ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 10 (545)

УДК 514.762

В.В. ГОЛЬДБЕРГ, В.В. ЛЫЧАГИН

АБЕЛЕВЫ УРАВНЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ РАНГА ДЛЯ ПЛОСКИХ ТКАНЕЙ

1. Введение

В работе [1] (см. также [2] и [3]) Боль доказал, что ранг плоской d-ткани не превосходит $(d-1)(d-2)/2$. В [4] Чжень поставил следующую задачу: "найти все плоские d-ткани, максимальный ранг которых равен $(d-1)(d-2)/2$, $d \geqq 5$".

В данной работе авторы находят инвариантную характеристику плоских d-тканей максимального ранга и приводим подробное описание таких тканей в случаях $d = 4, 5$. Это — первый шаг к решению сформулированной выше задачи Чженя.

Хорошо известно, что геометрия 4-ткани определяется кривизной K одной из ее 3-подтканей, основным инвариантом a и (ковариантными) производными кривизны K и инварианта a. 4-ткани максимального ранга характеризуются двумя способами. Во-первых, такая ткань имеет инвариантную аналитическую характеристику: *плоская 4-ткань имеет максимальный ранг тогда и только тогда, когда кривизна K одной из ее 3-подтканей и ковариантные производные K_3 и K_4 кривизны K выражаются через основной инвариант a 4-ткани и ковариантные производные этого инварианта до третьего порядка включительно по формулам, приведенным в формулировке теоремы* 7. Во-вторых, плоская 4-ткань максимального ранга может быть охарактеризована чисто геометрически: *плоская 4-ткань имеет максимальный ранг тогда и только тогда, когда она линеаризуема и ее кривизна обращается в нуль* (теорема 8). Заметим, что кривизна 4-ткани есть взвешенная сумма кривизн ее четырех 3-подтканей.

Насколько авторам известно, данные результаты впервые внутренним образом описывают 4-ткани максимального ранга, выражая свойство ткани иметь максимальный ранг только через инварианты ткани.

Заметим еще, что в работах Доу [5], [6] изучалась проблема ранга плоской 4-ткани, однако найденные им условия не были ни инвариантными, ни эффективными. Поэтому В.Бляшке (который был знаком с результатами Доу) в своей книге [3] (§ 48, задача A_2) перечислил среди нерешенных задач и такую: "найти инвариантные условия того, что плоская 4-ткань имеет ранг 1, 2 или 3".

Полученная авторами характеристика плоских 4-тканей максимального ранга, вместе с характеристикой плоских 4-тканей ранга два и один, дают полное решение задачи Бляшке. Условия, которые авторам удалось найти, являются как инвариантными, так и эффективными, и используются в нескольких примерах.

Пантази [7] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы плоская ткань имела максимальный ранг. За работой [7] последовали статьи [8] и [9]. В [10] Пирио дал более подробное изложение результатов Пантази, опубликованных в [7] и [8], и результатов Михайлеану [9]. Характеристика тканей максимального ранга в [7] и [8] формулируется без использования инвариантов ткани.

Заметим также, что, хотя геометрическое описание плоских 4-тканей максимального ранга и было известно (каждая такая ткань алгебраизуема, т. е. она эквивалентна 4-ткани, образованной касательными к алгебраической кривой четвертого порядка [2], § 27), их инвариантная

характеристика была неизвестна.

Из теоремы 8 вытекают интересные следствия для геометрии тканей. В частности, из этой теоремы немедленно следует теорема Пуанкаре (следствие 2). Классическая теорема Пуанкаре утверждает, что *плоская 4-ткань максимального ранга линеаризуема.* Из наших результатов эта теорема следует очевидным образом, т. к. условия линеаризуемости являются частью условий максимальности ранга (см. теорему 8). Теорема Пуанкаре упоминалась в монографиях ([2], § 27, с. 239, и [3], § 44). Отметим, что эта теорема носит имя Пуанкаре, т. к. она тесно связана с отображением Пуанкаре [11], которое широко используется при исследовании проблемы ранга ткани (напр., [12] и [13]). Важно подчеркнуть, что эту теорему можно рассматривать как другую формулировку результата Софуса Ли о поверхностях двойного переноса [14] в терминах тканей. Действительно, в этих терминах результат Ли из [14] можно сформулировать так: любая плоская 4-ткань максимального ранга алгебраизуема (т. е. образована касательными к алгебраической кривой четвертого порядка). Отсюда следует, что 4-ткань максимального ранга линеаризуема (ср., напр., с [3], § 44).

Отметим также, что наше доказательство теоремы Пуанкаре существенно использует недавно найденные нами (совместно с М.А.Акивисом) в [15] условия линеаризуемости.

В данной работе авторы также находят инвариантное описание 4-тканей ранга два и один (теоремы 9 и 10) и доказывают, что, вообще говоря, такие ткани не линеаризуемы (предложения 5 и 6). Используя теорему 8, авторы также доказывают что для линеаризуемой 4-ткани обращение в нуль кривизны не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы она имела максимальный ранг, и что максимальный ранг параллелизуемой 4-ткани также, как и ткани Майергофера, равен 3.

Авторы рассматривают конкретные примеры 4-тканей (примеры 1, 2, 4, 5 и 6) и, применяя теорему 8, устанавливают, что два из них (примеры 1 и 2) являются примерами тканей максимального ранга, две других ткани (примеры 4 и 5) имеют ранг 2, а ранг ткани из примера 6 равен 1. Так как 4-ткани в примерах 4, 5 и 6 не линеаризуемы, то, вообще говоря, 4-ткани ранга два или один не линеаризуемы. Авторы также изучают проблему ранга для плоских 4- и 5-тканей с постоянными основными инвариантами.

2. Основные конструкции для тканей на плоскости

2.1. Плоские d-ткани. d-ткань W_d, $d \geq 3$, в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ определяется d одномерными слоениями, находящимися в общем положении (это значит, что слои любых двух слоений трансверсальны). Набор таких слоений можно задать d функциями (первыми интегралами слоений) $\langle f_1, \ldots, f_d \rangle$ такими, что любые две функции f_i, f_j, $i \neq j$, независимы, или системой дифференциальных 1-форм $\langle \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_d \rangle$ такой, что любые две различные формы из этой системы линейно независимы.

Зафиксируем кобазис $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ и 3-подткань $W_3 = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle$. Формы ω_1, ω_2 и ω_3 можно нормализовать так, чтобы

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Легко доказать, что в этом случае существует единственная дифференциальная 1-форма γ такая, что для всех $i = 1, 2, 3$ выполняются так называемые *структурные уравнения* [15]

$$d\omega_i = \omega_i \wedge \gamma.$$

Форма γ определяет связность Чженя Γ в кокасательном расслоении, которая имеет ковариантный дифференциал

$$d_\Gamma : \omega_i \longmapsto -\omega_i \otimes \gamma.$$

Кривизна этой связности имеет вид $R_\Gamma : \omega_i \longmapsto -\omega_i \otimes d\gamma$. Если записать $d\gamma = K\omega_1 \wedge \omega_2$, то функция K называется *функцией кривизны* 3-ткани W_3.

Заметим, что форма кривизны $d\gamma$ является инвариантом 3-ткани W_3, в то время как функция кривизны K — относительный инвариант ткани.

Масштабное преобразование $\langle\omega_1,\omega_2,\omega_3\rangle \longmapsto \langle\omega_1^s,\omega_2^s,\omega_3^s\rangle$, где s — невырожденная гладкая функция и $\omega_i^s = s^{-1}\omega_i$, сохраняет 3-ткань в том смысле, что тройки $\langle\omega_1,\omega_2,\omega_3\rangle$ и $\langle\omega_1^s,\omega_2^s,\omega_3^s\rangle$ определяют одну и ту же ткань. Структурные уравнения для форм $\langle\omega_1^s,\omega_2^s,\omega_3^s\rangle$ имеют вид $d\omega_i^s = \omega_i^s\wedge\gamma^s$, где $\gamma^s = \gamma + d\ln|s|$, и поэтому $d\gamma = d\gamma^s$.

Если определить функцию кривизны K^s уравнением

$$d\gamma^s = K^s\omega_1^s\wedge\omega_2^s,$$

то $K^s = s^2K$. Это означает, что K — относительный инвариант веса два.

Пусть $\langle\partial_1,\partial_2\rangle$ — базис, двойственный к $\langle\omega_1,\omega_2\rangle$. Положим $\partial_3 = \partial_2 - \partial_1$. Тогда слои 3-ткани W_3 являются траекториями векторных полей ∂_2, ∂_1 и ∂_3.

Обозначим через δ_i ковариантную производную в направлении ∂_i относительно связности Чженя.

Пусть $\gamma = g_1\omega_1 + g_2\omega_2$. Тогда $K = \partial_1(g_2) - \partial_2(g_1)$, и ковариантная производная δ_i действует на функции u веса w следующим образом:

$$\delta_i^{(w)}(u) = \partial_i(u) - wg_iu.$$

В дальнейшем будем опускать верхний индекс, когда вес u известен. Отметим, что ковариантная производная удовлетворяет правилу Лейбница и [20]

$$\delta_2^{(w+1)}\delta_1^{(w)} - \delta_1^{(w+1)}\delta_2^{(w)} = wK.$$

Для d-ткани $W_d = \langle\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_d\rangle$ выберем ω_i, $i\geq 4$, так, чтобы имели место нормализации $a_i\omega_1 + \omega_2 + \omega_{i+2} = 0$ для всех $i = 1,\dots,d-2$ и $a_1 = 1$.

Заметим, что $a_i \neq 0,1$ для $i\geq 2$. Более того, для фиксированного i значение $a_i(x)$, $x\in\mathbb{D}$, функции a_i есть ангармоническое отношение четырех прямых в $T_x^*(\mathbb{D})$, заданных ковекторами $\omega_{1,x}$, $\omega_{2,x}$, $\omega_{3,x}$, $\omega_{i+2,x}$, и поэтому является инвариантом. Функции a_i называются *основными инвариантами* (ср. [16] или [17], с. 302–303).

2.2. Функции ткани. Выберем (локальные) координаты x, y в $\mathbb{D}$ так, чтобы $\omega_1\wedge dx = 0$ и $\omega_2\wedge dy = 0$. Пусть $\omega_3\wedge df = 0$, $\omega_{i+3}\wedge dg_i = 0$, $i = 1,\dots,d-3$, для некоторых функций $f(x,y)$, $g_i(x,y)$.

Используя масштабное преобразование, можно добиться того, что $\omega_3 = df$. Тогда $\omega_1 = -f_xdx$ и $\omega_2 = -f_ydy$.

Двойственный базис $\{\partial_1,\partial_2\}$ имеет вид $\partial_1 = -f_x^{-1}\partial_x$, $\quad\partial_2 = -f_y^{-1}\partial_y$. Форма связности выражается следующим образом: $\gamma = -H\omega_3$, где [20] $g_1 = g_2 = H = \frac{f_{xy}}{f_xf_y}$. Функция кривизны выражается следующим образом: $K = -f_x^{-1}f_y^{-1}(\log(f_xf_y^{-1}))_{xy}$. Тогда основные инварианты ткани выражаются через функции ткани так:

$$a_i = \frac{f_yg_{i+1,x}}{f_xg_{i+1,y}},\quad \text{где } i = 2,\dots,d-2.$$

Определение 1. Плоская d-ткань W_d называется (локально) *параллелизуемой*, если она локально эквивалентна d-ткани, состоящей из параллельных прямых в некоторой области аффинной плоскости $\mathbb{A}^2$.

Хорошо известно (см., напр., [3], § 8), что *плоская 3-ткань локально параллелизуема тогда и только тогда, когда* $K = 0$.

Для плоской d-ткани, $d\geq 4$, имеет место следующее утверждение (ср. [16] или [17], 7.2.1 для $d = 4$).

Теорема 1. *Плоская d-ткань $W_d = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots, \omega_d \rangle$ локально параллелизуема тогда и только тогда, когда ее 3-подткань $W_3 = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle$ локально параллелизуема (т. е. $K = 0$) и все основные инварианты a_i постоянны.*

Доказательство. Пусть $K = 0$ и $a_i = \mathrm{const}$. Тогда $W_3 = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle$ локально параллелизуема, и можно выбрать такие локальные координаты x, y, что $\omega_1 = -dx$, $\omega_2 = -dy$, $\omega_3 = d(x+y)$. Так как $a_i = \mathrm{const}$, то $\omega_{i+2} = d(a_i x + y)$.

Наоборот, предположим, что $W_d = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots, \omega_d \rangle$ локально параллелизуема. Выберем такие локальные координаты x, y, что в этих координатах слои каждого слоения будут параллельными прямыми. Тогда

$$\frac{f_x}{f_y} \quad \text{и} \quad \frac{g_{i+1,x}}{g_{i+1,y}}$$

постоянны.

Поэтому $K = 0$ и $a_i = \mathrm{const}$ в силу вышеприведенных формул для K и a_i. $\square$

3. Абелевы уравнения

3.1. Классические абелевы соотношения. Этот раздел начнем с интерпретации классической теоремы Абеля о сложении [18] в терминах плоских тканей (ср. [3]). Прямая линия на аффинной плоскости определяется парой (r, s): $rx + sy = 1$. Пусть (r, s) удовлетворяет некоторому кубическому уравнению, например, $s^2 - 4r^3 - g_2 r - g_3 = 0$. Если точка (x, y) задана, получаем кубическое уравнение на r: $r^3 + ar^2 + br + c = 0$, где

$$a = -\frac{x^2}{4y^2}, \quad b = \frac{1}{4}\left(g_2 + \frac{2x}{y}\right), \quad c = \frac{1}{4}\left(g_3 - \frac{1}{y^2}\right).$$

Тогда в области, определяемой неравенством $x^4 - 24xy^2 - 12g_2y^4 > 0$, $y \neq 0$, это кубическое уравнение имеет три различных вещественных корня и поэтому определяет три попарно трансверсальные прямые $(r_1(x,y), s_1(x,y))$, $(r_2(x,y), s_2(x,y))$ и $(r_3(x,y), s_3(x,y))$, проходящие через точку (x, y). Таким образом, в данной области определяется 3-ткань W_3.

Пусть $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Тогда решения уравнения $s^2 - 4r^3 - g_2 r - g_3 = 0$ можно параметризовать функцией Вейерштрасса $\wp : r = \wp(t)$, $s = \wp'(t)$. В результате корни $(r_1(x,y), s_1(x,y))$, $(r_2(x,y), s_2(x,y))$ и $(r_3(x,y), s_3(x,y))$ соответствуют трем решениям $(t_1(x,y), t_2(x,y), t_3(x,y))$ уравнения

$$f(t) = \wp(t)x + \wp'(t)y - 1 = 0.$$

Взяв интеграл

$$\int t \frac{f'(t)}{f(t)} dt$$

по границе параллелограмма периодов, находим абелево соотношение $t_1(x,y) + t_2(x,y) + t_3(x,y) = \mathrm{const}$. По построению функции $t_1(x,y)$, $t_2(x,y)$ и $t_3(x,y)$ постоянны на соответствующих слоях ткани W_3.

