ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 12 (523)

УДК 517.977

*С.Я. СЕРОВАЙСКИЙ*

# ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ В КОЭФФИЦИЕНТАХ И РАСШИРЕННАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПО ВЫПУКЛОМУ МНОЖЕСТВУ

## 1. Введение

Задачи управления в коэффициентах представляют значительный теоретический и практический интерес. К ним сводятся коэффициентные обратные задачи математической физики (напр., [1]) и задачи управления областью [2]–[4]. Сложность задач управления в коэффициентах во многом обусловлена их возможной неразрешимостью ([5]; [6], с. 47–48; [7]). Хотя исследованию задач управления в коэффициентах для уравнений эллиптического типа посвящено значительное количество работ (напр., [8]–[16]), специфические особенности этих задач не позволяют в полной степени осуществить их анализ с позиций общей теории экстремума.

Как известно, точка минимума $u$ гладкого функционала $I$ на выпуклом подмножестве $U$ банахова пространства $V$ удовлетворяет вариационному неравенству $\langle I'(u), v-u\rangle \geq 0$ для всех $v \in U$, где $I'(u)$ — производная Гато функционала $I$ в точке $u$, а $\langle \lambda, h\rangle$ — значение линейного непрерывного функционала $\lambda$ в точке $h$. Вычисление производной здесь наталкивается на две принципиальные трудности. Прежде всего, предполагается нахождение значения $I(u+\sigma h)$, где $\sigma$ — некоторое число, а направление $h$ — произвольный элемент пространства $V$. Особенностью задач с управлением в главной части оператора является то обстоятельство, что уравнение состояния имеет решение не на всем пространстве управлений. Отсутствие разрешимости уравнения на произвольном управлении вида $u+\sigma h$ препятствует нахождению производной. Для преодоления этой трудности предлагается в вариационном неравенстве вместо производной Гато использовать более слабое понятие производной по выпуклому множеству.

Вторая трудность при вычислении производной минимизируемого функционала связана с его зависимостью от функции состояния системы, зависящей, в свою очередь, от управления. Нахождение производной функционала согласно теореме о дифференцировании сложной функции в банаховых пространствах требует дифференцируемости по Гато функции состояния по управлению, но в данном случае эта зависимость, вообще говоря, не является дифференцируемой. Для преодоления этой трудности можно было бы воспользоваться более слабым понятием расширенной производной оператора [15], [17], [18]. Однако в условиях разрешимости уравнения состояния не на всем пространстве управлений нахождение расширенной производной зависимости решения уравнения от управления не представляется возможным. Желаемый результат получается с помощью комбинированного понятия расширенной производной по выпуклому множеству.

## 2. Постановка задачи

В открытой ограниченной $n$-мерной области $\Omega$ рассматривается уравнение

$$-\operatorname{div}(v\nabla y) + |y|^\rho y = f \tag{1}$$

с однородным граничным условием (задача Дирихле), где $v$ — управление, $y$ — функция состояния, $f$ — известная функция, $\rho > 0$. Определим пространства $V = H_0^1(\Omega)$, $Y = H_0^1(\Omega) \bigcap L_q(\Omega)$,

$Z = H^{-1}(\Omega) + L_{q'}(\Omega)$, где $q = \rho + 2$, $1/q + 1/q' = 1$. Управление выбирается из множества $U = \{v \in V \mid 0 < a \leq v(x) \leq b,\ x \in \Omega\}$. Пользуясь теорией монотонных операторов ([19], с. 182–185), установим, что при $f \in Z$ для любого $v \in U$ уравнение (1) имеет единственное решение $y = y(v)$ из пространства $Y$.

Определим функционал

$$I(v) = J(v) + K[y(v)] = \frac{\nu}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|y(v) - y_d\|^2,$$

где $\nu > 0$, $y_d \in H_0^1(\Omega)$ — известные величины, а нормы соответствуют пространству $V$. Назовем *задачей* $P$ отыскание такого элемента множества $U$, на котором достигается минимум функционала $I$ на этом множестве.

