ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 7 (518)

УДК 517.984

Ю.Т. СИЛЬЧЕНКО

ПОЛУГРУППЫ С НЕПЛОТНО ЗАДАННЫМ ПРОИЗВОДЯЩИМ ОПЕРАТОРОМ

1. Пусть E — банахово пространство, A — заданный линейный оператор с областью определения $D \subset E, f(t)$ — заданная непрерывная при $t > 0$ функция со значениями в E и v_0 — заданный элемент из E. Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$v' + Av = f(t) \quad (0 < t \leq 1), \quad v(0) = v_0.$$

Эта задача обычно изучается методами полугрупп линейных ограниченных операторов, при этом используются различные классы полугрупп. В работах [1], [2] была использована полугруппа класса $A(\alpha, \beta)$, она имеет в нуле особенность $t^{-\alpha}$, ее производная — $t^{-\beta}$ и строится по неплотно заданному оператору. Операторы с неплотными областями определения изучались в [3], [4], возникающие при этом полугруппы строятся с помощью резольвенты соответствующего оператора, эти полугруппы, как правило, ограничены в нуле ($\alpha = 0$) или имеют согласованные особенности ($\beta = 1 + 2\alpha$). Полугруппы с особенностями в нуле (полугруппы роста α) без использования свойств резольвенты изучались в [5], но в случае плотной области определения соответствующего оператора.

В данной работе исследуется полугруппа более общего вида, чем $A(\alpha, \beta)$, а также ее производящий оператор, причем соответствующие операторы неплотно заданы. Устанавливается ряд свойств указанной полугруппы. Они отвечают соответствующим свойствам сильно непрерывных полугрупп, но отличны от них.

Примеры таких полугрупп имеются в [1], [2].

2. Пусть D — линейное множество в E, $U(t)$ — заданная оператор-функция ($t > 0$) со значениями в $L(E)$ ($L(E)$ — пространство линейных ограниченных операторов), для которой выполнены следующие условия:

1) $U(t) : E \to D$;
2) $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)$ $(t_1, t_2 > 0)$;
3) $\lim\limits_{t \to +0} U(t)x = x$ для $x \in D$;
4) $\|U(t)\| \leq \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная при $t > 0$ функция.

Эту оператор-функцию будем называть полугруппой класса $A(\varphi)$.

Приведенные условия отличны от обычно используемых, например, авторами работ [3]–[6]. Отметим также, что $A(\alpha, \beta) \subset A(\varphi)$, если $\varphi(t) = t^{-\alpha}$.

В последующих леммах устанавливаются некоторые свойства введенной оператор-функции.

Лемма 1. *При $t > 0$ полугруппа $U(t)$ сильно непрерывна.*

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$[U(t + s) - U(t)]x = [U(s) - I]U(t)x \quad (s > 0)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00141) и гранта № НШ-1643.2003.1.

и неравенство

$$\|[U(t)-U(t-s)]\| = \|U(t/2-s)[U(s)-I]U(t/2)x\| \leq \varphi(t/2-s)\|[U(s)-I]U(t/2)x\|, \quad 0<s<t/2.$$

Из них при $s \to 0$ вытекает непрерывность справа и слева оператор-функции $U(t)$, а, следовательно, и сильная непрерывность. $\square$

Лемма 2. $\lim\limits_{t\to+0} t^{-1}\int\limits_0^t U(s)x\,ds = x$ *для* $x \in D$.

Это свойство вытекает из соотношения

$$t^{-1}\int_0^t U(s)x\,ds - x = t^{-1}\int_0^t [U(s)-I]x\,ds$$

и условия 3).

Введем множество $D_0 = \{x \in E : \exists \lim\limits_{t\to+0} \frac{U(t)-I}{t}x\}$ и для $x \in D_0$ определим линейный оператор $A_0x = \lim\limits_{t\to+0} t^{-1}[U(t)-I]x$.

Отметим, что для элементов из D_0 имеем $\lim U(t)x = x$ при $t \to +0$.

Лемма 3. *Для любого* $x \in E$ *и* $0<a<b$

$$\int_a^b U(s)x\,ds \in D_0.$$

Доказательство. Пользуемся равенством

$$\frac{U(t)-I}{t}\int_a^b U(s)x\,ds = \frac{1}{t}\int_b^{b+t} U(s)x\,ds - \frac{1}{t}\int_a^{a+t} U(s)x\,ds.$$

Здесь справа при $t \to +0$ существует предел, поэтому выполнено утверждение леммы и $A_0\int\limits_a^b U(s)x\,ds = [U(b)-U(a)]x$. $\square$

Лемма 4. *Для* $x \in D_0$ *функция* $x(t) = U(t)x$ *непрерывно дифференцируема при* $t > 0$ *и* $x'(t) = A_0x(t)$, $x(0) = x$.