Теперь рассмотрим произвольную плоскую d-ткань, определенную d функциями $W_d = \langle f_1, \dots, f_d \rangle$. Тогда *абелево соотношение* задается d функциями $(F_1, \dots, F_d)$ одной переменной со свойством $F_1(f_1) + \dots + F_d(f_d) = \mathrm{const}$. Будем говорить, что два абелевых соотношения $(F_1, \dots, F_d)$ и $(G_1, \dots, G_d)$ *эквивалентны*, если $F_i = G_i + \mathrm{const}_i$ для всех $i = 1, \dots, d$. Ясно, что множество классов эквивалентности абелевых соотношений допускает структуру векторного пространства по отношению к операции сложения $(F_1, \dots, F_d) + (G_1, \dots, G_d) = (F_1 + G_1, \dots, F_d + G_d)$ и умножения на числа $\alpha(F_1, \dots, F_d) = (\alpha F_1, \dots, \alpha F_d)$. Размерность этого векторного пространства называется *рангом* ткани.

Если d-ткань задана дифференциальными 1-формами $W_d = \langle \omega_1, \dots, \omega_d \rangle$, то дифференцирование абелевых соотношений приводит к *абелеву уравнению*

$$\lambda_1 \omega_1 + \dots + \lambda_d \omega_d = 0$$

на функции $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ при условии, что все дифференциальные 1-формы $\lambda_i \omega_i$ замкнуты. Абелево уравнение есть система линейных уравнений в частных производных первого порядка на функции $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, и ранг ткани равен размерности пространства решений этого уравнения.

Следующий пример 3-ткани иллюстрирует вышеприведенные построения. Рассмотрим 3-ткань W_3, заданную функцией ткани

$$f = \frac{2xy - x + y}{x + y}.$$

Тогда $\omega_1 = -f_x dx$, $\omega_2 = -f_y dy$, $\omega_3 = df$. Условие $\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_3 \omega_3 = 0$ влечет $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, а условие $d(\lambda_3 \omega_3) = 0$ приводит к $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda(t)$ для некоторой функции $\lambda(t)$.

Остальные два условия $d(\lambda \omega_1) = d(\lambda \omega_2) = 0$ дают дифференциальное уравнение на λ:

$$2t\lambda(t) + (t^2 - 1)\lambda'(t) = 0.$$

Таким образом,

$$\lambda(t) = \frac{1}{t^2 - 1},$$

и абелево соотношение $F_1(x) + F_2(y) + F_3(f) = 0$ соответствует функциям

$$F_1(x) = \ln \frac{x+1}{x}, \quad F_2(y) = \ln \frac{y}{y-1}, \quad F_3(f) = \ln \frac{f-1}{f+1}.$$

3.2. Абелевы дифференциальные уравнения. В этом разделе проводится формализация вышеуказанных построений. Пусть $W_d = \langle \omega_1, \dots, \omega_d \rangle$ — плоская d-ткань в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ и пусть $\pi : E \to \mathbb{D}$ — подрасслоение тривиального расслоения $\mathbb{R}^d \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, состоящее из точек $(x_1, \dots, x_d, \alpha)$, где $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{D}$, такое, что $\sum\limits_1^d x_i \omega_{i,\alpha} = 0$.

Под *абелевым уравнением*, ассоциированным с d-тканью W_d, будем понимать такую систему дифференциальных уравнений первого порядка на сечения $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ расслоения π (т. е. $\sum\limits_1^d \lambda_i \omega_i = 0$), что (ср. [19]) $d(\lambda_1 \omega_1) = \dots = d(\lambda_d \omega_d) = 0$.

Запишем абелево уравнение в явном виде.

В дальнейшем выберем некоторую 3-подткань, скажем $\langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle$, и нормализуем d-ткань как и прежде:

$$a_1 \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \ a_2 \omega_1 + \omega_2 + \omega_4 = 0, \dots, a_{d-2} \omega_1 + \omega_2 + \omega_d = 0,$$

где $a_1 = 1$ и $d\omega_3 = 0$.

Назовем такую нормализацию *стандартной*.

Тогда

$$\begin{aligned}
d(\lambda_1 \omega_1) &= (-\partial_2(\lambda_1) + H\lambda_1)\omega_1 \wedge \omega_2, \\
d(\lambda_2 \omega_1) &= (\partial_1(\lambda_2) - H\lambda_2)\omega_1 \wedge \omega_2, \\
d(\lambda_3 \omega_3) &= (\partial_2(\lambda_3) - \partial_1(\lambda_3))\omega_1 \wedge \omega_2, \\
d(\lambda_i \omega_i) &= (a_{i-2}\partial_2(\lambda_i) - \partial_1(\lambda_i) + \lambda_i(H + \partial_2(a_{i-2}) - a_{i-2}H))\omega_1 \wedge \omega_2,
\end{aligned}$$

где $i = 4, \dots, d$.

Предположим, что λ_i являются функциями веса 1, а a_i — веса 0. Тогда вышеприведенные формулы принимают вид

$$\begin{aligned} d(\lambda_1\omega_1) &= -\delta_2(\lambda_1)\omega_1\wedge\omega_2,\\ d(\lambda_2\omega_1) &= \delta_1(\lambda_2)\ \omega_1\wedge\omega_2,\\ d(\lambda_3\omega_3) &= (\delta_2(\lambda_3)-\delta_1(\lambda_3))\omega_1\wedge\omega_2,\\ d(\lambda_i\omega_i) &= (\delta_2(a_{i-2}\lambda_i)-\delta_1(\lambda_i))\omega_1\wedge\omega_2. \end{aligned}$$

Условие нормализации $\sum\limits_1^d \lambda_i\omega_i = 0$ влечет

$$\begin{gathered} \lambda_1 = \sum_1^{d-2} a_i u_i, \quad \lambda_2 = \sum_1^{d-2} u_i,\\ \lambda_{i+2} = u_i, \quad i = 1,\dots,d-2. \end{gathered}$$

Поэтому абелево уравнение эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\Delta_1(u_1) = \dots = \Delta_{d-2}(u_{d-2}) = 0,\\ &\delta_1(u_1) + \dots + \delta_1(u_{d-2}) = 0, \end{aligned}$$

где $\Delta_i = \delta_1 - \delta_2\circ a_i$.

Пусть $\mathfrak{A}_1 \subset \mathbf{J}^1(\pi)$ — подрасслоение расслоения 1-струй, соответствующее абелеву уравнению, и $\mathfrak{A}_k \subset \mathbf{J}^k(\pi)$ — $(k-1)$-продолжение $\mathfrak{A}_1$. Обозначим через $\pi_{k,k-1} : \mathfrak{A}_k \to \mathfrak{A}_{k-1}$ ограничение естественных проекций $\mathbf{J}^k(\pi) \to \mathbf{J}^{k-1}(\pi)$.

Предложение 1. *Пусть $k \le d-2$. Тогда $\mathfrak{A}_k$ являются векторными расслоениями, а отображения $\pi_{k,k-1} : \mathfrak{A}_k \leftarrow \mathfrak{A}_{k-1}$ — проекциями. Более того,* $\dim\ker\pi_{k,k-1} = d-k-2$.

Доказательство. Пусть $u_{i,r_1\dots r_s}$ — координаты в пространстве струй $\mathbf{J}^k(\pi)$, соответствующие ковариантным производным $\delta_{r_1}\cdots\delta_{r_s}$ (подробности см.в [20]). В этих координатах абелево уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} &u_{1,1} = a_1u_{1,2} + a_{1,2}u_1,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &u_{d-2,1} = a_{d-2}u_{d-2,2} + a_{d-2,2}u_{d-2},\\ &u_{1,1} + \dots + u_{d-2,1} = 0. \end{aligned}$$

Это значит, что $u_1, ..., u_{d-2}$ являются слоевыми координатами в расслоении $\mathbb{D} \xleftarrow{\pi} E$, а $u_{1,2}, ..., u_{d-3,2}$ — в расслоении $E \xleftarrow{\pi_{1,0}} \mathfrak{A}_1$. Взяв ковариантные производные абелева уравнения, заметим, что $u_{1,22},\dots,u_{d-4,22}$ — слоевые координаты в расслоении $\mathfrak{A}_1 \xleftarrow{\pi_{2,1}} \mathfrak{A}_2$, и т.д. $\square$

Предложение 1 показывает, что имеется следующая башня векторных расслоений:

$$\mathbb{D} \xleftarrow{\pi} E \xleftarrow{\pi_{1,0}} \mathfrak{A}_1 \xleftarrow{\pi_{2,1}} \mathfrak{A}_2 \xleftarrow{\pi_{3,1}} \cdots \xleftarrow{\pi_{d-3,d-4}} \mathfrak{A}_{d-3} \xleftarrow{\pi_{d-2,d-3}} \mathfrak{A}_{d-2}.$$

Последняя проекция $\mathfrak{A}_{d-2} \xrightarrow{\pi_{d-2,d-3}} \mathfrak{A}_{d-3}$ является изоморфизмом. Геометрически ее можно представлять как линейную связность в векторном расслоении $\pi_{d-3} : \mathfrak{A}_{d-3} \to \mathbb{D}$. Заметим, что *абелево уравнение формально интегрируемо тогда и только тогда, когда эта линейная связность является плоской.*

Размерность этого расслоения равна $(d-2)+(d-3)+\dots+1 = (d-2)(d-1)/2$. Отсюда следует, что пространство решений $\mathrm{Sol}(\mathfrak{A})$ абелева уравнения $\mathfrak{A}$ конечномерно и

$$\dim\mathrm{Sol}(\mathfrak{A}) \le (d-1)(d-2)/2.$$

Размерность $\dim\mathrm{Sol}(\mathfrak{A})$ называется *рангом* соответствующей d-ткани W_d.

В результате получается следующий результат, который был впервые получен Болем [1] (см. также [2] и [3]).

Теорема 2. *Ранг плоской d-ткани W_d не превосходит $(d-1)(d-2)/2$.*

Препятствие к совместности системы абелевых уравнений задается мультискобкой (см. [21] и раздел 7.1 данной статьи). Матрица абелевой системы имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \Delta_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta_{d-2} \\ \delta_1 & \cdots & \delta_1 \end{Vmatrix}.$$

Вычисляя мультискобку, получим

$$\begin{aligned}(-1)^d\{(\Delta_1,\dots,0),\dots,(0,\dots,\Delta_{d-2}),(\delta_1,\dots,\delta_1)\} &= \delta_1\Delta_2\cdots\Delta_{d-2}(\Delta_1,\dots,0)+\\ +\Delta_1\delta_1\Delta_3\cdots\Delta_{d-2}(0,\Delta_2,\dots,0)+\cdots+\Delta_1\cdots\Delta_{i-1}\delta_1\Delta_{i+1}\cdots\Delta_{d-2}(0,\dots,\Delta_i,\dots,0)+\cdots+\\ +\Delta_1\cdots\Delta_{d-3}\delta_1(0,\dots,\Delta_{d-2})-\Delta_1\cdots\Delta_{d-2}(\delta_1,\dots,\delta_1).\end{aligned}$$

Поэтому условия совместности системы абелевых уравнений имеет вид

$$\varkappa = \Box_1 u_1 + \cdots + \Box_{d-2} u_{d-2} = 0,$$

где $\Box_i = \Delta_1\cdots\Delta_{d-2}\cdot\delta_1 - \Delta_1\cdots\Delta_{i-1}\cdot\delta_1\cdot\Delta_{i+1}\cdots\Delta_{d-2}\cdot\Delta_i$ являются линейными дифференциальными операторами порядка не выше $d-2$.

Доказана

Теорема 3. *d-ткань имеет максимальный ранг, равный $(d-1)(d-2)/2$, тогда и только тогда, когда $\varkappa = 0$ на $\mathfrak{A}_{d-2}$.*

Заметим, что $\varkappa$ можно рассматривать как линейную функцию на векторном расслоении $\mathfrak{A}_{d-2}$, и поэтому теорема 3 накладывает $(d-1)(d-2)/2$ условий на d-ткань (на $d-2$ функций ткани), необходимых для того, чтобы ткань имела максимальный ранг. Нахождение этих условий носит чисто алгебраический характер. Ниже их нахождение иллюстрируется на примерах плоских 3-, 4- и 5-тканей. Вычисления будут базироваться на использовании свойств ковариантных производных из [20]. Заметим также, что для общего случая d-тканей выражение $\varkappa$, как правило, довольно громоздко, однако для конкретных примеров d-тканей оно может быть и простым.

4. Ранг плоской 3-ткани

Пусть $d = 3$. Тогда максимальный ранг W_3 равен 1. Абелево уравнение имеет вид

$$\Delta_1(u_1) = 0, \quad \delta_1(u_1) = 0.$$

Препятствие $\varkappa$ равно $(\delta_1\Delta_1 - \Delta_1\delta_1)u_1 = (\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)u_1 = Ku_1$.

Теорема 4 ([22]). *3-ткань W_3 имеет максимальный ранг тогда и только тогда, когда эта ткань параллелизуема. Единственное абелево уравнение, допускаемое такой 3-тканью, — это уравнение $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ стандартной нормализации.*

5. Плоские 4-ткани

5.1. Препятствие. Взяв стандартную нормализацию 4-ткани W_4, положим $a_2 = a$:

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad a\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_4 = 0$$

и будем использовать нижние индексы для обозначения ковариантных производных от a, например, $a_2 = \delta_2(a)$.

В дальнейшем будем использовать следующую форму абелевого соотношения:

$$(u + av)\omega_1 + (u + v)\omega_2 + u\omega_3 + v\omega_4 = 0,$$

где $\lambda_1 = u + av$, $\lambda_2 = u + v$, $\lambda_3 = u$, $\lambda_4 = v$. Все слагаемые являются замкнутыми 1-формами при условии, что u и v удовлетворяют абелеву уравнению

$$\delta_1(u) - \delta_2(u) = 0, \quad \delta_1(v) - \delta_2(av) = 0, \quad \delta_1(u) + \delta_1(v) = 0.$$

Для 4-тканей башня продолжений абелева уравнения имеет вид

$$\mathbb{D} \xleftarrow{\pi} E \xleftarrow{\pi_{1,0}} \mathfrak{A}_1 \xleftarrow{\pi_{2,1}} \mathfrak{A}_2,$$

где $\pi_{2,1} : \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1$ определяет линейную связность на трехмерном векторном расслоении $\pi_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathbb{D}$.

Будем использовать стандартные слоевые координаты u, v и $u_1, \ldots$ в расслоении струй вместо $u_1, u_2, u_{1,1}, \ldots$

В этих координатах абелево уравнение примет вид

$$u_1 - u_2 = 0, \quad v_2 - av_2 - a_2 v = 0, \quad u_1 + v_1 = 0,$$

а препятствие $\varkappa = (\Delta_1\Delta_2\delta_1 - \delta_1\Delta_1\Delta_2)u + (\Delta_1\Delta_2\delta_1 - \Delta_1\delta_1\Delta_2)v$ равно $c_0 v_2 + c_1 v + c_2 u$.

Прямое вычисление приводит к следующему результату.