**Теорема 1.** *Задача $P$ разрешима.*

**Доказательство.** В силу коэрцитивности функционала $I$ минимизирующая последовательность $\{v_k\}$ для задачи $P$ ограничена. Пользуясь теоремой Банаха–Алаоглу, извлечем из нее такую подпоследовательность с сохранением прежнего обозначения, что имеет место сходимость $v_k \to v$ слабо в $V$. В силу слабой замкнутости множества $U$ установим включение $v \in U$. Умножая равенство (1) при $v = v_k$ на функцию $y(v_k)$ и интегрируя результат по области $\Omega$ с учетом формулы Грина и положительности допустимых управлений, установим ограниченность последовательности $\{y(v_k)\}$ в пространстве $Y$, откуда после извлечения подпоследовательности следует, что $y(v_k) \to y$ слабо в $Y$, а значит, $\nabla y(v_k) \to \nabla y$ слабо в $L_2(\Omega)^n$. Применяя теорему Реллиха–Кондрашова, установим, что $v_k \to v$ сильно в $L_2(\Omega)$ и п. в. на $\Omega$. Для любой функции $\mu \in L_2(\Omega)$ имеет место оценка $|v_k(x) - v(x)|\,|\mu(x)| \leq 2b|\mu(x)|$, откуда следует включение $(v_k - v)\mu \in L_2(\Omega)$. Пользуясь теоремой Лебега, установим сходимость $v_k\mu \to v\mu$ сильно в $L_2(\Omega)$ для всех $\mu \in L_2(\Omega)$. Тогда, умножая равенство (1) на произвольную функцию $\lambda \in V$, после интегрирования по области $\Omega$ и перехода к пределу установим, что $y = y(v)$, а значит, отображение $v \to y(v)$ слабо непрерывно. Учитывая слабую полунепрерывность снизу квадратов норм в гильбертовом пространстве, приходим к соотношению $I(v) \leq \inf \lim\limits_{k\to\infty} I(v_k)$, откуда следует, что управление $v$ оптимально. □

При менее регулярном пространстве управлений установить слабую непрерывность отображения $v \to y(v)$ не удается ([10], с. 95). В этих условиях задача оптимального управления может оказаться неразрешимой [5]–[7]. Отметим, что в известных работах по оптимизации систем, описываемых эллиптическими уравнениями с управлением в коэффициентах, рассматриваются либо линейные уравнения [3], [5]–[12], либо нелинейные системы при условии дифференцирования функции состояния по управлению [4], [13], [14], [16], либо нелинейные системы без ограничений на дифференцируемость функции состояния по управлению, но с управлением в младших членах оператора [15].

## 3. Производная по выпуклому множеству

Установим необходимые условия оптимальности для задачи $P$, состоящей в минимизации функционала $I$ на выпуклом подмножестве $U$ банахова пространства $V$. Если данный функционал дифференцируем по Гато, то решение задачи $u$ удовлетворяет вариационному неравенству ([10], с. 18)

$$\langle I'(u), v - u\rangle \geq 0 \quad \forall v \in U. \tag{2}$$

Таким образом, для достижения желаемой цели достаточно найти соответствующую производную Гато, если она существует. Для этого требуется вычислить разность $I(u+\sigma h) - I(u)$, где $\sigma$ — некоторое число, а $h$ — произвольный элемент пространства $V$. В этом случае функция $u+\sigma h$ может принимать отрицательные значения. Установить разрешимость уравнения (1) для такого управления не удается ввиду отсутствия априорной оценки решения краевой задачи, вследствие чего нет возможности использования соотношения (2). Можно, конечно, перейти от производной Гато к более слабому понятию производной по направлению и выбирать направления $h$ так, чтобы не выйти за пределы области разрешимости уравнения (1). Однако получаемый в результате аналог условия (2) окажется нелинейным относительно варьируемой функции, что существенно усложняет практическое использование условия оптимальности. В этой связи предлагается такое обобщение производной Гато, которое оказалось бы линейным оператором, но не требовало бы в процессе его вычисления выхода за пределы заданного множества.

**Определение 1.** Оператор $L$, определенный на выпуклом подмножестве $U$ банахова пространства $V$ со значениями в банаховом пространстве $Y$, назовем *дифференцируемым по множеству* $U$ в точке $u \in U$, если существует такой линейный непрерывный оператор $D : V \to Y$, что при $\sigma \to 0$ имеет место сходимость $\{L[u + \sigma(v - u)] - Lu\}/\sigma \to D(v - u)$ в $Y$ для любого $v \in U$.

Очевидно, при $U = V$ производная по множеству $U$ совпадает с обычной производной Гато. Если $U$ является подпространством $V$, получаем известную производную по подпространству [20].

**Теорема 2.** *Если функционал $I$ имеет производную $I'(u)$ по выпуклому множеству $U$ в точке $u \in U$, то необходимым условием его минимума на этом множестве в данной точке будет вариационное неравенство* (2).

Действительно, если $u$ — точка минимума функционала $I$ на множестве $U$, то справедливо неравенство $I[u + \sigma(v - u)] - I(u) \geq 0$ для всех $v \in U$, $\sigma \in (0, 1)$. Разделив это неравенство на $\sigma$ и перейдя в нем к пределу при $\sigma \to 0$ с учетом определения 1, получаем соотношение (2). Итак, можно воспользоваться соотношением (2) для исследования задачи $P$, если входящая в него производная, понимаемая в смысле определения 1, существует.