Доказательство. Рассмотрим равенства

$$\frac{x(t+s)-x(t)}{s} = \frac{U(t+s)-U(t)}{s}x = \frac{U(s)-I}{s}U(t)x = U(t)\frac{U(s)-I}{s}x, \quad s>0.$$

Последнее выражение имеет предел при $s \to +0$. Поэтому существуют пределы в других частях равенства, откуда следует утверждение леммы и соотношение

$$x'(t) = \frac{dU(t)x}{dt} = A_0U(t)x = U(t)A_0x = A_0x(t). \quad \square$$

Лемма 5. $D \subset \overline{D}_0$, *где* $\overline{D}_0$ *– замыкание* D_0.

Доказательство. Пусть $x \in D$. Положим $x_n = n\int\limits_0^{1/n} U(t)x\,dt$. Рассмотрим равенство

$$\frac{U(s)-I}{s}x_n = \frac{n}{s}\left\{\int_0^{1/n} U(s+t)x\,dt - \int_0^{1/n} U(t)x\,dt\right\} =$$

$$= \frac{n}{s}\left\{\int_{1/n}^{1/n+s} U(t)x\,dt - \int_0^{s} U(t)x\,dt\right\}, \quad 0<s<1/n.$$

Здесь правая часть имеет предел при $s \to +0$, поэтому $x_n \in D_0$. В силу леммы 2 $x_n \to x$, поэтому $x \in \overline{D}_0$. $\square$

Лемма 6. *Пусть в условии 4) функция $\varphi(t)$ такова, что $\int\limits_0^1 \varphi(t)dt < \infty$. Тогда оператор A_0 замкнут в множестве D, именно, если $x_n \in D_0$, $x_n \to x$ и $A_0 x_n \to y$, где $y \in D$, то $x \in D_0$ и $A_0 x = y$.*

Доказательство. Из леммы 4 для элементов $x_n \in D_0$ вытекает равенство

$$\frac{U(t) - I}{t} x_n = \frac{1}{t} \int_0^t U(s) A_0 x_n ds,$$

в котором можно перейти к пределу при $n \to \infty$. В пределе получим

$$\frac{U(t) - I}{t} x = \frac{1}{t} \int_0^t U(s) y \, ds.$$

Поскольку $y \in D$, то у правой части последнего равенства есть предел при $t \to +0$. Поэтому $x \in D_0$ и $Ax_0 = y$. $\square$

Выше были введены множества D, D_0, $\overline{D}_0$. Приведем пример, показывающий, что эти множества могут быть различны.

Пусть E — пространство сдвоенных последовательностей $v = \{x_n, y_n\}_1^\infty$, для которых конечна норма $\|v\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{1/2}|x_n| + |y_n|)$ и $L = \{v \in E : x_1 = y_1 = 0\}$ — подпространство в E.

Положим

$$U(t)v = \{0, 0; (x_n \cos nt - y_n \sin nt) \exp(-nt + in^{3/2}t), (x_n \sin nt + y_n \cos nt) \exp(-nt + in^{3/2}t)\}_2^\infty,$$

$$D = \left\{ v \in L : \sum_{n=2}^{\infty} n^q (n^{1/2}|x_n| + |y_n|) < \infty \right\}, q \geq 1/2.$$

Оператор-функция $U(t)$ действует из E в D. Действительно,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^q [n^{1/2}|x_n \cos nt - y_n \sin nt| e^{-nt} + |x_n \sin nt + y_n \cos nt| e^{-nt}] \leq$$

$$\leq 2 \sum_{n=2}^{\infty} n^{1/2+q} e^{-nt} (|x_n| + |y_n|) \leq 2[(1/2 + q)e^{-1}t^{-1}]^{q+\frac{1}{2}} \|v\|.$$

Непосредственным перемножением устанавливается полугрупповое свойство 2). Проверим свойство 3). Для этого рассмотрим норму

$$\|U(t)v - v\| = \sum_{n=2}^{\infty} \{n^{1/2}|(x_n \cos nt - y_n \sin nt) \exp(-nt + in^{3/2}t) - x_n| +$$

$$+ |(x_n \sin nt + y_n \cos nt) \exp(-nt + in^{3/2}t) - y_n|\}.$$

Этот ряд допускает оценку

$$3 \sum_{n=2}^{\infty} n^{1/2} (|x_n| + |y_n|) \leq 3 \sum_{n=2}^{\infty} n^q (n^{1/2}|x_n| + |y_n|).$$

Поэтому для элементов v из D соответствующий функциональный ряд сходится равномерно и можно переходить к пределу при $t \to +0$.

Отметим, что $\|U(t) - I\| \geq \frac{1}{e\sqrt{2t}} \sin \frac{1}{2}$ при $0 < t \leq \frac{1}{2}$.