Теорема 5. *В канонических координатах ограничение $\varkappa$ на $\mathfrak{A}_2$ имеет вид*

$$\varkappa = c_0 v_2 + c_1 v + c_2 u,$$

где

$$c_0 = K + \frac{a_{11} - aa_{22} - 2(1-a)a_{12}}{4a(1-a)} + \frac{(-1+2a)a_1^2 - a^2a_2^2 + 2(1-a)^2 a_1 a_2}{4(1-a)^2a^2},$$

$$c_1 = \frac{K_2 - K_1}{4(1-a)} + \frac{(a-4)a_1 + (11 - 20a + 12a^2)a_2}{12(1-a)^2 a}K + \frac{a_{112} - a_{122}}{4a(1-a)} +$$

$$+ \frac{a_1 - aa_2}{4a^2(1-a)}a_{22} + \frac{(2a-1)(a_1 - aa_2)}{4(1-a)^2a^2}a_{12} - \frac{a_2^2((1-2a)a_1 + aa_2)}{4(1-a)^2a^2},$$

$$c_2 = \frac{aK_2 - K_1}{4a(1-a)} + \frac{(1-2a)a_1 - (a-2)aa_2}{4(1-a)^2a^2}K.$$

Коэффициент c_0 в выражении $\varkappa$ имеет внутренний геометрический смысл. Именно, определим кривизну 4-ткани как среднее арифметическое кривизн ее 3-подтканей. Точнее, рассмотрим 3-подткани $[1,2,3]$, $[1,2,4]$,$[1,3,4]$ и $[2,3,4]$ 4-ткани W_4 с нормализациями, заданными 1-формами и основным инвариантом,

$[1,2,3]$: ω_1, ω_2, ω_3, ω_4;

$[1,2,4]$: $\rho_1 = a\omega_1$, $\rho_2 = \omega_2$, $\rho_3 = \omega_4$, $\rho_4 = \omega_3$;

$[1,3,4]$: $\sigma_1 = (a-1)\omega_1$, $\sigma_2 = -\omega_3$, $\sigma_3 = \omega_4$, $\sigma_4 = -\omega_2$;

$[2,3,4]$: $\tau_1 = (a-1)\omega_2$, $\tau_2 = a\omega_3$, $\tau_3 = -\omega_4$, $\tau_4 = a\omega_1$.

Пусть $K[l,m,n]$ — функция кривизны 3-подткани $[l,m,n]$. Определим 2-*форму кривизны* $L\omega_1 \wedge \omega_2$ 4-*ткани* следующим образом:

$$4L\omega_1 \wedge \omega_2 = K[1,2,3]\omega_1 \wedge \omega_2 + K[1,2,4]\rho_1 \wedge \rho_2 + K[1,3,4]\sigma_1 \wedge \sigma_2 + K[2,3,4]\tau_1 \wedge \tau_2.$$

Тогда (подробности см. в [16] или [17], гл. 7)

$$K[1,2,3] = K,$$
$$K[1,2,4] = \frac{1}{a}\left(K - \frac{a_{12}}{a} + \frac{a_1 a_2}{a^2}\right),$$
$$K[1,3,4] = \frac{1}{a-1}\left[K + \frac{a_2(a_1 - a_2)}{(1-a)^2} + \frac{a_{12} - a_{22}}{1-a}\right],$$
$$K[2,3,4] = \frac{1}{a(a-1)}\left[K + \frac{(2a-1)a_1(a_1 - a_2)}{a^2(1-a)^2} + \frac{a_{11} - a_{12}}{a(1-a)}\right].$$

Вычисляя *функцию кривизны* L 4-ткани с помощью данной формулы, получим следующую геометрическую интерпретацию коэффициента c_0.

Теорема 6 ([7]). *Коэффициент c_0 равен функции кривизны 4-ткани: $c_0 = L$.*

Геометрический смысл c_0 был анонсирован в [9] (также см. комментарии в [10]). Недавно этот результат был доказан в [23].

5.2. 4-ткани максимального ранга. Плоская 4-ткань имеет максимальный ранг, равный трем, тогда и только тогда, когда препятствие $\varkappa$ тождественно обращается в нуль, т. е. тогда и только тогда, когда $c_0 = c_1 = c_2 = 0$. Это приводит к следующему результату.

Теорема 7. *Плоская 4-ткань W_4 имеет максимальный ранг тогда и только тогда, когда кривизна K и ковариантные производные K_3 и K_4 кривизны K, где $\partial_3 = \partial_2 - \partial_1$ и $\partial_4 = a\partial_2 - \partial_1$, выражаются через основной инвариант a 4-ткани и его ковариантные производные до третьего порядка включительно*:

$$K = \frac{-a_{11} + aa_{22} + 2(1-a)a_{12}}{4a(1-a)} + \frac{(1-2a)a_1^2 + a^2a_2^2 - 2(1-a)^2a_1a_2}{4(1-a)^2a^2},$$
$$K_3 = \frac{(4-a)a_1 - (11 - 20a + 12a^2)a_2}{3(1-a)a}K + \frac{a_{122} - a_{112}}{a} + \frac{a_4a_{22}}{a^2} +$$
$$+ \frac{(2a-1)a_4a_{12}}{(1-a)a^2} + \frac{2a_2^2(1-a)a_1 + a_2^2a_4}{(1-a)a^2},$$
$$K_4 = \frac{aa_4 - (1-a)a_1 - 2aa_3}{(1-a)a}K.$$

Взяв ковариантные производные δ_3 и δ_4 от первого уравнения теоремы 7, найдем K_3 и K_4. Сравнив полученные значения со значениями, приведенными в теореме 7, получаем два соотношения (они приводятся ниже в предложении 2) между основным инвариантом a 4-ткани и его ковариантными производными до третьего порядка включительно.

Обратно, эти соотношения наряду со значениями K_3 и K_4, полученными дифференцированием K, дают возможность восстановить второе и третье уравнения теоремы 7.

Это доказывает

Предложение 2. *Плоская 4-ткань имеет максимальный ранг тогда и только тогда, когда кривизна K имеет вид, указанный в первом уравнении теоремы 7, и основной инвариант a 4-ткани и его ковариантные производные до третьего порядка включительно удовлетворяют следующим двум соотношениям*:

$$6(a-1)^2a^2[-a_{111} + 2(a+1)a_{112} - 3aa_{122}] + a(a-1)[a(5(7a-5)a_1 - 3(4a^2 + 5a - 4)a_2)a_{11} -$$
$$-2((13a^2 + 18a - 19)a_1 + 3a(3-5a)a_2)a_{12} + a((19a-17)a_1 + 15aa_2)a_{22}] +$$
$$+(-34a^2 + 49a - 19)a_1^3 + (26a^3 + 40a^2 - 89a + 38)a_1^2a_2 + a(-31a^2 + 53a - 18)a_1a_2^2 - 15a^3a_2^3 = 0,$$
$$6(a-1)^2a^2[3a_{112} - 2(a+1)a_{122} + aa_{222}] + a(a-1)[(-15a_1 + (17-19a)a_2)a_{11} +$$

$$+2(3(7-9a)a_1+(5a^2+18a-11)a_2)a_{12}+(3(4a^2+5a-4)a_1+a(1-11a)a_2)a_{22}]+$$
$$+15(2a-1)a_1^3+(56a^2-101a+41)a_1^2a_2+(-10a^3-41a^2+58a-22)a_1a_2^2+a^2(5a-1)a_2^3=0.$$

Это предложение позволяет найти геометрический смысл последних двух уравнений теоремы 7.

Предложение 3. *Если кривизна 4-ткани обращается в нуль, то условия предложения 2 эквивалентны линеаризуемости 4-ткани.*

Доказательство. Можно проверить, что при $L=0$ условия линеаризуемости 4-ткани, приведенные в [15], эквивалентны условиям предложения 2. □

Теперь можем сформулировать теорему 7 в чисто геометрических терминах.

Теорема 8. *4-ткань имеет максимальный ранг тогда и только тогда, когда она линеаризуема и ее кривизна обращается в нуль.*

Замечание 1. Насколько нам известно, указанная характеристика 4-ткани максимального ранга — это первое инвариантное внутреннее описание таких тканей в терминах инвариантов тканей. Более того, условия того, что 4-ткань имеет максимальный ранг, включают условие линеаризуемости ткани.

Таким образом, есть три различных (но эквивалентных между собой) аналитических условия, необходимых и достаточных для того, чтобы 4-ткань имела максимальный ранг:

(i) условие, приведенное в теореме 7;
(ii) обращение в нуль кривизны 4-ткани и условия предложения 2;
(iii) обращение в нуль кривизны 4-ткани и условия линеаризуемости 4-ткани из [15].

Каждое из перечисленных условий эффективно и может быть использовано для проверки того, имеет ли данная 4-ткань максимальный ранг (см. примеры в конце данного раздела).

Из теоремы 8 вытекают интересные следствия для геометрии тканей.

Для *линеаризуемых* 4-тканей обращение в нуль кривизны необходимо и достаточно для того, чтобы 4-ткань имела максимальный ранг.

Следствие 1. Линеаризуемая плоская 4-ткань имеет максимальный ранг тогда и только тогда, когда ее кривизна обращается в нуль.

Замечание 2. Доказательство теоремы 8 (и следствия 1) существенно опирается на условия линеаризуемости 4-тканей из [15]. Для *линейной* 4-ткани результат следствия 1 был анонсирован без доказательства в [8] (см. также [10], 5.1.3). Наш результат является более общим, чем результат для *линейных 4-тканей* в [8].

Прямое доказательство теоремы Пуанкаре с помощью теории тканей дает

Следствие 2 (теорема Пуанкаре). Плоская 4-ткань максимального ранга линеаризуема.

Доказательство. Этот результат следует из теоремы 8, т. к. условие линеаризуемости являются частью условий теоремы 8. □

Следствие 3. Если плоская 4-ткань с постоянным основным инвариантом a имеет максимальный ранг, то она параллелизуема.

Доказательство. Действительно, если $a=\mathrm{const}$, то $a_i=a_{ij}=a_{ijk}=0$. Если 4-ткань имеет максимальный ранг, то по теореме 8 $L=0$. Подставляя $a_i=a_{ij}=a_{ijk}=0$ в равенство $L=0$, получим $K=0$. Поэтому ткань параллелизуема. □

Следствие 4. Параллелизуемая плоская 4-ткань является тканью максимального ранга.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что 4-ткань параллелизуема тогда и только тогда, когда $K = 0$, $a = \mathrm{const}$. Отсюда $L = 0$. Так как параллелизуемая 4-ткань линеаризуема, то по теореме 8 она имеет максимальный ранг. $\square$

Определение 2. 4-ткань, все 3-подткани которой параллелизуемы (т. е. являются шестиугольными), называется 4-*тканью Майергофера.*

Такие ткани были введены Маейргофером [24]. Из теоремы 8 вытекает

Следствие 5. 4-ткани Майергофера имеют максимальный ранг.

Это свойство 4-тканей Майергофера было доказано недавно в [23].

Доказательство. Заметим вначале, что по определению 2 имеем $L = 0$. Далее хорошо известно, что ([2], § 10; см. также [16]) 4-ткани Майергофера линеаризуемы. Поэтому по теореме 8 4-ткани Майергофера имеют максимальный ранг. $\square$

Кривизна 4-ткани определялась с помощью альтернированных сумм. Аналогично можно найти три дополнительных инварианта второго порядка, которые выражаются только в терминах основного инварианта a и его ковариантных производных первого и второго порядков:

$$\begin{aligned} M &= K[1,2,3] - aK[1,2,4] - (a-1)K[1,3,4] + a(a-1)K[2,3,4], \\ P &= K[1,2,3] + aK[1,2,4] - (a-1)K[1,3,4] - a(a-1)K[2,3,4], \\ Q &= K[1,2,3] - aK[1,2,4] + (a-1)K[1,3,4] - a(a-1)K[2,3,4]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} M &= \frac{-a_{11} - 2aa_{12} - aa_{22}}{a(a-1)} + \frac{(2a-1)a_1^2 - 2a^2a_1a_2 + a^2a_2^2}{a^2(a-1)^2}, \\ P &= \frac{(a_{11} - aa_{22})}{a(a-1)} + \frac{(1-2a)a_1^2 + a^2a_2^2}{a^2(a-1)^2}, \\ Q &= \frac{a_{11} - 2a_{12} + aa_{22}}{a(a-1)} + \frac{(1-2a)a_1^2 + 2(2a-1)a_1a_2 - a^2a_2^2}{a^2(a-1)^2}. \end{aligned}$$

Используя эти инварианты, можно установить новую инвариантную характеристику 4-тканей Майергофера.

Предложение 4. 4-*ткань является тканью Майергофера тогда и только тогда, когда инварианты M, P, Q и L обращаются в нуль.*

Доказательство. Рассмотрим систему $L = M = P = Q = 0$ как однородную линейную систему относительно $K[1,2,3]$, $K[1,2,4]$, $K[1,3,4]$ и $K[2,3,4]$. Определитель этой системы равен $-16a^2(a-1)^2$. Так как $a \neq 0, 1$, определитель отличен от 0. Поэтому эта система имеет только нулевое решение $K[1,2,3] = K[1,2,4] = K[1,3,4] = K[2,3,4] = 0$.

Следовательно, по определению 2 эта 4-ткань является 4-тканью Майергофера. Обратное утверждение очевидно. $\square$

5.2.1. Напомним форму абелевого соотношения

$$(u + av)\omega_1 + (u + v)\omega_2 + u\omega_3 + v\omega_4 = 0,$$

где все слагаемые являются замкнутыми 1-формами при условии, что u и v удовлетворяют абелеву уравнению

$$\delta_1(u) - \delta_2(u) = 0, \quad \delta_1(v) - \delta_2(av) = 0, \quad \delta_1(u) + \delta_1(v) = 0.$$

Для приложений представляют интерес два случая.

Случай $v = 0$ возможен тогда и только тогда, когда $K = 0$. Абелево соотношение имеет вид

$$u\omega_1 + u\omega_2 + u\omega_3 = 0.$$

В случае $u = 0$ абелево уравнение дает

$$\delta_1(v) = 0, \quad \delta_2(v) = \frac{a_2 v}{a},$$

а условия совместности

$$\delta_2\delta_1 v - \delta_1\delta_2 v = Kv, \quad \delta_2\delta_1 v - \delta_1\delta_2 v = \delta_1\left(\frac{a_2}{a}\right)v$$

влекут

$$K = \delta_1\left(\frac{a_2}{a}\right) = \frac{aa_{12} - a_1 a_2}{a^2}.$$

Абелево соотношение превращается в $av\omega_1 + v\omega_2 + v\omega_4 = 0$. Имеются только три случая, когда выполняются оба условия (и тогда $u\omega_1 + u\omega_2 + u\omega_3 = 0$, $av\omega_1 + v\omega_2 + v\omega_4 = 0$ являются абелевыми соотношениями):

1. параллелизуемые 4-ткани,
2. 4-ткани Майергофера,
3. 4-ткани, для которых $K[1,2,3] = K[1,2,4] = 0$.

Пример 1. Плоская 4-ткань, образованная координатными линиями $y = \mathrm{const}$, $x = \mathrm{const}$ и линиями уровня функций

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \quad \text{и} \quad g(x,y) = \frac{1-y}{1-x},$$

является 4-подтканью известной 5-ткани Боля, которая имеет ранг, равный шести, но не линеаризуема ([15], пример 7 раздела 5.2). Третье и четвертое слоения этой 4-ткани образованы пучками прямых с центрами в точках $(0,0)$ и $(1,1)$ соответственно. Эта 4-ткань линейна (и поэтому линеаризуема).