## 4. Проблема дифференцируемости функции состояния по управлению

Цель данной статьи состоит не только в получении необходимых условий оптимальности для задачи $P$, но и в выводе соответствующего утверждения из некоторой общей схемы решения нелинейных оптимизационных задач в бесконечномерных пространствах, что отсутствует в известных методах исследования задач управления в коэффициентах [1]–[16]. Пусть заданы банаховы пространства $V$, $Y$, $Z$, выпуклое подмножество $U$ пространства $V$ и дифференцируемые по Фреше оператор $A : V \times Y \to Z$ и функционал $J : V \times Y \to Z$. В дальнейшем через $A_1'(v, y)$, $A_2'(v, y)$ обозначаются частные производные оператора $A$ в соответствующих точках. Аналогичным образом будут обозначены частные производные функционала $J$. Предполагается, что для любого $v \in U$ существует единственная точка $y(v) \in Y$, удовлетворяющая уравнению $A[v, y(v)] = 0$. *Задача* $Q$ состоит в отыскании такого управления $v \in U$, на котором достигается минимум функционала $I(v) = J[v, y(v)]$ на множестве $U$. Для приведения задачи $P$ к виду $Q$ достаточно в качестве $A(v, y)$ выбрать левую часть равенства (1) минус $f$, а в качестве $J(v, y)$ — соответствующее значение критерия оптимальности для задачи $P$.

**Теорема 3.** *Если отображение $v \to y(v)$ дифференцируемо по множеству $U$ в точке $u \in U$ и существует решение $p \in Z'$ сопряженного уравнения*

$$A_2'(u, y)^* p = J_2'(u, y), \tag{3}$$

*где $y = y(u)$, то для того чтобы эта точка была решением задачи $Q$, необходимо, чтобы выполнялось соотношение*

$$\langle J_1'(u, y) + A_1'(u, y)^* p, v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U. \tag{4}$$

**Доказательство.** Если отображение $v \to y(v)$ имеет производную $y'(u)$ по множеству $U$ в точке $u$, то с помощью теоремы о дифференцировании сложной функции ([21], с. 637) найдем соответствующую производную функционала $I$ из равенства

$$\langle I'(u), v-u\rangle = \langle J_1'(u,y), v-u\rangle + \langle J_2'(u,y), y'(u)(v-u)\rangle \quad \forall v \in U.$$

Понятно, что в [21] вместо производной по выпуклому множеству говорится о производной Гато. Однако все доказательство указанной теоремы остается в силе, если выбирать направления при вычислении производной не из всего пространства, а лишь из его выпуклого подмножества. Аналогично из уравнения $A[v, y(v)] = 0$ на управлениях $u + \sigma(v-u)$ и $u$ следует равенство $A_1'(u,y)(v-u) + A_2'(u,y)[y'(u)(v-u)] = 0$. Тогда для любой функции $\lambda$ из сопряженного пространства $Z'$ справедливо соотношение

$$\langle A_1'(u,y)^*\lambda, v-u\rangle + \langle A_2'(u,y)^*\lambda, y'(u)(v-u)\rangle = 0.$$

Если теперь в качестве $\lambda$ выбрать решение уравнения (3), то справедливо равенство

$$\langle I'(u), v-u\rangle = \langle J_1'(u,y) - p, v-u\rangle \quad \forall v \in U,$$

и условие (4) следует из вариационного неравенства (2). $\square$

Отметим, что в том случае, когда $A_2'(u,y)$ обладает непрерывным обратным оператором, уравнение (3) имеет единственное решение в силу одновременной обратимости взаимно сопряженных операторов ([21], с. 456), а дифференцируемость отображения $v \to y(v)$ следует из теоремы о неявной функции ([21], с. 662). Таким образом, практическое применение теоремы 3 для задачи $P$ сводится к проверке однозначной разрешимости в соответствующих пространствах линеаризованного уравнения $A_2'(u,y)\varphi = z$. Применительно к уравнению (1) имеем однородную задачу Дирихле для уравнения

$$-\operatorname{div}(u\nabla\varphi) + (\rho+1)|y|^\rho\varphi = z. \tag{5}$$

**Лемма 1.** *При $n = 2$ или $\rho \le 4/(n-2)$ для $n \ge 3$ уравнение (5) имеет единственное решение $\varphi \in Y$ для любого $z \in Z$.*

**Доказательство**. Умножая равенство (5) на функцию $\varphi$ и интегрируя результат по области $\Omega$ с учетом формулы Грина и определения множества $U$, получаем неравенство

$$a\|\varphi\|^2 + (\rho+1)\int_\Omega |y|^\rho\varphi^2 dx \le \int_\Omega z\varphi\, dx.$$

При выполнении условий леммы в силу теоремы Соболева справедливо непрерывное вложение $H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, откуда следуют равенства $Y = H_0^1(\Omega)$, $Z = H^{-1}(\Omega)$. Тогда из последнего неравенства выводится априорная оценка решения уравнения (5) в пространстве $Y$ для любого $z \in Z$. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться стандартной теорией линейных эллиптических уравнений (напр., [10], с. 53).

