПАЧЕВА

КОМПАКТНАЯ КВАНТОВАЯ ПОЛУГРУППА, ПОРОЖДЕННАЯ ИЗОМЕТРИЕЙ

Аннотация. В работе строится структура компактной квантовой полугруппы на алгебре Теплица. Показывается существование подалгебры в двойственной алгебре, изоморфной алгебре регулярных борелевских мер на окружности с произведением свертки. Доказывается существование функционалов Хаара в двойственной алгебре и в упомянутой подалгебре. Также указывается, что эта компактная квантовая полугруппа содержит плотную подалгебру со структурой слабой алгебры Хопфа.

Ключевые слова: квантовая полугруппа, квантовая группа, функционал Хаара, алгебра Теплица, слабая алгебра Хопфа, инверсная полугруппа.

УДК: 512.667 : 517.5

Abstract. In this paper we construct a compact quantum semigroup structure on a Toeplitz algebra. We prove the existence of a subalgebra in the dual algebra isomorphic to the algebra of regular Borel measures on a circle with the convolution product. We also prove the existence of a Haar functionals in the dual algebra and in the subalgebra mentioned above. We show that this compact quantum semigroup contains a dense subalgebra with the structure of a weak Hopf algebra.

Keywords: quantum semigroup, quantum group, Haar functional, Toeplitz algebra, weak Hopf algebra, inverse semigroup.

1. Необходимые сведения

Пусть

$$l^2(\mathbb{Z}_+) = \left\{ f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty \right\}$$

— гильбертово пространство всех функций, суммируемых с квадратом на множестве неотрицательных целых чисел. Семейство функций $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, $e_n(m) = \delta_{n,m}$, где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера, образуют ортонормированный базис в $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Ограниченный линейный оператор $T : l^2(\mathbb{Z}_+) \to l^2(\mathbb{Z}_+)$ называется оператором правостороннего сдвига, если

$$Te_n = e_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, T — изометрический оператор. Сопряженным к нему является оператор левостороннего сдвига T^*:

$$T^*e_0 = 0, \quad T^*e_n = e_{n-1}, \quad n > 0.$$

Поступила 23.03.2011

Алгеброй Теплица называется равномерно замкнутая подалгебра алгебры $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z}_+))$ всех ограниченных линейных операторов на $l^2(\mathbb{Z}_+)$, порожденная операторами T и T^*. Существуют различные обобщения алгебры Теплица (например, [1]–[3]). В дальнейшем алгебру Теплица будем обозначать $\mathcal{T}$.

Так как $T^*T = 1$, и TT^* — проектор, то каждое конечное произведение операторов T и T^* совпадает с оператором вида

$$T^n T^{*m} = T_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Поэтому в алгебре Теплица $\mathcal{T}$ плотны по равномерной топологии конечные линейные комбинации вида $\sum\limits_{n,m\in\mathbb{Z}_+} \lambda_{n,m} T_{n,m}$, $\lambda_{n,m} \in \mathbb{C}$. Очевидно,

$$T_{n,m}T_{k,l} = \begin{cases} T_{n+k-m,l}, & \text{если } k > m; \\ T_{n,l+m-k}, & \text{если } k < m; \\ T_{n,l}, & \text{если } k = m. \end{cases}$$

Поэтому семейство $\{T_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{Z}_+}$ образует полугруппу. Так как $T_{n,m}T_{m,n}T_{n,m} = T_{n,m}$ для любых $n, m \in \mathbb{Z}_+$, то полугруппа $\{T_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{Z}_+}$ является *инверсной* полугруппой [4] (*обобщенной группой* Вагнера), где $T_{n,m}$ и $T_{m,n}$ — *инверсные* друг к другу элементы (*обобщенно-обратные* элементы).

Семейство операторов $\{T_{n,n}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ образует коммутативную полугруппу идемпотентов, т. е. проекторов. Действительно, оператор $T_{n,n}$ есть проектор на подпространство

$$l^2(\mathbb{Z}_+ + n) = \{f \in l^2(\mathbb{Z}_+) : f(m) = 0, \text{ если } m < n\}.$$

Каждый оператор $T_{n,m}$ является оператором Фредгольма индекса $m - n = \operatorname{ind} T_{n,m}$. Если $k = \operatorname{ind} T_{n,m}$, то

$$T_{n,m} = \begin{cases} T_{n,n}T_{0,k}, & \text{если } k \geq 0; \\ T_{-k,0}T_{m,m}, & \text{если } k < 0. \end{cases}$$

2. Компактная квантовая полугруппа

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра, и $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ — минимальное C^*-тензорное произведение алгебры $\mathcal{A}$ на себя. Пусть Δ — унитальный $*$-гомоморфизм $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, удовлетворяющий условию коассоциативности:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta.$$

Тогда пара $(\mathcal{A}, \Delta)$ называется компактной квантовой полугруппой [5], отображение Δ называется копроизведением.