Так как 3-подткань $[1,2,3]$ этой 4-ткани параллелизуема, то допускается абелево соотношение

$$u\omega_1 + u\omega_2 + u\omega_3 = 0.$$

Прямое вычисление показывает, что выполняются условия теоремы 7. Более того, прямые вычисления показывают, что эта 4-ткань является 4-тканью Майергофера, ранг которой равен трем в силу следствия 5. Соответствующие абелевы соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \ln f_1 - \ln f_2 - \ln f_3 &= 0, \\ \ln(1-f_1) - \ln(1-f_2) + \ln f_4 &= 0, \\ \ln\frac{1-f_1}{f_1} - \ln\frac{1-f_3}{f_3} - \ln(1-f_4) &= 0, \end{aligned}$$

где $f_1 = x$, $f_2 = y$, $f_3 = \frac{x}{y}$, $f_4 = \frac{1-y}{1-x}$.

Пример 2. Плоская 4-ткань, образованная координатными линиями $y = \mathrm{const}$, $x = \mathrm{const}$ и линиями уровня функций

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \quad \text{и} \quad g(x,y) = \frac{x - xy}{y - xy}$$

([15], пример 8 раздела 5.2) — другая 4-подткань известной 5-ткани Боля. Третье и четвертое слоения этой 4-ткани являются соответственно пучком прямых с центром в точке $(0,0)$ и слоением кривых второго порядка. В [15] было доказано, что эта 4-ткань линеаризуема.

В силу тех же причин, что и в примере 1, имеем $K = 0$ и выполняются условия теоремы 7. Поэтому рассматриваемая плоская 4-ткань имеет максимальный ранг, равный трем, с абелевыми соотношениями

$$\ln f_1 - \ln f_2 - \ln f_3 = 0,$$
$$\ln\left(\frac{1}{f_1} - 1\right) - \ln\left(\frac{1}{f_2} - 1\right) + \ln f_4 = 0,$$
$$\ln(1 - f_1) - \ln(1 - f_3) + \ln(1 - f_4) = 0,$$

где $f_1 = x$, $f_2 = y$, $f_3 = \frac{x}{y}$, $f_4 = \frac{x(1-y)}{y(1-x)}$.

Пример 3. Рассмотрим плоскую 4-ткань, образованную координатными линиями $y = \mathrm{const}$, $x = \mathrm{const}$ и линиями уровня функций

$$f(x, y) = x + y \quad \text{и} \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

Как и в примере 1, снова имеем $K = 0$, поэтому ткань допускает абелево соотношение $u\omega_1 + u\omega_2 + u\omega_3 = 0$.

Можно проверить, что условия линеаризуемости 4-ткани из [15] не выполняются. Поэтому эта 4-ткань не линеаризуема. По следствию 2 эта 4-ткань не может иметь максимальный ранг. Поэтому ранг рассматриваемой 4-ткани может быть равен только 1 или 2.

5.3. 4-ткани ранга два. Как было отмечено ранее, 4-ткань допускает абелево уравнение (имеет положительный ранг) тогда и только тогда, когда уравнение

$$c_0 v_2 + c_1 v + c_2 u = 0 \tag{1}$$

имеет ненулевое решение.

Пусть в уравнении (1) $c_0 = 0$. Тогда, если два остальных коэффициента c_1 и c_2 уравнения (1) также равны 0, то по теореме 7 4-ткань имеет максимальный ранг. Если $c_0 = 0$, но один из коэффициентов c_1 или c_2 в (1) не равен 0, то $c_1 v + c_2 u = 0$ и, например, u удовлетворяет системе уравнений в частных производных первого порядка, состоящей из двух уравнений. Поэтому 4-ткань допускает не более одного абелева уравнения (т. е. имеет ранг, равный 1 или 0).

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициент c_0 в (1) отличен от нуля. Тогда 4-ткань не может иметь ранг, больший двух.

В этом разделе будем предполагать, что 4-*ткань имеет ранг* 2.

Теорема 9. *Плоская* 4-*ткань имеет ранг два тогда и только тогда, когда* $c_0 \neq 0$ *и*

$$G_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{11} &= ac_0(c_{2,2} - c_{2,1}) + ac_2(c_{0,1} - c_{0,2}) - a(1-a)c_1c_2 + \\
&\quad + (2a_2 - a_1 - aa_2)c_0c_2 - Kc_0^2, \\
G_{12} &= ac_0(c_{1,2} - c_{1,1}) + ac_1(c_{0,1} - c_{0,2}) - a(1-a)c_1^2 + \\
&\quad + (2a_2 - a_1 - 2aa_2)c_0c_1 + (a_2^2 + a_{12} - a_{22})c_0^2, \\
G_{21} &= c_0(c_{2,1} - ac_{2,2}) + c_2(ac_{0,2} - c_{0,1}) - 2a_2c_0c_2 + a(1-a)c_2^2, \\
G_{22} &= c_0(c_{1,1} - ac_{1,2}) + c_1(ac_{0,2} - c_{0,1}) + a(1-a)c_1c_2 - a_2c_0c_1 - \\
&\quad - a_2(1-a)c_0c_2 + (a_{22} - K)c_0^2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Добавив условия совместности (1) к абелевым уравнениям и решив полученную систему относительно u_1, u_2, v_1, v_2, получим фробениусову систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} u_1 &= -a_2 v + \frac{a}{c_0}(c_2 u + c_1 v), \\ u_2 &= -a_2 v + \frac{a}{c_0}(c_2 u + c_1 v), \\ v_1 &= a_2 v - \frac{a}{c_0}(c_2 u + c_1 v), \\ v_2 &= -\frac{a}{c_0}(c_2 u + c_1 v). \end{aligned}$$

Условия интегрируемости для этой системы получим из коммутационных соотношений $\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2 = K$. Вычисляя коммутаторы и подставляя u_1, u_2, v_1 и v_2, с учетом системы, приходим к условиям интегрируемости вида

$$\begin{aligned} G_{11}u + G_{12}v = 0, \\ G_{21}u + G_{22}v = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где G_{11}, G_{12}, G_{21} и G_{22} определены в теореме 9.

Чтобы 4-ткань имела ранг 2, нужны два независимых решения u и v. Это доказывает (2). □

5.3.1. **Пример 4.** Рассмотрим плоскую 4-ткань, образованную координатными линиями $y = \text{const}$, $x = \text{const}$ и линиями уровня функций

$$f(x, y) = x + y \quad \text{и} \quad g(x, y) = x^2 + y^2$$

(см. пример 2).

Как уже установлено, эта 4-ткань допускает абелево соотношение

$$u\omega_1 + u\omega_2 + u\omega_3 = 0,$$

и ее ранг равен 1 или 2. В этом случае

$$\begin{aligned} c_0 &= -\frac{3(x-y)^3(x+y)}{xy^5} \neq 0, \\ c_1 &= \frac{x^2 - y^2}{4x^2y^3}, \quad c_2 = 0; \\ c_{0,1} &= -\frac{1}{2x^3}, \quad c_{0,2} = \frac{1}{2y^3}; \\ c_{1,1} &= -\frac{1}{2x^3y}, \quad c_{1,2} = \frac{3x^2 - y^2}{4x^2y^4}; \\ c_{2,1} &= c_{2,2} = 0 \end{aligned}$$

и

$$G_{11} = G_{12} = G_{21} = G_{22} = 0.$$

Отсюда следует, что для этой 4-ткани выполняются условия (2). Поэтому ее ранг равен 2.

Два абелевых соотношения для этой ткани имеют вид $f_1 + f_2 - f_3 = 0$, $f_1^2 + f_2^2 - f_4 = 0$, где $f_1 = x$, $f_2 = y$, $f_3 = x + y$, $f_4 = x^2 + y^2$.

Пример 5. Рассмотрим плоскую 4-ткань, образованную координатными линиями $y = \text{const}$, $x = \text{const}$ и линиями уровня функций

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \quad \text{и} \quad g(x,y) = xy(x+y).$$

Снова имеем $K = 0$, и можно проверить, что условия линеаризуемости 4-ткани [15] не выполняются. По следствию 2 ранг этой ткани меньше 3.

Имеем

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{3y^3(x^2-y^2)}{2x(2x+y)^2(x+2y)^2} \neq 0;\\
c_1 &= \frac{3y^5(y-x)}{2x(2x+y)^2(x+2y)^2} \neq 0; \quad c_2 = 0;\\
c_{0,1} = c_{0,2} &= \frac{3y^4(2x^4-5x^3y-12x^2y^2-5xy^3+2y^4)}{2x(2x+y)^2(x+2y)^2};\\
c_{1,1} = c_{1,2} &= -\frac{3y^6(4x^3-10x^2y-7xy^2+4y^3)}{2x^2(2x+y)^3(x+2y)^4};\\
c_{2,1} = c_{2,2} &= 0
\end{aligned}$$

и в результате

$$G_{11} = G_{12} = G_{21} = G_{22} = 0.$$

Поэтому эта 4-ткань имеет ранг 2.

Два абелевых соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
\ln f_1 - \ln f_2 - \ln f_3 &= 0,\\
\ln f_1 + 2\ln f_2 + \ln(1+f_3) - \ln f_4 &= 0,
\end{aligned}$$

где $f_1 = x$, $f_2 = y$, $f_3 = \frac{x}{y}$, $f_4 = xy(x+y)$.

Рассмотрение примеров 4 и 5 приводит к важному наблюдению.

Предложение 5. *В общем случае 4-ткани ранга 2 не линеаризуемы.*

5.4. 4-ткани ранга 1. Четыре случая, когда 4-ткань может иметь ранг 1, описывает

Теорема 10. *Плоская 4-ткань имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1. $c_0 = 0$, $J_1 = J_2 = 0$, *где*

$$\begin{aligned}
J_1 &= a_2c_1c_2(c_1-c_2) + ac_2^2(c_{1,2}-c_{1,1}) +\\
&\quad + c_1c_2(c_{1,1} + a(c_{2,1}-c_{1,2}-c_{2,2})) + c_1^2(ac_{2,2}-c_{2,1}),\\
J_2 &= c_1^2(c_1-c_2)^2K + (c_{1,11}-c_{1,12})c_1c_2(c_2-c_1) +\\
&\quad + c_1^2(c_1-c_2)(c_{2,11}-c_{2,12}) + c_2(2c_1-c_2)c_{1,1}(c_{1,2}-c_{1,1}) +\\
&\quad + c_1^2c_{2,1}(c_{1,2}-c_{2,2}+c_{2,1}) + c_1^2c_{1,1}(c_{2,2}-2c_{2,1})
\end{aligned}$$

   и $c_1 \neq c_2$, $c_1 \neq 0$;
2. $c_0 = 0$, $c_1 = c_2 \neq 0$, *и* $J_3 = 0$, *где* $J_3 = (a_{22}-a_{12})(1-a) + a_2(a_2-a_1) - (1-a)^2K$;
3. $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, *и* $J_4 = 0$, *где* $J_4 = a_{12}a - a_1a_2 - Ka^2$;
4. $c_0 \neq 0$, *и* $J_{10} = J_{11} = J_{12} = 0$, *где*

$$\begin{aligned}
J_{10} &= G_{11}G_{22} - G_{21}G_{12},\\
J_{11} &= c_0(G_{21,1}G_{22} - G_{22,1}G_{21}) + (a_2c_0 - ac_1)G_{21}^2 + +(ac_2 - a_2c_0 + ac_1)G_{21}G_{22} - ac_2G_{22}^2,\\
J_{12} &= c_0(G_{21,2}G_{22} - G_{22,2}G_{21}) + (a_2c_0 - ac_1)G_{21}^2 + a(c_2-c_1)G_{21}G_{22} - c_2G_{22}^2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда $c_0 = 0$, а один из коэффициентов c_1 или c_2 из (1) не равен 0, и 4-ткань W_4 имеет ранг 1.

Тогда из уравнения (1) следует

$$u = c_1 t, \quad v = -c_2 t \tag{4}$$

для некоторой функции t.

Дифференцируя эти уравнения, находим

$$\begin{aligned} u_1 &= c_{1,1} t + c_1 t_1, \qquad & u_2 &= c_{1,2} t + c_1 t_2, \\ v_1 &= -c_{2,1} t - c_2 t_1, \quad & v_1 &= -c_{2,2} t - c_2 t_2. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в абелево уравнение, получим

$$\begin{aligned} (c_{1,1} - c_{2,1})t + (c_1 - c_2)t_1 &= 0, \\ (c_{1,1} - c_{1,2})t + c_1(t_1 - t_2) &= 0, \\ (-c_{2,1} + a c_{2,2} + a_2 c_2)t - c_2 t_1 + a c_2 t_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Если $c_1 - c_2 \neq 0$ и $c_1 \neq 0$, то, решая первые два уравнения относительно t_1 и t_2, получим

$$t_1 = \frac{t(c_{2,1} - c_{1,1})}{c_1 - c_2}, \quad t_2 = \frac{t(c_{1,1} - c_{2,1})}{c_1} + \frac{t(c_{2,1} - c_{1,1})}{c_1 - c_2}. \tag{6}$$

Подставляя эти значения в последнее уравнение предыдущей системы, приходим к уравнению $J_1 = 0$, где J_1 выражается как указано в теореме 10.

Далее, дифференцируя третье уравнение в (5) в направлении $\{\omega_2 = 0\}$ и используя симметричные производные, находим

$$\begin{aligned} &\frac{t_1}{c_1}(c_{1,1} - c_{1,2}) - \frac{t}{c_1^2}\left[\left(c_{1,11} - c_{1,12} + \frac{3Kc_1}{2}\right)c_1 - (c_{1,1} - c_{1,2})c_{1,1}\right] - \\ &\qquad - \frac{t_1}{c_1 - c_2}(c_{1,1} - c_{2,1}) - \frac{t}{(c_1 - c_2)^2}\left[(c_{1,11} - c_{2,11})(c_1 - c_2) - (c_{1,1} - c_{2,1})^2\right] + \\ &\qquad\qquad + \frac{t_2(c_{1,1} - c_{2,1})}{c_1 - c_2} + t\frac{c_{1,12} - c_{2,12}}{(c_1 - c_2)^2} - \frac{Kt}{2} - t\frac{(c_{1,1} - c_{2,1})(c_{1,2} - c_{2,2})}{(c_1 - c_2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя значения t_1 и t_2 из (6) в это уравнение, приходим к уравнению $J_2 = 0$ теоремы 10.

Теперь рассмотрим случай $c_0 = 0$, $c_1 = c_2 \neq 0$.

Тогда $u = -v$ и

$$u_1 - u_2 = 0, \quad u_1 - a u_2 - a_2 u = 0.$$

Решая эту систему относительно u_1 и u_2, находим

$$u_1 = \frac{a_2 u}{1 - a}, \quad u_2 = \frac{a_2 u}{1 - a}.$$

Условия совместности этих уравнений дает $J_3 = 0$, где

$$J_3 = \left(\frac{a_2 u}{1 - a}\right)_2 - \left(\frac{a_2 u}{1 - a}\right)_1 - K = \frac{(a_{12} - a_{22})(a - 1) - a_2(a_1 - a_2)}{(a - 1)^2} - K.$$

Теперь рассмотрим второй исключенный случай: $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$. Тогда $u = 0$. Отсюда

$$v_1 = 0, \quad a v_2 + a_2 v = 0,$$

и имеет место условие совместности $J_4 = 0$, где $J_4 = a_{12} a - a_1 a_2 - K a^2$.