**Теорема 4.** *При выполнении условий леммы 1 решение задачи $P$ удовлетворяет вариационному неравенству*

$$\int_\Omega (\Delta u - \nabla y\nabla p)(v-u)dx \le 0 \quad \forall v \in U, \tag{6}$$

*где $p$ — решение однородной задачи Дирихле для уравнения*

$$-\operatorname{div}(u\nabla p) + (\rho+1)|y|^\rho p = \Delta y_d - \Delta y. \tag{7}$$

**Доказательство.** Утверждения леммы 1 гарантируют применимость теоремы о неявной функции для доказательства дифференцируемости отображения $v \to y(v)$, а значит, возможность использования теоремы 3 для исследования задачи $P$. Понятно, что стандартная теорема о неявной функции формулируется не в терминах производных по выпуклому множеству. Однако все конструкции этой теоремы остаются в силе, если при вычислении производной исследуемого отображения использовать лишь направления, соответствующие заданному множеству. Итак, остается найти соответствующие производные и подставить результат в соотношения (3) и (4). Для любых функций $v \in V, \varphi \in Y$ имеем

$$A_1'(u,y)v = -\operatorname{div}(v\nabla y), \quad A_2'(u,y)\varphi = -\operatorname{div}(u\nabla\varphi) + (\rho+1)|y|^\rho\varphi,$$
$$\langle J_1'(u,y),v\rangle = (\nu u, v), \quad \langle J_2'(u,y),\varphi\rangle = (y - y_d, \varphi),$$

где скалярные произведения соответствуют пространству $V$. В результате находим значения $J_1'(u,y) = -\Delta u$, $J_2'(u,y) = \Delta y_d - \Delta y$, а сопряженное уравнение (3) принимает вид (7). При этом вариационное неравенство (4) записывается в виде

$$\int_\Omega \Delta u(v-u)dx + \int_\Omega \operatorname{div}[(v-u)\nabla y]p\,dx \le 0 \quad \forall v \in U,$$

откуда следует соотношение (6). $\square$

Итак, при достаточно малых значениях размерности области и показателя нелинейности уравнения, т. е. при условии вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ можно установить необходимые условия оптимальности для задачи $P$ с помощью теоремы 3, которая восходит к теореме 2. Доказанное утверждение не выходит за рамки стандартной теории оптимального управления нелинейными бесконечномерными системами и могло бы быть получено методами, описанными, например, в [4], [10], [13], [14], [16], с заменой производной Гато на производную по выпуклому множеству. Вспомним, однако, что разрешимость задачи согласно теореме 1 реализуется и без указанного вложения. Вследствие этого представляет интерес анализ задачи $P$ при достаточно больших значениях параметров $\rho$ и $n$.

**Лемма 2.** *Пусть параметры $\rho$ и $n$ столь велики, что вложение $H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ не имеет места. Тогда найдутся такие функции $u \in U$, $y \in Y$, $f \in Z$, $z \in Z$, что $y = y(u)$, а уравнение (5) неразрешимо в пространстве $Y$.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольные функции $u \in U$, $y \in Y \bigcap C(\overline{\Omega})$. Определив $f_0 = -\operatorname{div}(v\nabla y) + |y|^\rho y$, установим, что $y = y(u)$ при $f = f_0$. В силу непрерывности функции $y$ для любого $\varphi \in Y$ левая часть равенства (5) будет принадлежать пространству $H^{-1}(\Omega)$, отличному от $Z$ при выполнении условий леммы. Тогда для любого $z \in Z \setminus H^{-1}(\Omega)$ уравнение (5) не может иметь решения из класса $Y$. $\square$

Лемма 2 говорит о том, что в изучаемом случае оператор $A_2'(u,y)$ необратим, что препятствует применению теоремы о неявной функции для доказательства дифференцируемости отображения $v \to y(v)$. Возможно, что последнее свойство будет установлено в обход указанной теоремы.

**Лемма 3.** *При выполнении условий леммы 2 отображение $v \to y(v)$ не дифференцируемо по множеству $U$ в точке $u$.*

**Доказательство.** Предположим, что соответствующая производная $y'(u)$ существует. Тогда справедливо равенство

$$-\operatorname{div}\{[u+\sigma(v-u)]\nabla y(u+\sigma(v-u))\} + |y(u+\sigma(v-u))|^\rho y(u+\sigma(v-u)) + \operatorname{div}(u\nabla y) - |y|^\rho y = 0.$$

Разделив полученное выражение на $\sigma$ и перейдя в нем к пределу при $\sigma \to 0$ с учетом принятого допущения, будем иметь

$$-\operatorname{div}[u\nabla y'(u)(v-u)] + (\rho+1)|y|^\rho y'(u)(v-u) = \operatorname{div}[(v-u)\nabla y]. \tag{8}$$