Наконец, $\|U(t)\| \le 2(2et)^{-1/2}$, эта оценка является точной, следовательно, свойство 4) полугруппы выполнено с функцией $\varphi(t) = 2(2et)^{-1/2}$. Таким образом, имеем полугруппу класса $A(\varphi)$ с указанной функцией $\varphi(t)$. Для этой полугруппы

$$A_0 v = U'(0)v = \{0, 0; (in^{3/2} - n)x_n - ny_n, nx_n + (in^{3/2} - n)y_n\}_2^\infty,$$

$$D_0 = \left\{ v \in L : \sum_{n=2}^{\infty} \{n^{1/2}|(in^{3/2} - n)x_n - ny_n| + |nx_n + (in^{3/2} - n)y_n|\} < \infty \right\}.$$

Очевидно, что D_0 состоит из тех и только тех элементов, для которых

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{3/2}(n^{1/2}|x_n| + |y_n|) < \infty.$$

Поэтому $D_0 \subset D$ при $q \in [1/2, 3/2)$, $D \subset D_0$ при $q > 3/2$ и $D = D_0$ при $q = 3/2$. Отметим также, что $\overline{D} = \overline{D}_0 = L$. Действительно, для любого элемента $v = \{x_n, y_n\}_2^\infty \in L$ последовательность $v_k = \{0, 0; x_2, y_2; \dots; x_k, y_k; \frac{x_{k+1}}{(k+1)^q}, \frac{y_{k+1}}{(k+1)^q}; \frac{x_{k+2}}{(k+2)^q}, \frac{y_{k+2}}{(k+2)^q}; \dots\}$ принадлежит D и $v_k \to v$, что и означает плотность D в L. Для D_0 рассуждения аналогичны.

3. Пусть D — область определения $D = D(A)$ некоторого заданного линейного оператора A, действующего в E. Пусть этот оператор связан с введенной в п. 2 полугруппой $U(t)$ условием

5) $U(t)$ дифференцируема в норме $L(E)$ и $U'(t) = AU(t)$ $(t > 0)$.

Установим связь между операторами A и A_0. Для этого рассмотрим равенство

$$U(t)x - U(s)x = \int_s^t U'(\tau)x\,d\tau = \int_s^t AU(\tau)x\,d\tau, t > s > 0,$$

вытекающее из свойства 5). Пусть $x \in D_0$, тогда в левой части s можно устремить к нулю $(U(s)x \to x)$. В результате получим соотношение

$$\frac{U(t) - I}{t} x = \frac{1}{t} \int_0^t AU(\tau)x\,d\tau,$$

здесь слева существует предел при $t \to +0$, поэтому

$$A_0 x = \lim \frac{1}{t} \int_0^t AU(\tau)x\,d\tau.$$

Далее будем предполагать существование ограниченного обратного оператора A^{-1}. Тогда

$$A^{-1}A_0 x = \lim \frac{1}{t} \int_0^t U(\tau)x\,d\tau = x.$$

Это означает, что $x \in D$, $A_0 x = Ax$ для $x \in D$ и $D_0 \subset D$. Поэтому $A_0 = A$ на D_0.

Следствием последнего равенства в силу леммы 3 является коммутируемость операторов A и $U(t)$ на D при $t > 0$.

Лемма 7. *Оператор-функция $U(t)$ бесконечно дифференцируема при $t > 0$ в норме $L(E)$.*

Доказательство. Рассмотрим равенства $U'(t)=AU(t)=U(t-\varepsilon)AU(\varepsilon)=U(t-\varepsilon)U(\varepsilon/2)AU(\varepsilon/2)$ $(0 < \varepsilon < t)$, из которых следуют соотношения

$$U''(t) = U'(t-\varepsilon)U(\varepsilon/2)AU(\varepsilon/2) = AU(t-\varepsilon)U(\varepsilon/2)AU(\varepsilon/2) = A^2U(t) = U(t-\varepsilon)U(\varepsilon/2)A^2U(\varepsilon/2).$$

Последнее выражение можно дифференцировать еще раз и т. д. Это и означает бесконечную дифференцируемость полугруппы $U(t)$. В частности, отсюда следует ее непрерывность в норме $L(E)$ при $t > 0$. $\square$

Лемма 8. *Пусть полугруппа класса* $A(\varphi)$ (*т. е. выполнены условия* 1)–4)) *удовлетворяет условиям* $\int\limits_0^1 \varphi(t)dt < \infty$, $\varphi(t)$ — *ограничена на бесконечности. Тогда в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *у оператора* $\lambda - A_0$ *на множестве* $\overline{D}_0$ *имеется ограниченный обратный оператор и*

$$(\lambda - A_0)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt, \quad x \in \overline{D}_0. \tag{1}$$