Предположим теперь, что $c_0 \neq 0$, и 4-ткань имеет ранг 1. Тогда абелево уравнение с условием совместности $\varkappa = 0$ дает систему

$$\begin{aligned} u_1 &= -v_1, \\ u_2 &= -v_1, \\ u_1 &= -a_2 v + \frac{1}{c_0}(c_1 v + c_2 u), \\ v_2 &= -\frac{1}{c_0}(c_1 v + c_2 u). \end{aligned}$$

Так как 4-ткань имеет ранг 1, система (3) имеет ненулевое решение. Таким образом, ее детерминант обращается в нуль:

$$J_{10} = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} = 0.$$

Возьмем, например, второе уравнение системы (3) и продифференцируем его. Добавив полученные уравнения к вышеуказанной системе, получим $J_{11} = J_{12} = 0$. $\square$

5.4.1. **Пример 6.** Рассмотрим плоскую 4-ткань, образованную координатными линиями $y = \mathrm{const}$, $x = \mathrm{const}$ и линиями уровня функций

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{(x-y)^2} \quad \text{и} \quad g(x,y) = \frac{x^2 y}{(x-y)^2}.$$

В этом случае $c_0 = 0$ и $J_1 = J_2 = 0$. Поэтому получаем ткань типа 1, описанного в теореме 10, и эта 4-ткань имеет ранг 1.

Единственное абелево соотношение — это

$$\ln f_1 - \ln f_2 + \ln f_3 - \ln f_4 = 0,$$

где

$$f_1 = x, \quad f_2 = y, \quad f_3 = \frac{xy^2}{(x-y)^2}, \quad f_4 = \frac{x^2 y}{(x-y)^2}.$$

Этот пример доказывает

Предложение 6. *В общем случае 4-ткань ранга один не линеаризуема.*

5.5. 4-ткань с постоянными основными инвариантами. Вначале рассмотрим 4-ткань максимального ранга, для которой основной инвариант постоянен вдоль слоев одного из слоений ткани.

Без ограничения общности можно предположить, что a постоянен вдоль слоев второго слоения, т. е. $a_1 = 0$. Тогда, решая систему $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, получим

$$\begin{aligned} K &= \frac{a_2^2}{4(a-1)^2} - \frac{a_{22}}{4(a-1)}, \\ K_1 &= \frac{a_2 a_{22}}{2(a-1)^2} - \frac{a_2^3}{2(a-1)^3}, \\ K_2 &= \frac{a_2 a_{22}}{4(a-1)^2} - \frac{a_2^3}{4(a-1)^3}. \end{aligned}$$

Дифференцируя первое уравнение и учитывая оставшиеся два уравнения, приходим к условиям

$$a_{22} = \frac{a_2^2}{a-1}, \quad a_{222} = \frac{a_2^3}{(a-1)^2}.$$

Второе уравнение этой системы получается ковариантным дифференцированием первого. Первое уравнение влечет $K = 0$, и кривизна всех остальных 3-подтканей также обращается в нуль. Другими словами, данная 4-ткань есть ткань Майергофера.

С другой стороны, если предположить, что $a_1 = 0$ и $K = 0$, то единственным условием, обеспечивающим максимальность ранга, является

$$a_{22} - \frac{a_2^2}{a-1} = 0$$

или

$$\delta_2\left(\frac{a_2}{a-1}\right) = 0. \qquad (*)$$

Теорема 11. 1. *Плоская 4-ткань, основной инвариант которой постоянен на одном из слоений ткани, имеет максимальный ранг, если одна из ее 3-подтканей является параллелизуемой. Тогда все остальные 3-подткани параллелизуемы и эта 4-ткань является тканью Майергофера.*

2. *Если, например, $a_1 = 0$ и $K[1,2,3] = 0$, то 4-ткань имеет максимальный ранг, если $a_2/(a-1)$ постоянно вдоль слоев первого слоения, т. е. если выполняется $(*)$.*

Завершим изучение 4-тканей различных рангов следующей теоремой, доказательство которой использует все полученные результаты.

Теорема 12. *Плоская 4-ткань общего положения с непараллелизуемой 3-подтканью и постоянным основным инвариантом имеет ранг 0.*

Доказательство. Рассмотрим 4-ткань с непараллелизуемой 3-подтканью $[1,2,3]$ и постоянным основным инвариантом a. Тогда

$$c_0 = K \neq 0, \quad c_1 = \frac{K_1 - K_2}{4(a-1)}, \quad c_2 = \frac{K_1 - aK_2}{4a(a-1)}.$$

Поэтому ранг этой ткани не равен 3.

Подставляя эти выражения в уравнения теоремы 9, находим

$$G_{11} = \frac{5(K_1^2 - (a+1)K_1K_2 + aK_2^2) - 4K(4K^2(a-1) + K_{11} - 2aK_{12} + a^2K_{22})}{16(a-1)},$$

$$G_{12} = \frac{5(K_1 - K_2)^2 - 4K(K_{11} - 2K_{12} + K_{22})}{16(a-1)},$$

$$G_{21} = \frac{-5(K_1 - aK_2)^2 + 4K(K_{11} - a(a-1)K_{12} + a^3K_{22})}{16a(a-1)},$$

$$G_{22} = -\frac{5(K_1^2 - (a+1)K_1K_2 + aK_2^2) + 4K(4K^2(a-1) - K_{11} + (1+a)K_{12} - aK_{22})}{16(a-1)}.$$

Для 4-ткани общего положения $G_{ij} \neq 0$. Значит, 4-ткань с постоянным основным инвариантом не может иметь ранг 2.

Чтобы проверить, имеет ли эта 4-ткань ранг 1, заметим, что $c_0 = K \neq 0$, т. к. 3-подткань $[1,2,3]$ не является параллелизуемой. Поэтому, если ткань допускает одно абелево уравнение, то она принадлежит классу 4, описанному в теореме 10. Это будет в случае, если $J_{10} = J_{12} = J_{12} = 0$. Однако

$$\begin{aligned} J_{10} &= G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} = \\ &= \frac{1}{64}K[64K^5 - 5K_2^2K_{11} + 16aK^3K_{22} - 5(a+1)K_1^2K_{22} + 4(a+1)KK_{11}K_{22} + \\ &\quad + 5K_1K_2(K_{12} + aK_{22}) - K_{12}(-5K_1^2 + 4K(4K^2 + K_{11} + aK_{22}))]. \end{aligned}$$

Поэтому для 4-ткани общего положения $J_{10} \neq 0$. Следовательно, ткань не допускает ни одного абелева уравнения и имеет ранг 0. $\square$

6. Плоские 5-ткани

6.1. 5-ткани максимального ранга. Рассмотрим плоскую 5-ткань со стандартной нормализацией

$$\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= 0, \\ a\omega_1 + \omega_2 + \omega_4 &= 0, \\ b\omega_1 + \omega_2 + \omega_5 &= 0, \end{aligned}$$

где a и b — основные инварианты ткани.

Абелево соотношение для такой ткани имеет вид

$$(w + au + bv)\omega_1 + (w + u + v)\omega_2 + w\omega_3 + u\omega_4 + v\omega_5 = 0,$$

где $\lambda_1 = w + au + bv$, $\lambda_2 = w + u + v$, $\lambda_3 = w$, $\lambda_4 = u$ и $\lambda_5 = v$.

Функции w, u и v удовлетворяют абелеву уравнению

$$\begin{aligned} \delta_1(w) - \delta_2(w) &= 0, \\ \delta_1(u) - \delta_2(au) &= 0, \\ \delta_1(v) - \delta_2(bv) &= 0, \\ \delta_1(w) + \delta_1(u) + \delta_1(v) &= 0, \end{aligned}$$

а условия совместности принимают вид

$$\begin{aligned} \varkappa = (\Delta_1\Delta_2\Delta_3\delta_1 - \delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_1)(w) + (\Delta_1\Delta_2\Delta_3\delta_1 - \Delta_1\delta_1\Delta_3\Delta_2)(u) + \\ + (\Delta_1\Delta_2\Delta_3\delta_1 - \Delta_1\Delta_2\delta_1\Delta_3)(v) = 0. \end{aligned}$$

В канонических координатах расслоения струй абелево уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 &= 0, \\ u_1 - au_2 - a_2u &= 0, \\ v_1 - bv_2 - b_2v &= 0, \\ u_1 + v_1 + w_1 &= 0, \end{aligned}$$

и препятствие $\varkappa$ равно

$$c_0w_{22} + +c_1w_2 + c_2v_2 + c_3w + c_4u + c_5v = 0,$$

где

$$\begin{aligned} c_0 = K + R[a,b] + R[b,a] \ &- \frac{a - a^2 + b - b^2 - 4ab + 2a^2b + 2ab^2}{10(-1+a)a(a-b)^2(-1+b)b}a_1b_1 + \\ &+ \frac{2a - a^2 + 2b - b^2 - 4ab + a^2b + ab^2}{10(-1+a)(a-b)^2(-1+b)}a_2b_2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} R[a,b] = \frac{(1-3a+b)a_{11} + (4a - 3a^2 - 3b + 4ab)a_{12} + (a^2 - 3ab + a^2b)a_{22}}{10(-1+a)a(a-b)} + \\ + \frac{2a - 6a^2 + 6a^3 - b + 4ab - 6a^2b - b^2 + 2ab^2}{10(-1+a)^2a^2(a-b)^2}a_1^2 + \\ + \frac{4a^2 - 8a^3 + 3a^4 - 6ab + 14a^2b - 8a^3b + 3b^2 - 6ab^2 + 4a^2b^2}{10(-1+a)^2a^2(a-b)^2}a_1a_2 + \end{aligned}$$

$$+\frac{-a^4-2a^2b+6a^3b-a^4b-2a^2b^2}{10(-1+a)^2a^2(a-b)^2}a_2^2+\frac{-1+ab}{10(-1+a)(a-b)^2(-1+b)}a_1b_2,$$

а выражения для c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5 даны в разделе 7.2.

Теорема 13. *Плоская 5-ткань имеет максимальный ранг, равный шести, тогда и только тогда, когда инварианты c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5 обращаются в нуль.*

Заметим, что выражение c_0 содержит функцию кривизны K, в то время как c_1, c_2 содержат K и линейную комбинацию ковариантных производных K_1, K_2, а c_3, c_4, c_5 содержат K, линейную комбинацию ковариантных производных K_1, K_2 и вторые симметризованные ковариантные производные K_{11}, K_{12}, K_{22}.

Следствие 6. Для 5-ткани максимального ранга функция кривизны K 3-подткани $[1,2,3]$ имеет следующее выражение через основные инварианты a и b и их ковариантные производные:

$$K=\frac{a-a^2+b-b^2-4ab+2a^2b+2ab^2}{10(-1+a)a(a-b)^2(-1+b)b}a_1b_1-$$
$$-\frac{2a-a^2+2b-b^2-4ab+a^2b+ab^2}{10(-1+a)(a-b)^2(-1+b)}a_2b_2-R[a,b]-R[b,a].$$

Следствие 7. Плоская 5-ткань алгебраизуема тогда и только тогда, когда она имеет максимальный ранг (т. е. если инварианты c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5 обращаются в нуль) и линеаризуема (т. е. если инварианты линеаризации 5-ткани I_1, I_2 и

$$I_5=\frac{\partial_1 a-a\partial_2 a}{a-a^2}-\frac{\partial_1 b-b\partial_2 b}{b-b^2}$$

обращаются в нуль).

Доказательство. Действительно, по теореме Ли–Дарбу–Гриффитса [25] линеаризуемая 5-ткань максимального ранга алгебраизуема, и наоборот: алгебраизуемая 5-ткань линеаризуема и по теореме Абеля [19] имеет максимальный ранг.

Условия для того, чтобы плоская 5-ткань имела максимальный ранг, имеют вид $c_0=c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=0$, а условия линеаризуемости 5-ткани записываются в виде $I_1(\mu)=I_2(\mu)=0$ и $I_5=0$ [25], где

$$\begin{aligned}I_1(\mu)&=\delta_{11}(\mu)-2\delta_{12}(\mu)-\mu\delta_1(\mu)+2\mu\delta_2(\mu)+\delta_1(K),\\ I_2(\mu)&=\delta_{22}(\mu)-2\delta_{12}(\mu)-2\mu\delta_1(\mu)+\mu\delta_2(\mu)+\delta_2(K),\\ I_5&=\frac{\partial_1 a-a\partial_2 a}{a-a^2}-\frac{\partial_1 b-b\partial_2 b}{b-b^2},\end{aligned}\tag{7}$$

$\mu=\frac{\partial_1 a-a\partial_2 a}{a-a^2}$, δ_i — ковариантные производные и δ_{ij} — симметризованные ковариантные производные второго порядка. □

Поэтому множество 5-тканей максимального ранга содержит алгебраизуемые ткани. Они характеризуются следующим образом:

$$I_1=0,\quad I_2=0,\quad I_5=0.$$

Если хотя бы один из инвариантов I_1, I_2, I_5 не обращается в нуль, то получаем неалгебраизуемую 5-ткань максимального ранга — “особую ткань” (напр., [4]).

6.2. Кривизна плоской 5-ткани. Как и в случае 4-ткани, коэффициент c_0 в выражении $\varkappa$ для 5-ткани имеет внутренний геометрический смысл. Именно, определим кривизну 5-ткани как среднее арифметическое кривизн ее 3-подтканей. Плоская 5-ткань имеет десять 3-подтканей: $[1,2,3]$, $[1,2,4]$, $[1,3,4]$, $[2,3,4]$, $[1,2,5]$, $[1,3,5]$, $[2,3,5]$, $[1,4,5]$, $[2,4,5]$, $[3,4,5]$.

Нормализации с функциями кривизны для 3-подтканей $[1,2,3]$, $[1,2,4]$, $[1,3,4]$ и $[2,3,4]$ даны в 5.1. Аналогичные выражения для 3-подтканей $[1,2,5]$, $[1,3,5]$ и $[2,3,5]$ можно получить подстановкой $a \to b$ и $4 \to 5$:

$[1,2,5]$: $\widetilde{\rho}_1 = b\omega_1$, $\widetilde{\rho}_2 = \omega_2$, $\widetilde{\rho}_3 = \omega_5$, $\widetilde{\rho}_4 = \omega_3$;
$[1,3,5]$: $\widetilde{\sigma}_1 = (b-1)\omega_1$, $\widetilde{\sigma}_2 = -\omega_3$, $\widetilde{\sigma}_3 = \omega_5$, $\widetilde{\sigma}_4 = -\omega_2$;
$[2,3,5]$: $\widetilde{\tau}_1 = (b-1)\omega_2$, $\widetilde{\tau}_2 = b\omega_3$, $\widetilde{\tau}_3 = -\omega_5$, $\widetilde{\tau}_4 = b\omega_1$.

Для последних трех случаев имеем:

$[1,4,5]$: $\zeta_1 = (a-b)\omega_1$, $\zeta_2 = -a\omega_1 - \omega_2$, $\zeta_3 = b\omega_1 + \omega_2$;
$[2,4,5]$: $\eta_1 = \frac{b-a}{b}\omega_2$, $\eta_2 = -a\omega_1 - \omega_2$, $\eta_3 = \frac{a}{b}(b\omega_1 + \omega_2)$;
$[3,4,5]$: $\theta_1 = (a-b)\omega_3$, $\theta_2 = (1-b)(a\omega_1 + \omega_2)$, $\theta_3 = (a-1)(b\omega_1 + \omega_2)$.