Функцию $y$ можно подобрать таким образом, чтобы она принадлежала пространству $W^2_{q'}(\Omega)$. Тогда для любого $v \in U$ функция $z_0$, равная выражению в правой части равенства (8), оказывается элементом пространства $L_{q'}(\Omega)$. При достаточно больших значениях параметров $\rho$ и $n$ можно добиться отсутствия вложения $W^1_{q'}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Вследствие этого найдется такое значение $v \in U$, что соответствующая ей функция $z_0$ не будет принадлежать пространству $H^{-1}(\Omega)$, а значит, оказывается элементом множества $Z \setminus H^{-1}(\Omega)$. Ей соответствует решение уравнения (5), равное $y'(u)(v-u)$ в силу равенства (8) и принадлежащее пространству $Y$, чего не может быть согласно лемме 2. Следовательно, предположение о дифференцируемости решения уравнения (1) по свободному члену не имеет места. $\square$

Итак, при достаточно больших значениях размерности области и показателя нелинейности уравнения ввиду отсутствия дифференцируемости функции состояния системы по управлению нет возможности воспользоваться теоремой 2 для получения необходимых условий оптимальности, как это делалось при доказательстве теоремы 3. В этих условиях желаемый результат не может быть получен и на основе известных методов исследования задач управления в коэффициентах, описанных в цитируемых ранее работах. Правда, разрешимость задачи $P$ была установлена без ограничений на параметры $\rho$ и $n$ (см. теорему 1), вследствие чего возникает естественное желание получить условия оптимальности в общем случае.

На вероятную возможность достижения этой цели указывают следующие соображения. Предположим, что зафиксировано некоторое значение размерности области (больше двух) и значение показателя нелинейности постепенно увеличивается. Рано или поздно наступит такой момент, когда вложение $H^1_0(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ перестанет выполняться вследствие постепенного сужения пространства $L_q(\Omega)$ с ростом $q$. Полученные результаты показывают, что при переходе через это критическое значение параметра $\rho$ свойства уравнения (1) меняются скачком: малое изменение этого параметра сопровождается потерей дифференцируемости решения уравнения по коэффициенту $v$. Можно предположить, что в действительности свойства уравнения с изменением показателя нелинейности меняются не так резко, но для обнаружения этого эффекта аппарат классических производных оказывается слишком грубым.

Отсутствие дифференцируемости функции состояния по управлению было установлено в [18] для системы, описываемой нелинейным уравнением эллиптического типа с управлением в свободном члене уравнения. Необходимые условия оптимальности для такой задачи были получены с помощью понятия расширенной производной оператора [17]. Аналогичная методика использовалась также в [15] при исследовании экстремальной задачи для нелинейного эллиптического уравнения с управлением, входящим в коэффициент при функции состояния, но не при ее производных (без доказательства недифференцируемости функции состояния по управлению). Однако наличие управления в главной части оператора уравнения (1) не позволяет вычислить расширенную производную, поскольку в последней (как и в производной Гато) варьирование направлений осуществляется по всему пространству (точнее, подпространству, см. ниже), а не по его собственному подмножеству допустимых управлений. Для преодоления этих трудностей естественно воспользоваться комбинированным понятием, сочетающим в себе особенности производной по выпуклому множеству и расширенной производной.

## 5. Расширенная производная по выпуклому множеству

Оператор $L : V \to Y$, связывающий соответствующие банаховы пространства, называется $(V_1, V_2, Y_1, Y_2)$-*расширенно дифференцируемым* [17] (или просто расширенно дифференцируемым) в точке $u \in V$, если существуют такие банаховы пространства $V_1$, $V_2$, $Y_1$, $Y_2$, удовлетворяющие непрерывным вложениям $V_1 \subset V_2 \subset V$, $Y \subset Y_2 \subset Y_1$, и такой линейный непрерывный оператор $D : V_2 \to Y_2$, что при $\sigma \to 0$ имеет место сходимость $[L(u+\sigma h) - Lu]/\sigma \to Dh$ в $Y_1$ для всех $h \in V_1$. Если речь идет о функционалах, то $Y_1 = Y = \mathbb{R}$, т. е. расширенная производная функционала отличается от классической лишь своей областью определения. Очевидно, при $V_1 = V, Y_1 = Y$

приходим к классической производной Гато, но в общем случае возможно существование расширенной производной оператора и в отсутствии производной Гато [19]. Однако использование расширенной производной зависимости решения уравнения (1) от управления в данном случае не представляется возможным, поскольку вне зависимости от выбора пространства $V_1$ при некоторых направлениях $h \in V_1$ точка $u+\sigma h$ может принимать отрицательные значения, которые не допустимы. В этой связи естественно воспользоваться понятием, сочетающим в себе свойства расширенной производной и производной по выпуклому множеству.