Покажем, что на алгебре $\mathcal{T}$ существует структура компактной квантовой полугруппы. Определим копроизведение $\Delta : \mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$. Для этого сначала зададим его значение на операторе правостороннего сдвига T:

$$\Delta(T) = T \otimes T.$$

Это копроизведение продолжается на всю алгебру $\mathcal{T}$.

Теорема 2.1. $(\mathcal{T}, \Delta)$ *является компактной квантовой полугруппой.*

Доказательство данной теоремы опирается на теорему Кобурна о продолжении гомоморфизма ([6], с. 137).

Определение 2.2. Компактная квантовая полугруппа $(\mathcal{A}, \Delta)$ называется кокоммутативной, если

$$\Delta(a) = \sigma(\Delta(a)), \quad a \in \mathcal{A},$$

где $\sigma : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ — переворачивающий автоморфизм, заданный следующим образом:

$$\sigma(a \otimes b) = b \otimes a \text{ для всех } a, b \in \mathcal{A}.$$

Замечание 2.1. Очевидно, компактная квантовая полугруппа $(\mathcal{T}, \Delta)$ является кокоммутативной. Кроме того, из упомянутой выше теоремы Кобурна следует, что Δ является изометрическим, т. е. сохраняет норму:

$$\|\Delta(A)\| = \|A\| \text{ для всех } A \in \mathcal{T}.$$

Определение 2.3. Биалгебра $\mathcal{A}$ называется *слабой алгеброй Хопфа* [7], если существует линейное отображение $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такое, что выполняются равенства

$$\mu(\mathrm{id} \otimes S \otimes \mathrm{id})\Delta^2 = \mathrm{id}, \quad \mu(S \otimes \mathrm{id} \otimes S)\Delta^2 = S, \tag{1}$$

где $\Delta^2 = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta$ и $\mu : \mathcal{A} \odot \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ — линейное отображение, удовлетворяющее свойству ассоциативности и определенное равенством

$$\mu(a \otimes b) = ab.$$

Отображение S называется слабым антиподом.

Как отмечалось ранее, семейство $\{T_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{Z}_+}$ является инверсной полугруппой. Обозначим через $\mathcal{P}$ алгебру, порожденную всевозможными конечными линейными комбинациями элементов семейства $\{T_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{Z}_+}$. Очевидно, $\mathcal{P}$ является плотной подалгеброй в $\mathcal{T}$. Пусть S — отображение, сопоставляющее каждому элементу этого семейства инверсный к нему:

$$S(T_{n,m}) = T_{m,n}.$$

Отображение S продолжается естественным образом до линейного антимультипликативного отображения на $\mathcal{P}$. Очевидно, равенства (1) выполняются для S, Δ на алгебре $\mathcal{P}$. Поэтому верна

Теорема 2.2. *В компактной квантовой полугруппе $(\mathcal{T}, \Delta)$ существует плотная подалгебра $\mathcal{P}$ со структурой слабой алгебры Хопфа.*

3. Двойственная алгебра и функционал Хаара

Рассмотрим $\mathcal{T}^*$ — пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{T}$. Определим произведение на $\mathcal{T}^*$:

$$(\rho * \varphi)(A) = (\rho \otimes \varphi)(\Delta(A)). \tag{2}$$

Теорема 3.1. *$\mathcal{T}^*$ является коммутативной банаховой алгеброй с операцией умножения, определенной равенством* (2).

Лемма 3.1. *Алгебра $\mathcal{T}^*$ является унитальной. Единицей служит функционал ε, определяемый равенством*

$$\varepsilon(T_{n,m}) = 1 \text{ для всех } n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

Замечание 3.1. Функционал ε, заданный равенством (3), является коединицей [8] для слабой алгебры Хопфа $\mathcal{P}$. Однако в силу леммы 3.1 ε действует на всей алгебре $\mathcal{T}$. Поэтому можно говорить, что ε является коединицей для компактной квантовой полугруппы $(\mathcal{T}, \Delta)$.