Для функций кривизны $K[l,m,n]$ получаем следующие выражения:

$$K[1,2,5] = \frac{1}{b}\left(K - \frac{b_{12}}{b} + \frac{b_1 b_2}{b^2}\right),$$

$$K[1,3,5] = \frac{1}{b-1}\left[K + \frac{b_2(b_1-b_2)}{(1-b)^2} + \frac{b_{12}-b_{22}}{1-b}\right],$$

$$K[2,3,5] = \frac{1}{b(b-1)}\left[K + \frac{(2b-1)b_1(b_1-b_2)}{b^2(1-b)^2} + \frac{b_{11}-b_{12}}{b(1-b)}\right]$$

и

$$K[1,4,5] = \frac{K-a_{22}}{b-a} + \frac{b_{12}-a_{12}+a(a_{22}-b_{22})}{(a-b)^2} + \frac{(b_2-a_2)(a_2b-ab_2-a_1+b_1)}{(a-b)^3},$$

$$\begin{aligned} K[2,4,5] = {} & \frac{bK}{a(b-a)} - \frac{aa_{12}-a_1a_2}{a^3(b-a)} + \frac{a_{11}b-ab_{11}}{a^2b(b-a)^2} - \\ & - \frac{a_{12}b+a_1b_2-a_2b_1-ab_{12}}{ab(b-a)^2} + \frac{(a_1b-ab_1)(2bb_2-ab_2-a_2b)}{ab^2(b-a)^3} - \\ & - \frac{(a_1b-ab_1)(a_1b^2+2ab(b_1-a_1)-a^2b_1)}{a^3b^2(b-a)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K[3,4,5] = {} & \frac{K}{(a-1)(b-1)(b-a)} - \frac{aa_2(b_1-a_1-b_2+a_2)}{(a-1)^3(b-1)(b-a)^2} + \\ & + \frac{a_2(ab_2-b_1+(b-1)a_2)}{(a-1)^3(b-1)^2(b-a)} + \frac{a_1(b_1-a_1-b_2+a_2)}{(a-1)^3(b-1)(b-a)^2} + \\ & + \frac{a_1(ab_2-b_1+(b-1)a_2)}{(a-1)^3(b-1)^2(b-a)} - \frac{a(b_{12}-a_{12}-b_{22}+a_{22})}{(a-1)^2(b-1)(b-a)^2} - \\ & - \frac{a_2(b_1-a_1-b_2+a_2}{(a-1)^2(b-1)(b-a)^2} + \frac{a(b_1-a_1-b_2+a_2)(b_2-a_2)}{(a-1)^2(b-1)(b-a)^3} - \\ & - \frac{(b_1-ab_2)b_2}{(a-1)^2(b-1)^3(b-a)} - \frac{a_2b_2-b_{12}+ab_{22}+(b-1)a_{22}}{(a-1)^2(b-1)^2(b-a)} + \\ & + \frac{(b_1-a_1-b_2+a_2)(b_1-a_1)}{(a-1)^2(b-1)(b-a)^3} - \frac{b_{11}-a_{11}-b_{12}+a_{12}}{(a-1)^2(b-1)(b-a)^2} - \\ & - \frac{-b_{11}+a_1b_2+ab_{12}+(b-1)a_{12}}{(a-1)^2(b-1)^2(b-a)} - \frac{(b_1-ab_2)b_1}{(a-1)^2(b-1)^3(b-a)}, \end{aligned}$$

Определим 2-*форму* $L\omega_1 \wedge \omega_2$ *кривизны* 5-*ткани* следующим образом:

$$\begin{aligned} 10L\omega_1 \wedge \omega_2 = {} & K[1,2,3]\omega_1 \wedge \omega_2 + K[1,2,4]\rho_1 \wedge \rho_2 + K[1,3,4]\sigma_1 \wedge \sigma_2 + K[2,3,4]\tau_1 \wedge \tau_2 + \\ & + K[1,2,5]\widetilde{\rho}_1 \wedge \widetilde{\rho}_2 + K[1,3,5]\widetilde{\sigma}_1 \wedge \widetilde{\sigma}_2 + K[2,3,5]\widetilde{\tau}_1 \wedge \widetilde{\tau}_2 + \end{aligned}$$

$$+ K[1,4,5]\zeta_1 \wedge \zeta_2 + K[2,4,5]\eta_1 \wedge \eta_2 + K[3,4,5]\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Прямым вычислением получим

$$\begin{aligned} 10L = {} & K + aK[1,2,4] + (a-1)K[1,3,4] + \\ & + a(a-1)K[2,3,4] + bK[1,2,5] + (b-1)K[1,3,5] + b(b-1)K[2,3,5] + \\ & + (b-a)K[1,4,5] + \frac{b}{a(b-a)}K[2,4,5] + (a-1)(b-1)(b-a)K[3,4,5] \end{aligned}$$

и $L = c_0$.

Теорема 14. *Кривизна плоской 5-ткани максимального ранга равна* 0.

6.3. 5-ткани с постоянными основными инвариантами. Этот раздел завершим рассмотрением 5-тканей с постоянными основными инвариантами. Можно проверить, что в этом случае c_0 совпадает с функцией кривизны K 3-подткани $[1,2,3]$, и выражения для c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5 являются линейными комбинациями K_i, K_{ij} и K^2. Другими словами, $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$ тогда и только тогда, когда $K = 0$.

Теорема 15. *Плоская 5-ткань с постоянными основными инвариантами имеет максимальный ранг тогда и только тогда, когда она параллелизуема.*

6.4. Два примера 5-тканей.

Пример 7. Рассмотрим 5-ткань Боля, образованную координатными линиями $y = \mathrm{const}$, $x = \mathrm{const}$ и линиями уровня функций

$$f(x,y) = \frac{x}{y}, \quad g_4(x,y) = \frac{1-y}{1-x} \quad \text{и} \quad g_5(x,y) = \frac{x-xy}{y-xy}$$

([15], пример 8 раздела 5.2).

Заметим вначале, что 3-подткань $[1,2,3]$ этой 5-ткани параллелизуема, значит, $K = 0$.

Для этой 5-ткани имеем

$$a = \frac{x(y-1)}{y(x-1)}, \quad b = \frac{y-1}{x-1}$$

и $c_i = 0$, где $i = 0, 1, \ldots, 5$.

Поэтому 5-ткань Боля имеет максимальный ранг.

Используя условия линеаризуемости плоской 5-ткани из [15], можно показать, что 5-ткань Боля не линеаризуема. Действительно, один из инвариантов, а именно инвариант второго порядка

$$\mu_{[1,2,3,4]} - \mu_{[1,2,3,5]} = \frac{\partial_1 a - a\partial_2 a}{a - a^2} - \frac{\partial_1 b - b\partial_2 b}{b - b^2}$$

не обращается в нуль.

Для этой 5-ткани

$$\omega_1 = -\frac{1}{y}dx, \quad \omega_2 = \frac{x}{y^2}dy, \quad \omega_3 = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy,$$
$$\omega_4 = \frac{x(y-1)}{(x-1)y^2}dx - \frac{x}{y^2}dy, \quad \omega_5 = \frac{x(y-1)}{(x-1)y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy.$$

Решая абелево уравнение, получим следующие абелевы соотношения:

$$\begin{aligned}
&\ln f_1 - \ln f_2 - \ln f_3 = 0,\\
&\ln f_3 + \ln f_4 - \ln f_5 = 0,\\
&\ln(1-f_1) - \ln(1-f_2) + \ln f_4 = 0,\\
&\ln(1-f_1) - \ln(1-f_3) + \ln(1-f_5) = 0,\\
&\ln\frac{1-f_1}{f_1} - \ln\frac{1-f_3}{f_3} + \ln(1-f_4) = 0,\\
&\mathbf{D}_2(f_1) - \mathbf{D}_2(f_2) - \mathbf{D}_2(f_3) - \mathbf{D}_2(f_4) + \mathbf{D}_2(f_5) = 0,
\end{aligned}$$

где

$$f_1 = x, \quad f_2 = y, \quad f_3 = \frac{x}{y}, \quad f_4 = \frac{1-y}{1-x}, \quad f_5 = \frac{x-xy}{y-xy}$$

и

$$\mathbf{D}_2(t) = \mathbf{Li}_2 t + \frac{1}{2}\ln t\,\ln(1-t) - \frac{\pi^2}{6}, \quad 0 < t < 1; \quad \mathbf{Li}_2 t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2},$$

или

$$\mathbf{D}_2(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\ln|1-s|}{s} + \frac{\ln|s|}{1-s}\right)ds - \frac{\pi^2}{6}, \quad 0 < t < 1,$$

есть вариант дилогарифма Роджерса [26], [27], нормализованный таким образом, чтобы выражение, стоящее в левой части последнего абелева соотношения, было равно нулю.

Этот пример приводит к следующему результату.

Предложение 7. *Вообще говоря, плоская 5-ткань максимального ранга не является линеаризуемой (алгебраизуемой).*

Пример 8. Рассмотрим 5-ткань, образованную координатными линиями $y = \mathrm{const}$, $x = \mathrm{const}$ и линиями уровня функций

$$f(x,y) = \frac{x}{y}, \quad g_4(x,y) = \frac{x}{(x-1)(y-1)} \quad \text{и} \quad g_5(x,y) = \frac{y}{(x-1)(y-1)}.$$

Это есть 5-подткань $[1,2,3,7,8]$ 29-ткани $K(4)$ ([28], 7.2.3).

Как в примере 7, имеем

$$K = 0, \quad a = \frac{1-y}{y(x-1)}, \quad b = \frac{x(1-y)}{x-1}$$

и $c_i = 0$, где $i = 0, 1, \ldots, 5$.

Поэтому рассматриваемая плоская 5-ткань имеет максимальный ранг.

Также можно проверить, что выполняются условия линеаризуемости ([15], с. 445), и поэтому эта 5-ткань линеаризуема (алгебраизуема). Поэтому рассматриваемая 5-ткань будет алгебраизуемой 5-тканью максимального ранга.

Для этой 5-ткани

$$\omega_1 = -\frac{1}{y}dx, \quad \omega_2 = \frac{x}{y^2}dy, \quad \omega_3 = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy,$$
$$\omega_4 = \frac{1-y}{(x-1)y^2}dx - \frac{x}{y^2}dy, \quad \omega_5 = \frac{x(1-y)}{(x-1)y^2}dx - \frac{x}{y^2}dy.$$

Решая абелево уравнение, получим следующие абелевы соотношения:

$$\ln f_1 - \ln f_2 - \ln f_3 = 0,$$
$$\ln f_3 - \ln f_4 + \ln f_5 = 0,$$
$$\ln \frac{f_1}{1-f_1} - \ln(1-f_2) - \ln f_4 = 0,$$
$$\ln(1-f_1) - \ln \frac{f_2}{1-f_2} + \ln f_5 = 0,$$
$$\frac{f_1-1}{f_1} + f_2 - f_3 - \frac{1}{f_4} = 0,$$
$$f_1 - \frac{1-f_2}{f_2} + f_3 + \frac{1}{f_5} = 0,$$

где

$$f_1 = x, \quad f_2 = y, \quad f_3 = \frac{x}{y}, \quad f_4 = \frac{x}{(1-x)(1-y)}, \quad f_5 = \frac{y}{(1-x)(1-y)}.$$

7. Приложение

7.1. Мультискобки. Условия совместности для линейных (и также нелинейных) систем уравнений в частных производных можно записать в терминах мультискобок, введенных в [21]. Ниже даются формулы для мультискобок, которые используются в данной статье.

Рассмотрим линейную систему уравнений в частных производных, состоящую из $n+1$ дифференциального уравнения с n неизвестными функциями:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n+11} & \cdots & a_{n+1\,n} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Vmatrix} = 0,$$

где a_{ij} — линейные дифференциальные операторы.

Мультискобка $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ скалярных дифференциальных операторов $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ определяется формулой

$$\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \mathrm{Ndet}\,(A_i) a_i,$$

где A_i — $n \times n$-матрица, получаемая из матрицы $\|a_{ij}\|$ вычеркиванием i-й строки, и Ndet — некоммутативная версия детерминантной функции, определенной с помощью стандартной формулы разложения детерминанта по первому столбцу.

Абелево уравнение будет уравнением именно такой формы, и оно удовлетворяет условиям, приведенным в [21]. Поэтому мультискобки дают условия совместности абелева уравнения.

7.2. Коэффициенты препятствия. Ниже выписаны коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4 и c_5:

$$c_1 = \frac{j_1}{3ad}, \quad c_2 = \frac{j_2}{3ad}, \quad c_3 = \frac{j_3}{d}, c_4 = \frac{j_4}{6a}, \quad c_5 = \frac{j_5}{6a},$$

где

$$d = -10a^2b^2(a-1)^2(b-1)^2(a-b)^2$$

и

$$\begin{aligned} j_1 = {} & -3(-1+b)b^2(6a^3 - 6a^2(1+b) - b(1+b) + 2a(1+b)^2)a_1^3 - \\ & - 3ba_1^2(-(-1+b)b(-6a^4 - b^2(5+2b) + a^3(16+13b) + \\ & + ab(13+12b+4b^2) - a^2(10+23b+12b^2))a_2 + a((b + a^2(7-12b) \end{aligned}$$