**Определение 2.** Оператор $L : V \to Y$ назовем $(V_1, Y_1, V_2, Y_2)$-*расширенно дифференцируемым по выпуклому подмножеству* $U$ пространства $V$ в точке $u \in U$, если существуют такие банаховы пространства $V_1$, $V_2$, $Y_1$, $Y_2$, удовлетворяющие непрерывным вложениям $V_1 \subset V_2 \subset V$, $Y \subset Y_2 \subset Y_1$, и такой линейный непрерывный оператор $D : V_2 \to Y_2$, что при $\sigma \to 0$ имеет место сходимость $[L(u+\sigma(v-u)) - Lu]/\sigma \to D(v-u)$ в $Y_1$ для всех $v \in U \cap (u+V_1)$.

При $U = V$ расширенная производная по $U$ совпадает с обычной расширенной производной, а при $V_1 = V$, $Y_1 = Y$ — с производной, характеризуемой определением 1.

**Теорема 5.** *Если функционал $I$ имеет расширенную производную $I'(u)$ по выпуклому множеству $U$ в точке $u \in U$ этого множества, то необходимым условием его минимума на этом множестве в данной точке будет вариационное неравенство*

$$\langle I'(u), v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U \cap (u+V_1).$$

Для обоснования этого результата достаточно в доказательстве теоремы 2 выбирать варьируемые направления из соответствующего более узкого класса функций. Аналогично, заменяя в теореме 3 обычные производные на расширенные с соответствующим изменением функциональных пространств, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 6.** *Пусть отображение $v \to y(v)$ $(V_1, Y_1, V_2, Y_2)$-расширенно дифференцируемо по множеству $U$ в точке $u$, функционал $J$ обладает $(V_1, \mathbb{R}, V_2, \mathbb{R})$-расширенной производной $J_1'(u,y)$ по множеству $U$ и $(Y_1, \mathbb{R}, Y_2, \mathbb{R})$-расширенной производной в точке $(u,y)$, где $y = y(u)$ и решение сопряженного уравнения (3), удовлетворяющее включениям $A_1'(u,y)^*p \in V_1'$, $A_2'(u,y)^*p \in Y_2'$, существует. Для того чтобы точка $u$ была решением задачи $Q$, необходимо, чтобы выполнялось соотношение*

$$\langle J_1'(u,y) + A_1'(u,y)^*p, v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U \cap (u+V_1). \tag{9}$$

Докажем расширенную дифференцируемость решения уравнения (1) по управлению. Определим пространство $Y_1 = H_0^1$, а под $Y_2(U)$ будем понимать множество функций $\varphi \in Y_1$, удовлетворяющих включению $|y(u)|^{\rho/2}\varphi \in L_2(\Omega)$.

**Лемма 4.** *В любой точке $u \in U$ отображение $v \to y(v)$ для уравнения (1) имеет $(V, Y_1, V, Y_2(u))$-расширенную производную $y'(u)$ по множеству $U$, удовлетворяющую условию*

$$\int_\Omega \mu y'(u)(v-u)dx = \int_\Omega (v-u)\nabla y \nabla p_\mu dx \quad \forall v \in U, \quad \mu \in Y_2(u)', \tag{10}$$

*где $p_\mu$ — решение однородной задачи Дирихле для уравнения*

$$-\operatorname{div}(u\nabla p_\mu) + (\rho+1)|y(u)|^\rho p_\mu = \mu. \tag{11}$$

**Доказательство.** Для произвольной функции $v \in U$ справедливо равенство

$$-\operatorname{div}[v_\sigma \nabla(y_\sigma - y)] + g(\sigma)^2(y_\sigma - y) = \sigma \operatorname{div}[(v-u)\nabla y],$$

где $v_\sigma = u + \sigma(v-u)$, $y_\sigma = y(v_\sigma)$, $g(\sigma)^2 = (\rho+1)|y+\varepsilon(y_\sigma - y)|^\rho$, $\varepsilon \in [0,1]$. Умножая предыдущее соотношение на достаточно гладкую функцию $\lambda$, обращающуюся в нуль на границе области $\Omega$, после интегрирования по $\Omega$ с учетом формулы Грина будем иметь

$$\int_\Omega [-\operatorname{div}(v_\sigma \nabla\lambda) + g(\sigma)^2\lambda](y_\sigma - y)dx = \sigma \int_\Omega (u-v)\nabla y\,\nabla\lambda\,dx. \tag{12}$$