Доказательство. Положим

$$\mathcal{R}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)dt. \tag{2}$$

Этот интеграл сходится абсолютно при $\operatorname{Re}\lambda > 0$, поскольку $\|e^{-\lambda t}\ U(t)\| \le e^{-t\operatorname{Re}\lambda}\varphi(t)$. Для элемента $y \in D_0$

$$\mathcal{R}(\lambda)A_0y = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)A_0y\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}U(t)A_0y\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}[U(t)y]dt =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[e^{-\lambda t}U(t)y\Big|_\varepsilon^\infty + \lambda\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}U(t)y\,dt\right] = -y + \lambda\mathcal{R}(\lambda)y.$$

Это означает, что $\mathcal{R}(\lambda)(\lambda - A_0)y = (\lambda - A_0)\mathcal{R}(\lambda)y = y$. Далее, для любого $x \in \overline{D}_0$ имеется последовательность $\{y_n\} \subset D$, которая сходится к x. Тогда $(\lambda - A_0)\mathcal{R}(\lambda)y_n = y_n \to x$. Положим $\mathcal{R}(\lambda)y_n = x_n$. При этом $(\lambda - A_0)x_n = y_n \to x$. Таким образом, $x_n \to \mathcal{R}(\lambda)x$, $(\lambda - A_0)x_n \to x$.

В силу замкнутости оператора A_0 (леммы 5, 6) имеем равенство

$$(\lambda - A_0)\mathcal{R}(\lambda)x = \mathcal{R}(\lambda)(\lambda - A_0)x = x \quad \forall x \in \overline{D}_0.$$

Поэтому на $\overline{D}_0$ у оператора $\lambda - A_0$ существует ограниченный обратный, задаваемый формулой (1). $\square$

Отметим, что если $\varphi(t) = t^{-\alpha}$ и $0 \le \alpha < 1$, то

$$\|(\lambda - A_0)^{-1}x\| \le M(\operatorname{Re}\lambda)^{\alpha-1}\|x\|, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Лемма 9. *Пусть у оператора* A, *введенного в п.* 3, *при* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *существует резольвента* $(\lambda - A)^{-1}$. *Тогда допускается расширение*

$$(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - A_0)^{-1}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим оператор-функцию (2). Для элементов $y \in D$, поскольку $D \subset \overline{D}_0$,

$$\mathcal{R}(\lambda)Ay = -y + \lambda\mathcal{R}(\lambda)y.$$

Для произвольного $x \in E$ положим $y = (\lambda - A)^{-1}x$, тогда $y \in D$ и

$$\mathcal{R}(\lambda)A(\lambda - A)^{-1}x = -(\lambda - A)^{-1}x + \lambda\mathcal{R}(\lambda)(\lambda - A)^{-1}x. \tag{3}$$

Кроме того,

$$\mathcal{R}(\lambda)A(\lambda - A)^{-1}x = -\mathcal{R}(\lambda)x + \lambda\mathcal{R}(\lambda)(\lambda - A)^{-1}x. \tag{4}$$

Из соотношений (3), (4) вытекает

$$(\lambda - A)^{-1}x = \mathcal{R}(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U(t)x\,dt, \quad x \in E.$$

С другой стороны, для $x \in \overline{D}_0$ $(\lambda - A)^{-1}x = (\lambda - A_0)^{-1}x$. $\square$

Отметим, что если $\varphi(t) = t^{-\alpha}$ и $0 \le \alpha < 1$, то

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \le M(\operatorname{Re}\lambda)^{\alpha-1} \text{ при } \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Замечание. Утверждение остается верным, если $\operatorname{Re}\lambda > w$, где $w > 0$ — некоторое число.

Литература

1. Сильченко Ю.Т. *Об одном классе полугрупп* // Функц. анализ и его прилож. – 1999. – Т. 33. – № 4. – С. 90–93.
2. Silchenko J.T. *Differential equations with non-densely defined operator coefficients, generating semigroups with singularities* // Nonlinear Anal. – Oxford. – 1999. – Pergamon. – V. 36. – P. 353–368.
3. Da Prato G., Sinestrari E. *Differential operators with nondense domain* // Annali della Scvova normale Superiore. – Di Pisa. – 1987. – V. 14. – P. 283–344.
4. Yakubov S., Yakubov Ya. *Differential-operator equations.* – Berlin, New York: V. 103 in the Chapman/Hall/CRC, 1999. – 576 p.
5. Соболевский А.Е. *О полугруппах роста* α // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196. – № 3. – С. 535–537.
6. Хилле Э., Филлипс З. *Функциональный анализ и полугруппы.* – М.: Ин. лит., 1962. – 829 с.

Воронежский государственный университет

Поступила 05.02.2003