$b - 2b^3 + a^3(-2 + 4b) + a(1 - 8b + 7b^2 + 4b^3))b_1 + b(-(-2 + b)$
$b^2 + a^3(-6 + 4b) + a^2(3 + 7b - 5b^2) + a(1 - 6b - b^2 + 2b^3))b_2)) -$
$- a_1(3(-1 + b)b^2(-6b^3 - 3a^4(2 + b) + ab^2(17 + 8b) -$
$- a^2b(16 + 23b) + a^3(4 + 24b + b^2))a_2^2 + 3(-1 + a)$
$aba_2((2(2 - 3b)b^2 + a^3(-2 + 4b) + a^2(1 + 5b - 12b^2) +$
$+ ab(-8 + 9b + 5b^2))b_1 + b(-2(-2 + b)b^2 + a^3(-6 + 4b) +$
$+ a^2(7 + 3b - 4b^2) + ab(-8 - b + 3b^2))b_2) +$
$+ a(-31a^3b^2K + 28a^4b^2K + 3a^5b^2K + 50a^2b^3K + 22a^3b^3K - 69a^4b^3K -$
$- 3a^5b^3K - 19ab^4K - 92a^2b^4K + 70a^3b^4K + 41a^4b^4K + 42ab^5K +$
$+ 19a^2b^5K - 61a^3b^5K - 23ab^6K + 23a^2b^6K - 3(-1 + b)b^2(6a^3 -$
$- b(1 + 2b) - 3a^2(2 + 3b) + a(1 + 8b + 3b^2))a_{11} + 3(-1 + b)b^2(-6a^4 -$
$- b^2(5 + 2b) + 3a^3(4 + 5b) + ab(13 + 12b + 4b^2) - a^2(8 + 22b + 13b^2))a_{12} +$
$+ 6a^3b^2a_{22} - 6a^4b^2a_{22} - 24a^2b^3a_{22} + 21a^3b^3a_{22} + 27ab^4a_{22} - 6a^2b^4a_{22} -$
$- 18a^3b^4a_{22} + 6a^4b^4a_{22} - 9b^5a_{22} - 18ab^5a_{22} + 27a^2b^5a_{22} - 9a^3b^5a_{22} +$
$+ 9b^6a_{22} - 9ab^6a_{22} + 3a^2b^6a_{22} + 3a^2b_1^2 - 3a^4b_1^2 - 6abb_1^2 - 6a^2bb_1^2 + 6a^3bb_1^2 +$
$+ 6a^4bb_1^2 + 18ab^2b_1^2 - 18a^3b^2b_1^2 - 18ab^3b_1^2 + 18a^2b^3b_1^2 - 9a^3b_1b_2 + 9a^4b_1b_2 +$
$+ 18a^2bb_1b_2 - 18a^4bb_1b_2 - 12ab^2b_1b_2 - 30a^2b^2b_1b_2 + 30a^3b^2b_1b_2 +$
$+ 12a^4b^2b_1b_2 + 24ab^3b_1b_2 - 24a^3b^3b_1b_2 - 9ab^4b_1b_2 + 9a^2b^4b_1b_2 +$
$+ 6a^2b^2b_2^2 - 6a^4b^2b_2^2 - 18a^2b^3b_2^2 + 18a^3b^3b_2^2 + 3ab^4b_2^2 - 3a^3b^4b_2^2 - 3a^2bb_{11} +$
$+ 3a^4bb_{11} + 3ab^2b_{11} + 12a^2b^2b_{11} - 12a^3b^2b_{11} - 3a^4b^2b_{11} - 12ab^3b_{11} +$
$+ 12a^3b^3b_{11} + 9ab^4b_{11} - 9a^2b^4b_{11} + 9a^3bb_{12} - 9a^4bb_{12} - 21a^2b^2b_{12} +$
$+ 21a^4b^2b_{12} + 12ab^3b_{12} + 30a^2b^3b_{12} - 30a^3b^3b_{12} - 12a^4b^3b_{12} - 21ab^4b_{12} +$
$+ 21a^3b^4b_{12} + 9ab^5b_{12} - 9a^2b^5b_{12} + 9a^3b^2b_{22} - 9a^4b^2b_{22} - 12a^2b^3b_{22} +$
$+ 12a^4b^3b_{22} + 3ab^4b_{22} + 12a^2b^4b_{22} - 12a^3b^4b_{22} - 3a^4b^4b_{22} - 3ab^5b_{22} +$
$+ 3a^3b^5b_{22})) - a(-3a^2(2 + a(-3 + b))(-1 + b)b^3a_2^3 + 3a^2ba_2^2((a^2(1 - 2b) +$
$+ b + b^2 - 3b^3 + ab(-3 + 4b + b^2))b_1 + (-2 + b)b(a^2(-2 + b) + b - 2b^2 +$
$+ a(1 + b^2))b_2) + a_2(-3(-1 + b)b^2(3a^4 - 7a^3(1 + b) + 2b^2(1 + b) -$
$- ab(5 + 9b + 2b^2) + a^2(3 + 14b + 6b^2))a_{11} + 3(-1 + b)b^2(6b^3 +$
$+ 3a^4(2 + b) - ab^2(17 + 8b) + a^2b(15 + 26b) - a^3(4 + 24b + 3b^2))a_{12} +$
$+ a(3a(-1 + b)b^3(a^2(-4 + b) - 3b + a(3 + 4b - b^2))a_{22} +$
$+ (-1 + a)(3a(a^2(-1 + 2b) + a(-1 + 4b - 6b^2) + 2b(1 - 3b + 3b^2))b_1^2 +$
$+ 3a(b^2(4 - 8b + 3b^2) - 2ab(3 - 7b + 4b^2) + a^2(3 - 6b + 4b^2))b_1b_2$
$+ b(-3ab(2a^2 + b^2 + a(2 - 6b + b^2))b_2^2 + (a - b)(-1 + b)$
$(-3a(1 + a - 3b)b_{11} - 3a((4 - 3b)b + a(-3 + 4b))b_{12} -$
$- b((a^2(23 - 19b) + 3b^2 + ab(-38 + 31b))K + 3a(a(-3 + b) + b)b_{22})))))) +$
$+ 3(-1 + a)a(a - b)b((a - b)(-1 + b)ba_{111} + (-1 + b)b(3a^2 + 2b(1 + b) -$
$- a(2 + 5b))a_{112} + 2a^2ba_{122} - 5ab^2a_{122} + 3b^3a_{122} + 3ab^3a_{122} - 2a^2b^3a_{122} -$

$$
\begin{aligned}
&- 3b^4a_{122} + 2ab^4a_{122} - a^2b^2a_{222} + ab^3a_{222} + a^2b^3a_{222} - ab^4a_{222} + 4a^2Kb_1 - \\
&- 4a^3Kb_1 - 8abKb_1 + 8a^3bKb_1 + 12ab^2Kb_1 - 12a^2b^2Kb_1 + aa_{11}b_1 - \\
&- 2ba_{11}b_1 - 2aba_{11}b_1 + 3b^2a_{11}b_1 - 2aa_{12}b_1 + 2a^2a_{12}b_1 + 4ba_{12}b_1 - \\
&- 4a^2ba_{12}b_1 - 6b^2a_{12}b_1 + 6ab^2a_{12}b_1 - a^2a_{22}b_1 + 2aba_{22}b_1 + 2a^2ba_{22}b_1 - \\
&- 3ab^2a_{22}b_1 + 12a^2bKb_2 - 12a^3bKb_2 - 8ab^2Kb_2 + 8a^3b^2Kb_2 + \\
&+ 4ab^3Kb_2 - 4a^2b^3Kb_2 + 3aba_{11}b_2 - 2b^2a_{11}b_2 - 2ab^2a_{11}b_2 + b^3a_{11}b_2 - \\
&- 6aba_{12}b_2 + 6a^2ba_{12}b_2 + 4b^2a_{12}b_2 - 4a^2b^2a_{12}b_2 - 2b^3a_{12}b_2 + 2ab^3a_{12}b_2 - \\
&- 3a^2ba_{22}b_2 + 2ab^2a_{22}b_2 + 2a^2b^2a_{22}b_2 - ab^3a_{22}b_2 - 5a^2bK_1 + 5a^3bK_1 + \\
&+ 5ab^2K_1 - 5a^3b^2K_1 - 5ab^3K_1 + 5a^2b^3K_1 + 5a^2b^2K_2 - 5a^3b^2K_2 - \\
&- 5ab^3K_2 + 5a^3b^3K_2 + 5ab^4K_2 - 5a^2b^4K_2));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
j_2 = {} & -3(-1+b)b^3(6a^3 - 6a^2(1+b) - b(1+b) + 2a(1+b)^2)a_1^3 + \\
&+ 3b^2a_1^2((-1+b)b(-6a^4 - b^2(5+2b) + a^3(16+13b) + \\
&+ ab(13+12b+4b^2) - a^2(10+23b+12b^2))a_2 + a((2a^3(-2+b) + b^3 + \\
&+ a^2(6-7b+6b^2) - a(3-6b+5b^2+2b^3))b_1 + (-1+a)b(2a^2b + \\
&+ b(-1+2b) - a(-3+5b+b^2))b_2)) + ba_1(-3(-1+b)b^2(-6b^3 - \\
&- 3a^4(2+b) + ab^2(17+8b) - a^2b(16+23b) + a^3(4+24b+b^2))a_2^2 - \\
&- 3aba_2((a^4(1+b) + b^2(-1+3b) + ab(2-5b-5b^2) + a^3(-5+b-4b^2) + \\
&+ a^2(3-3b+11b^2+b^3))b_1 - b(-a^4(-3+b) + b^2(1+b) + a^3(-5+b-4b^2) - \\
&- ab(2+5b+b^2) + a^2(3+b+7b^2+b^3))b_2) + a(7a^3b^2K + 8a^4b^2K - 3a^5b^2K - \\
&- 14a^2b^3K - 34a^3b^3K - 3a^4b^3K + 3a^5b^3K + 7ab^4K + 44a^2b^4K + 26a^3b^4K - \\
&- 5a^4b^4K - 18ab^5K - 31a^2b^5K + a^3b^5K + 11ab^6K + a^2b^6K - 3a^2(2+3b) + \\
&+ 3(-1+b)b^2(6a^3 - b(1+2b) + a(1+8b+3b^2))a_{11} + \\
&+ 3(-1+b)b^2(6a^4 + b^2(5+2b) - 3a^3(4+5b) - ab(13+12b+4b^2) + \\
&+ a^2(8+22b+13b^2))a_{12} - 6a^3b^2a_{22} + 6a^4b^2a_{22} + 24a^2b^3a_{22} - 21a^3b^3a_{22} - \\
&- 27ab^4a_{22} + 6a^2b^4a_{22} + 18a^3b^4a_{22} - 6a^4b^4a_{22}9b^5a_{22} + 18ab^5a_{22} - 27a^2b^5a_{22} + \\
&+ 9a^3b^5a_{22} - 9b^6a_{22} + 9ab^6a_{22} - 3a^2b^6a_{22} - 3a^4b_1^2 + 9abb_1^2 - 18a^2bb_1^2 + \\
&+ 15a^3bb_1^2 + 6a^4bb_1^2 - 18ab^2b_1^2 + 21a^2b^2b_1^2 - 18a^3b^2b_1^2 + 12ab^3b_1^2 - 6a^2b^3b_1^2 - \\
&- 3a^3b_1b_2 + 9a^4b_1b_2 + 6a^2bb_1b_2 - 15a^3bb_1b_2 - 15a^4bb_1b_2 + 9ab^2b_1b_2 - 9a^2b^2b_1b_2 + \\
&+ 33a^3b^2b_1b_2 + 3a^4b^2b_1b_2 - 15ab^3b_1b_2 + 3a^2b^3b_1b_2 - 12a^3b^3b_1b_2 + 3ab^4b_1b_2 + \\
&+ 3a^2b^4b_1b_2 - 3a^2b^2b_2^2 + 3a^3b^2b_2^2 - 3a^4b^2b_2^2 + 9a^2b^3b_2^2 - 6a^3b^3b_2^2 + 3a^4b^3b_2^2 - \\
&- 6a^2b^4b_2^2 + 3a^3b^4b_2^2 + 3a^2bb_{11} - 6a^3bb_{11} + 6a^4bb_{11} - 3ab^2b_{11} - 3a^2b^2b_{11} + \\
&+ 3a^3b^2b_{11} - 6a^4b^2b_{11} + 9ab^3b_{11} - 3a^2b^3b_{11} + 3a^3b^3b_{11} - 6ab^4b_{11} + 3a^2b^4b_{11} + \\
&+ 3a^3bb_{12} - 9a^4bb_{12} + 3a^2b^2b_{12} + 6a^3b^2b_{12} + 15a^4b^2b_{12} - 6ab^3b_{12} - 6a^2b^3b_{12} - \\
&- 18a^3b^3b_{12} - 6a^4b^3b_{12} + 9ab^4b_{12} + 6a^2b^4b_{12} + 9a^3b^4b_{12} - 3ab^5b_{12} - 3a^2b^5b_{12} - \\
&- 3a^3b^2b_{22} + 3a^2b^3b_{22} + 9a^3b^3b_{22} - 3a^4b^3b_{22} - 9a^2b^4b_{22} - 3a^3b^4b_{22} + 3a^4b^4b_{22} + \\
&+ 6a^2b^5b_{22} - 3a^3b^5b_{22})) + a(3a^2(2+a(-3+b))(-1+b)b^4a_2^3 - \\
&- 3a^2b^3a_2^2((-1+a^2(-2+b) + b - b^2 + a(3-2b+b^2))b_1 + b(-4+5b) +
\end{aligned}
$$