Рассмотрим однородную задачу Дирихле для уравнения

$$-\operatorname{div}(v_\sigma \nabla p) + g(\sigma)^2 p = \mu. \tag{13}$$

Умножая это равенство на функцию $p$ и интегрируя формально результат по области $\Omega$ с учетом определения множества $U$, получаем неравенство

$$\int_\Omega |\nabla p|^2 dx + \int_\Omega |g(\sigma)p|^2 dx \le \int_\Omega \mu p\,dx.$$

Зададим пространство $P(\sigma)$, состоящее из всех функций $p \in Y_1$, удовлетворяющих включению $g(\sigma)p \in L_2(\Omega)$. Квадрат нормы функции $p$ в этом пространстве положим равным левой части последнего неравенства. Тогда для любого $\mu \in P(\sigma)'$ уравнение (13) допускает априорную оценку решения в пространстве $P(\sigma)$. Пользуясь классической теорией линейных эллиптических уравнений ([10], с. 53), установим, что при указанных условиях это уравнение имеет единственное решение $p = p_\mu(\sigma)$ из класса $P(\sigma)$. Отметим, что $p_\mu(0) = p_\mu$, $P(0) = Y_2(u)$. Таким образом, соотношение (10) действительно определяет некоторый линейный непрерывный оператор $y'(u) : V \to Y_2(u)$. Определив в равенстве (12) $\lambda = p_\mu(\sigma)$, приходим к соотношению

$$\int_\Omega \mu \frac{y_\sigma - y}{\sigma} dx = \int_\Omega (u-v)\nabla y \nabla p_\mu(\sigma) dx \quad \forall v \in U, \quad \sigma \in (0,1), \quad \mu \in P(\sigma)'.$$

Отсюда и из условия (10) следует равенство

$$\int_\Omega \mu[(y_\sigma - y)/\sigma - y'(u)(v-u)]dx = \int_\Omega (u-v)\nabla y \nabla[p_\mu(\sigma) - p_\mu]dx \quad \forall v \in U, \quad \sigma \in (0,1), \quad \mu \in Y_1'.$$

В результате получаем оценку

$$\|(y_\sigma - y)/\sigma - y'(u)(v-u)\|_{Y_1} \le \sup_{\mu \in M} \left| \int_\Omega (u-v)\nabla y \nabla[p_\mu(\sigma) - p_\mu]dx \right| \quad \forall v \in U, \quad \sigma \in (0,1), \tag{14}$$

где $M$ — множество всех функций класса $Y_1'$ единичной нормы.

Пусть теперь имеет место сходимость $\sigma \to 0$. Тогда $v_\sigma \to u$ в $V$, а значит, $y_\sigma \to y$ слабо в $Y$, поскольку отображение $v \to y(v)$ слабо непрерывно (см. доказательство теоремы 1). Пользуясь описанной выше методикой, установим равномерную по $\mu \in M$ ограниченность семейств $\{p_\mu(\sigma)\}$ и $\{g(\sigma)p_\mu(\sigma)\}$ в пространствах $H_0^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно. Учитывая слабую сходимость семейства $\{y_\sigma\}$ в пространстве $L_q(\Omega)$, установим его ограниченность в этом пространстве. В результате заключаем, что $\{g(\sigma)\}$ ограничено в пространстве $L_{2q/\rho}(\Omega)$, что позволяет получить равномерную по $\mu \in M$ ограниченность семейства $\{g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma)\}$ в пространстве $L_{q'}(\Omega)$. Применяя теорему Банаха–Алаоглу, после выделения подпоследовательностей с сохранением для них исходного обозначения, установим сходимость $p_\mu(\sigma) \to \alpha$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ и $g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) \to \beta$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$ равномерно по $\mu \in M$. Применяя теорему Реллиха–Кондрашова, установим, что $y_\sigma \to y$ и $p_\mu(\sigma) \to \alpha$ сильно в $L_2(\Omega)$ и п. в. на $\Omega$, откуда следует, что $g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) \to (\rho+1)|y|^\rho \alpha$ п. в. на $\Omega$. Пользуясь леммой 1.3 ([19], с. 25), установим, что $g(\sigma)^2 p_\mu(\sigma) \to (\rho+1)|y|^\rho \alpha$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$.

Для любой функции $\lambda \in H_0^1(\Omega)$ справедливо соотношение

$$\int_\Omega \left| v_\sigma \frac{\partial\lambda}{\partial x_i} - u\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} \right|^2 dx = \sigma^2 \int_\Omega (v-u)^2 \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right)^2 dx \le 4b^2\sigma^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\right|^2 dx,$$

откуда следует, что $v_\sigma \partial\lambda/\partial x_i \to u\partial\lambda/\partial x_i$ сильно в $L_2(\Omega)$. Умножая равенство (13) с $p = p_\mu(\sigma)$ на функцию $\lambda \in Y$, интегрируя результат по области $\Omega$ и переходя к пределу при $\sigma \to 0$, заключаем, что $\alpha = p_\mu$, а значит, имеет место сходимость $p_\mu(\sigma) \to p_\mu$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ равномерно по $\mu \in M$. Переходя к пределу в равенстве (14) с учетом включения $(u - v)\partial y/\partial x_i \in L_2(\Omega)$ в силу определения множества $U$, заключаем, что оператор $y'(u)$ действительно является искомой расширенной производной. $\square$