Определение 3.1. Нормированное состояние $h \in \mathcal{T}^*$ назовем *функционалом Хаара* [8] на $\mathcal{T}^*$, если для любого функционала $\rho \in \mathcal{T}^*$ выполняются равенства

$$h * \rho = \rho * h = \lambda_\rho \cdot h, \quad \lambda_\rho \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Теорема 3.2. *h является функционалом Хаара на $\mathcal{T}^*$ тогда и только тогда, когда*

$$h(T_{n,m}) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m = 0; \\ 0, & \text{если } n \neq 0 \text{ или } m \neq 0. \end{cases}$$

Пусть K — множество всех компактных операторов из $\mathcal{T}$. Обозначим через $\mathcal{T}_0^*$ пространство тех функционалов из $\mathcal{T}^*$, которые равны нулю на операторах из K:

$$\mathcal{T}_0^* = \{\rho \in \mathcal{T}^* | \ \rho|_K = 0\}.$$

Лемма 3.2. *Пусть $\rho \in \mathcal{T}^*$. Тогда следующие условия эквивалентны*:
(1) $\rho \in \mathcal{T}_0^*$,
(2) $\rho(T_{n,m}) = \rho(T_{k,l})$, *если* $m - n = l - k$.

Следствие 3.1. $\mathcal{T}_0^*$ является подалгеброй в $\mathcal{T}^*$.

Теорема 3.3. *Алгебра $\mathcal{T}_0^*$ изоморфна алгебре $M(S^1)$ регулярных борелевских мер на окружности. Более того, произведение $*$, заданное равенством* (2) *в $\mathcal{T}_0^*$, совпадает со сверткой мер в $M(S^1)$.*

Определение 3.2. Нормированное состояние $h \in \mathcal{T}_0^*$ назовем *функционалом Хаара* [8] на $\mathcal{T}_0^*$, если для любого функционала $\rho \in \mathcal{T}_0^*$ выполняются равенства (4).

Теорема 3.4. *В алгебре $\mathcal{T}_0^*$ существует функционал Хаара, и он соответствует мере Хаара на окружности.*

Литература

[1] Григорян С.А., Кузнецова А.Ю. *AF-подалгебры C^*-алгебры, порожденной отображением*, Изв. вузов. Матем., № 3, 82–97 (2010).
[2] Григорян С.А., Кузнецова А.Ю. *C^*-алгебры, порожденные отображениями*, Матем. заметки **87** (5), 694–703 (2010).
[3] Григорян С.А., Салахутдинов А.Ф. *C^*-алгебры, порожденные полугруппами*, Изв. вузов. Матем., № 10, 68–71 (2009).
[4] Клиффорд А., Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп*, Т. 1 (Мир, М., 1972).
[5] Sadr M.M. *A kind of compact quantum semigroups*, http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0808/0808.2740v2.pdf, 2010.
[6] Мерфи Дж. *C^*-алгебры и теория операторов* (Факториал, М., 1997).
[7] Li F. *Weak Hopf algebras and some new solutions of the quantum Yang–Baxter equation*, J. Algebra **208** (1), 72–100, 1998.
[8] Woronowicz S.L. *Compact quantum groups*, Symétries quantiques (Les Houches, 1995), p. 845–884, North-Holland, Amsterdam, 1998.

М.А. Аухадиев

аспирант, кафедра высшей математики,
Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д.51, г. Казань, 420066,

e-mail: m.aukhadiev@gmail.com

С.А. Григорян

профессор, заведующий кафедрой высшей математики,
Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д.51, г. Казань, 420066,

e-mail: gsuren@inbox.ru

Е.В. Липачева

доцент, кафедра высшей математики,
Казанский государственный энергетический университет,
ул. Красносельская, д.51, г. Казань, 420066,

e-mail: elipacheva@gmail.com

M.A. Aukhadiev

Postgraduate, Chair of Higher Mathematics,
Kazan State Energy University,
51 Krasnoselskaya str., Kazan, 420066 Russia,

e-mail: m.aukhadiev@gmail.com

S.A. Grigoryan

Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics,
Kazan State Energy University,
51 Krasnoselskaya str., Kazan, 420066 Russia,

e-mail: gsuren@inbox.ru

E.V. Lipacheva

Associate Professor, Chair of Higher Mathematics,
Kazan State Energy University,
51 Krasnoselskaya str., Kazan, 420066 Russia,

e-mail: elipacheva@gmail.com