**Теорема 7.** *Утверждения теоремы* 4 *остаются в силе для всех значений параметров* $\rho$ *и* $n$.

Действительно, в данном случае функционал $J$ и оператор $A$ оказываются дифференцируемыми в классическом смысле. При $\mu = \Delta y_d - \Delta y$ уравнения (7) и (11) совпадают, причем функциональных свойств решения сопряженного уравнения достаточно для справедливости соответствующих условий теоремы 6. В силу равенства $V_1 = V$ в условии (9) варьирование осуществляется по множеству $U$. Тогда соотношение (9) принимает вид (4), а переход оттуда к вариационному неравенству (6) доказывается так же, как в теореме 4.

Итак, использование расширенной производной по выпуклому множеству позволяет установить необходимые условия оптимальности всюду, где действует теорема существования решения изучаемой оптимизационной задачи, что невозможно осуществить на основе известных методов оптимизации [1]–[16]. При этом получаемый результат для конкретной задачи является прямым следствием соответствующей общей теоремы, поэтому возможно получение аналогичных результатов для других экстремальных задач, в частности, для параболических уравнений с управлением в главной части оператора. Попутно отметим, что лемма 4 позволяет прояснить истинные свойства зависимости решения уравнения (1) от коэффициента $v$. Эта зависимость оказывается дифференцируемой в указанном смысле всегда. Просто с ростом показателя нелинейности при большой размерности области $\Omega$ пространства, входящие в определение расширенной производной, все сильнее отличаются от пространств, в которых действует исходный оператор. Тем самым при плавном изменении параметра уравнения свойства его решения (в смысле зависимости от $v$) также меняются плавно, что невозможно обнаружить с помощью более грубого аппарата классических операторных производных.

## Литература


1. Алифанов О.М. *Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов.* – М.: Машиностроение, 1979. – 216 с.
2. Арман Ж.П. *Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций.* – М.: Мир, 1977. – 142 с.
3. Литвинов В.Г. *Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике.* – М.: Наука, 1987. – 366 с.
4. Tiba D. *New results in shape optimizations* // Math. Repts. – 2003. – V. 5. – № 4. – P. 389–398.
5. Murat F. *Thèoremes de non-existènce pour des problèmes de contrôle dans les coefficients* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1972. – № 5. – P. A395–A398.
6. Lions J.-L. *Some aspects of the optimal control of distributed parameter systems* // Philadelpia. Soc. Ind. Appl. Math. – 1972. – 92 p.
7. Tartar L. *Problèmes de contrôle des coefficients dans les equations aux derivees partielles* // Lect. Notes Econom. and Math. Syst. – 1977. – V. 107. – P. 420–426.
8. Pucci C. *Un problema variazionale per I coefficienti di equazioni differenziali di tipo ellittico* // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. – 1962. – V. 16. – P. 159–172.
9. Zolezzi T. *Necessary conditions for optimal controls of elliptic or parabolic problems* // SIAM J. Control. – 1972. – V. 10. – № 4. – P. 594–607.
10. Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* – М.: Мир, 1972. – 416 с.
11. Baranger J. *Quelque resultants en optimization non convexe.* – Thèse, Grenoble, 1973. – 174 p.

12. Goedel M. *Optimal control of coefficient in linear elliptic equations* // Math. Oper. Stad. Optim. – 1981. – V. 12 – № 4. – P. 525–533.
13. Райтум У.Е. *Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений.* – Рига: Зинатне, 1989. – 280 с.
14. Иваненко В.И., Мельник В.С. *Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами.* – Киев: Наук. Думка, 1989. – 284 с.
15. Серовайский С.Я. *Оптимизация в нелинейных эллиптических системах с управлением в коэффициентах* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 54. – № 2. – С. 85–95.
16. Лубышев Ф.В., Файрузов М.Э. *Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2001. – Т. 41. – № 8. – С. 1148–1164.
17. Серовайский С.Я. *Дифференцирование обратной функции в ненормированных пространствах* // Функц. анализ и его прил. – 1993. – Т. 27. – № 4. – С. 84–87.
18. Серовайский С.Я. *Необходимые условия экстремума в случае недифференцируемости функции состояния по управлению* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 6. – С. 1055–1059.
19. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
20. Авербух В.И., Смолянов О.Г. *Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах* // УМН. – 1967. – Т. 22. – Вып. 6. – С. 201–260.
21. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 742 с.

*Казахский национальный университет*

*Поступила* 07.06.2005