$$+ a^2(3 - 4b + 2b^2) + a(-2 + 7b - 8b^2 + b^3))b_2) -$$
$$- ba_2(-3(-1 + b)b^2(3a^4 - 7a^3(1 + b) + 2b^2(1 + b) - ab(5 + 9b + 2b^2) +$$
$$+ a^2(3 + 14b + 6b^2))a_{11} + 3(-1 + b)b^2(6b^3 + 3a^4(2 + b) - ab^2(17 + 8b) +$$
$$+ a^2b(15 + 26b) - a^3(4 + 24b + 3b^2))a_{12} + a(3a(-1 + b)b^3(a^2(-4 + b) - 3b +$$
$$+ a(3 + 4b - b^2))a_{22} - 3a(-1 + b)(a^2(-2 + b) - 3b + a(1 + 5b - 2b^2))b_1^2 +$$
$$+ 3a(a^3(1 - b + b^2) + b^2(3 - 5b + 3b^2) + a^2(1 - 5b + 7b^2 - 4b^3) +$$
$$+ ab(-2 + b + b^2 - b^3))b_1b_2 + b(-3ab(a^3b + b(-2 + 3b) + a(-4 + 7b - 4b^2) +$$
$$+ a^2(5 - 8b + 2b^2))b_2^2 + (a - b)(-1 + b)(3a(1 + a(-2 + b))b_{11} +$$
$$+ 3a(a + a^2(1 - 2b) - ab^2 + b(-2 + 3b))b_{12} - b((a^3(11 - 7b) - 3b^2 +$$
$$+ 2ab(1 + 4b) + a^2(1 - 19b + 7b^2))K + 3a(a + a^2(-2 + b) + 2b - 2ab)b_{22}))))) +$$
$$+ (-1 + a)a(-3(a - b)^2(-1 + b)b^3a_{111} - 3(-2 + 3a - 2b)(a - b)^2(-1 + b)b^3a_{112} -$$
$$- 6a^3b^3a_{122} + 21a^2b^4a_{122} - 24ab^5a_{122} - 9a^2b^5a_{122} + 6a^3b^5a_{122} + 9b^6a_{122} +$$
$$+ 18ab^6a_{122} - 12a^2b^6a_{122} - 9b^7a_{122} + 6ab^7a_{122} + 3a^3b^4a_{222} - 6a^2b^5a_{222} -$$
$$- 3a^3b^5a_{222} + 3ab^6a_{222} + 6a^2b^6a_{222} - 3ab^7a_{222} + 7a^3b^2Kb_1 - 11a^4b^2Kb_1 -$$
$$- 14a^2b^3Kb_1 + 30a^3b^3Kb_1 - a^4b^3Kb_1 + 7ab^4Kb_1 - 27a^2b^4Kb_1 - a^3b^4Kb_1 +$$
$$+ 8ab^5Kb_1 + 5a^2b^5Kb_1 - 3ab^6Kb_1 - 3ab^2a_{11}b_1 + 6a^2b^2a_{11}b_1 + 3b^3a_{11}b_1 -$$
$$- 3a^2b^3a_{11}b_1 - 6b^4a_{11}b_1 - 3ab^4a_{11}b_1 + 6b^5a_{11}b_1 - 6a^2b^2a_{12}b_1 + 3a^3b^2a_{12}b_1 +$$
$$+ 3ab^3a_{12}b_1 - 3a^2b^3a_{12}b_1 + 3a^3b^3a_{12}b_1 + 3b^4a_{12}b_1 + 9ab^4a_{12}b_1 - 9a^2b^4a_{12}b_1 -$$
$$- 9b^5a_{12}b_1 + 6ab^5a_{12}b_1 + 3a^2b^3a_{22}b_1 - 6a^3b^3a_{22}b_1 - 3ab^4a_{22}b_1 + 6a^2b^4a_{22}b_1 +$$
$$+ 3a^3b^4a_{22}b_1 - 3a^2b^5a_{22}b_1 - 3a^2b_1^3 - 3a^3b_1^3 + 6abb_1^3 + 12a^2bb_1^3 + 6a^3bb_1^3 -$$
$$- 18ab^2b_1^3 - 18a^2b^2b_1^3 + 18ab^3b_1^3 - 3a^4b^2Kb_2 + 5a^3b^3Kb_2 + 8a^4b^3Kb_2 -$$
$$- a^2b^4Kb_2 - 27a^3b^4Kb_2 + 7a^4b^4Kb_2 - ab^5Kb_2 + 30a^2b^5Kb_2 - 14a^3b^5Kb_2 -$$
$$- 11ab^6Kb_2 + 7a^2b^6Kb_2 - 3ab^3a_{11}b_2 + 3b^4a_{11}b_2 + 6ab^4a_{11}b_2 - 3a^2b^4a_{11}b_2 -$$
$$- 6b^5a_{11}b_2 + 3ab^5a_{11}b_2 + 6a^2b^3a_{12}b_2 - 9a^3b^3a_{12}b_2 - 9ab^4a_{12}b_2 + 9a^2b^4a_{12}b_2 +$$
$$+ 3a^3b^4a_{12}b_2 + 3b^5a_{12}b_2 - 3ab^5a_{12}b_2 + 3a^2b^5a_{12}b_2 + 3b^6a_{12}b_2 - 6ab^6a_{12}b_2 +$$
$$+ 6a^3b^3a_{22}b_2 - 3a^2b^4a_{22}b_2 - 6a^3b^4a_{22}b_2 - 3ab^5a_{22}b_2 + 3a^3b^5a_{22}b_2 + 6ab^6a_{22}b_2 -$$
$$- 3a^2b^6a_{22}b_2 + 15a^3b_1^2b_2 + 6a^4b_1^2b_2 - 39a^2bb_1^2b_2 - 36a^3bb_1^2b_2 - 12a^4bb_1^2b_2 +$$
$$+ 30ab^2b_1^2b_2 + 69a^2b^2b_1^2b_2 + 36a^3b^2b_1^2b_2 - 48ab^3b_1^2b_2 - 39a^2b^3b_1^2b_2 + 18ab^4b_1^2b_2 -$$
$$- 18a^4b_1b_2^2 + 51a^3bb_1b_2^2 + 24a^4bb_1b_2^2 - 48a^2b^2b_1b_2^2 - 69a^3b^2b_1b_2^2 + 12ab^3b_1b_2^2 +$$
$$+ 72a^2b^3b_1b_2^2 + 3a^3b^3b_1b_2^2 - 18ab^4b_1b_2^2 - 9a^2b^4b_1b_2^2 - 6a^2b^3b_2^3 + 9a^2b^4b_2^3 -$$
$$- 3a^3b^4b_2^3 + 3a^2bb_1b_{11} + 6a^3bb_1b_{11} - 3ab^2b_1b_{11} - 24a^2b^2b_1b_{11} - 9a^3b^2b_1b_{11} +$$
$$+ 18ab^3b_1b_{11} + 27a^2b^3b_1b_{11} - 18ab^4b_1b_{11} - 6a^3bb_2b_{11} - 6a^4bb_2b_{11} + 15a^2b^2b_2b_{11} +$$
$$+ 27a^3b^2b_2b_{11} + 6a^4b^2b_2b_{11} - 9ab^3b_2b_{11} - 42a^2b^3b_2b_{11} - 18a^3b^3b_2b_{11} +$$
$$+ 21ab^4b_2b_{11} + 21a^2b^4b_2b_{11} - 9ab^5b_2b_{11} - 15a^3bb_1b_{12} - 6a^4bb_1b_{12} + 39a^2b^2b_1b_{12} +$$
$$+ 36a^3b^2b_1b_{12} + 12a^4b^2b_1b_{12} - 24ab^3b_1b_{12} - 66a^2b^3b_1b_{12} - 39a^3b^3b_1b_{12} +$$
$$+ 36ab^4b_1b_{12} + 45a^2b^4b_1b_{12} - 18ab^5b_1b_{12} + 18a^4bb_2b_{12} - 51a^3b^2b_2b_{12} -$$
$$- 24a^4b^2b_2b_{12} + 45a^2b^3b_2b_{12} + 78a^3b^3b_2b_{12} - 12ab^4b_2b_{12} - 72a^2b^4b_2b_{12} -$$

$$
\begin{aligned}
&- 9a^3b^4b_2b_{12} + 18ab^5b_2b_{12} + 9a^2b^5b_2b_{12} + 9a^4bb_1b_{22} - 27a^3b^2b_1b_{22} - \\
&- 9a^4b^2b_1b_{22} + 24a^2b^3b_1b_{22} + 30a^3b^3b_1b_{22} + 3a^4b^3b_1b_{22} - 6ab^4b_1b_{22} - \\
&- 27a^2b^4b_1b_{22} - 9a^3b^4b_1b_{22} + 6ab^5b_1b_{22} + 6a^2b^5b_1b_{22} - 9a^3b^3b_2b_{22} + \\
&+ 9a^2b^4b_2b_{22} + 12a^3b^4b_2b_{22} - 3a^4b^4b_2b_{22} - 12a^2b^5b_2b_{22} + 3a^3b^5b_2b_{22} - \\
&- 3a^3b^2b_{111} + 6a^2b^3b_{111} + 3a^3b^3b_{111} - 3ab^4b_{111} - 6a^2b^4b_{111} + 3ab^5b_{111} + \\
&+ 6a^3b^2b_{112} + 6a^4b^2b_{112} - 12a^2b^3b_{112} - 27a^3b^3b_{112} - 6a^4b^3b_{112} + 6ab^4b_{112} + \\
&+ 36a^2b^4b_{112} + 21a^3b^4b_{112} - 15ab^5b_{112} - 24a^2b^5b_{112} + 9ab^6b_{112} - 9a^4b^2b_{122} + \\
&+ 24a^3b^3b_{122} + 15a^4b^3b_{122} - 21a^2b^4b_{122} - 36a^3b^4b_{122} - 6a^4b^4b_{122} + 6ab^5b_{122} + \\
&+ 27a^2b^5b_{122} + 12a^3b^5b_{122} - 6ab^6b_{122} - 6a^2b^6b_{122} - 3a^4b^3b_{222} + 6a^3b^4b_{222} + \\
&+ 3a^4b^4b_{222} - 3a^2b^5b_{222} - 6a^3b^5b_{222} + 3a^2b^6b_{222} - 15a^4b^3K_1 + 45a^3b^4K_1 + \\
&+ 15a^4b^4K_1 - 45a^2b^5K_1 - 45a^3b^5K_1 + 15ab^6K_1 + 45a^2b^6K_1 - 15ab^7K_1 + \\
&+ 15a^4b^3K_2 - 45a^3b^4K_2 - 15a^4b^4K_2 + 45a^2b^5K_2 + 45a^3b^5K_2 - 15ab^6K_2 - \\
&- 45a^2b^6K_2 + 15ab^7K_2));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
j_3 = &-(-1+b)b^2(6a^3 - 6a^2(1+b) - b(1+b) + 2a(1+b)^2)Ka_1^2 + \\
&+ 2a^2(-2 - 5b + 5b^2 + 2b^3))Ka_2 - ba_1(b(3a^4(-1+b) + 3(-1+b)b^2 - \\
&- 8a^3(-1+b^2) - 6ab(-1+b^2) + a((b + a^2(7-12b)b - 2b^3 + \\
&+ a^3(-2+4b) + a(1 - 8b + 7b^2 + 4b^3))Kb_1 + b((-(-2+b)b^2 + \\
&+ a^3(-6+4b) + a^2(3 + 7b - 5b^2) + a(1 - 6b - b^2 + 2b^3))Kb_2 + \\
&+ (-1+b)(3a^3 - b^2 + ab(3+2b) - a^2(2+5b))(-K_1 + bK_2)))) - \\
&- a(-a(-1+b)b^2(-6ab + a^2(1+b) + 2b(1+b))Ka_2^2 + \\
&+ aba_2((b + 3b^2 - 6b^3 + a^3(-1+2b) + ab(-6 + 7b + 4b^2) - \\
&- a^2(-2 + b + 5b^2))Kb_1 + b((a^3(-3+2b) + b(-2 + 7b - 3b^2) - \\
&- a^2(-7 + b + 2b^2) + a(-2 - 4b - b^2 + 2b^3))Kb_2 + \\
&+ (-1+b)(a^3 - 3b^2 + ab(5+2b) - a^2(2+3b))(-K_1 + bK_2))) + \\
&+ (-1+a)(-(-1+b)b^2(-a + 3a^2 + b - 4ab + b^2)Ka_{11} - \\
&- (-1+b)b^2(3a^3 - 3b^2 + ab(7+4b) - a^2(4+7b))Ka_{12} + \\
&+ a((-1+b)b^2(3b^2 + a^2(1+b) - ab(4+b))Ka_{22} + \\
&+ (a^2(-1+2b) + a(-1 + 4b - 6b^2) + 2b(1 - 3b + 3b^2))Kb_1^2 + \\
&+ b_1((b^2(4 - 8b + 3b^2) - 2ab(3 - 7b + 4b^2) + a^2(3 - 6b + 4b^2))Kb_2 + \\
&+ b(a(3-5b)b + a^2(-1+2b) + b^2(-2+3b))(-K_1 + aK_2)) + \\
&+ b(-b(2a^2 + b^2 + a(2 - 6b + b^2))Kb_2^2 + \\
&+ b(a(5-3b)b + (-2+b)b^2 + a^2(-3+2b))b_2(-K_1 + aK_2) + \\
&+ (a-b)(-1+b)(-(1 + a - 3b)Kb_{11} + (a(3-4b) + b(-4+3b))Kb_{12} - \\
&- b((a(-3+b) + b)Kb_{22} - (a-b)(-10K^2 + 5aK^2 + 5bK^2 + K_{11} - \\
&- (a+b)K_{12} + abK_{22})))))));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
j_4 = &-6(-1+b)b^2(6a^3 - 6a^2(1+b) - b(1+b) + 2a(1+b)^2)a_1^3b_2 - \\
&- 6ba_1^2(-(-1+b)b(-6a^4 - b^2(5+2b) + a^3(16+13b) + ab(13 + 12b + 4b^2) -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- a^2(10 + 23b + 12b^2))a_2 b_2 + a((b + a^2(7 - 12b)b - 2b^3 + a^3(-2 + 4b) + \\
&+ a(1 - 8b + 7b^2 + 4b^3))b_1 b_2 + b(-(-1 + a)(2a^2 b + b(-1 + 2b) - \\
&- a(-3 + 5b + b^2))b_2^2 + (-1 + b)(6a^3 - 6a^2(1 + b) - b(1 + b) + \\
&+ 2a(1 + b)^2)(bK - b_{12})))) + 2a_1(-3(-1 + b)b^2(-6b^3 - 3a^4(2 + b) + \\
&+ ab^2(17 + 8b) - a^2 b(16 + 23b) + a^3(4 + 24b + b^2))a_2^2 b_2 - \\
&- 3aba_2((-1 + a)(2(2 - 3b)b^2 + a^3(-2 + 4b) + a^2(1 + 5b - 12b^2) + \\
&+ ab(-8 + 9b + 5b^2))b_1 b_2 + b((a^4(-3 + b) - b^2(1 + b) + ab(2 + 5b + b^2) + \\
&+ a^3(5 - b + 4b^2) - a^2(3 + b + 7b^2 + b^3))b_2^2 + (-1 + b)(3a^4 + 3b^2 - \\
&- 8a^3(1 + b) - 6ab(1 + b) + 2a^2(2 + 7b + 2b^2))(bK - b_{12}))) + \\
&+ a(-3a(2a^2(1 - 3b)b + a^3(-1 + 2b) - 2b(1 - 3b + 3b^2) + \\
&+ a(1 - 2b + 6b^3))b_1^2 b_2 + ab_1(3(a^3(-3 + 4b) + b^2(5 - 8b + b^2) + \\
&+ a^2(3 - 3b^2 - 4b^3) + ab(-5 + 2b + 7b^2 + b^3))b_2^2 + \\
&+ b(b(3a^3(-5 + 3b) + a^2(14 + b^2) - b(3 - 7b + b^2) + \\
&+ a(-3 + 3b - 14b^2 + 2b^3))K + 3(b + a^2(7 - 12b)b - 2b^3 + \\
&+ a^3(-2 + 4b) + a(1 - 8b + 7b^2 + 4b^3))b_{12} - 3(-1 + b)(3a^3 - b^2 + ab(3 + 2b) - \\
&- a^2(2 + 5b))b_{22})) + b(3a^2(1 + a^2 + a(-1 + b) - 2b)(-1 + b)bb_2^3 + \\
&+ b_2(9a^3 bK + 5a^4 bK - 3a^5 bK - 20a^2 b^2 K - 34a^3 b^2 K + 9a^4 b^2 K + 3a^5 b^2 K + \\
&+ 8ab^3 K + 54a^2 b^3 K + 9a^3 b^3 K - 8a^4 b^3 K - 22ab^4 K - 23a^2 b^4 K + a^3 b^4 K + \\
&+ 11ab^5 K + a^2 b^5 K + 3(-1 + b)b(6a^3 - b(1 + 2b) - 3a^2(2 + 3b) + \\
&+ a(1 + 8b + 3b^2))a_{11} + 3(-1 + b)b(6a^4 + b^2(5 + 2b) - 3a^3(4 + 5b) - \\
&- ab(13 + 12b + 4b^2) + a^2(8 + 22b + 13b^2))a_{12} - 6a^3 ba_{22} + 6a^4 ba_{22} + \\
&+ 24a^2 b^2 a_{22} - 21a^3 b^2 a_{22} - 27ab^3 a_{22} + 6a^2 b^3 a_{22} + 18a^3 b^3 a_{22} - 6a^4 b^3 a_{22} + \\
&+ 9b^4 a_{22} + 18ab^4 a_{22} - 27a^2 b^4 a_{22} + 9a^3 b^4 a_{22} - 9b^5 a_{22} + 9ab^5 a_{22} - \\
&- 3a^2 b^5 a_{22} + 3a^2 b_{11} - 3a^4 b_{11} - 3abb_{11} - 12a^2 bb_{11} + 12a^3 bb_{11} + 3a^4 bb_{11} + \\
&+ 12ab^2 b_{11} - 12a^3 b^2 b_{11} - 9ab^3 b_{11} + 9a^2 b^3 b_{11} - 9a^3 b_{12} + 9a^4 b_{12} + 24a^2 bb_{12} - \\
&- 9a^3 bb_{12} - 12a^4 bb_{12} - 12ab^2 b_{12} - 21a^2 b^2 b_{12} + 24a^3 b^2 b_{12} - 3a^4 b^2 b_{12} + \\
&+ 18ab^3 b_{12} - 12a^2 b^3 b_{12} + 9a^3 b^3 b_{12} - 3ab^4 b_{12} - 3a^2 b^4 b_{12} - 3a^3 bb_{22} + \\
&+ 3a^2 b^2 b_{22} + 9a^3 b^2 b_{22} - 3a^4 b^2 b_{22} - 9a^2 b^3 b_{22} - 3a^3 b^3 b_{22} + 3a^4 b^3 b_{22} + \\
&+ 6a^2 b^4 b_{22} - 3a^3 b^4 b_{22}) + 3a(-1 + b)b(3a^3 - b^2 + ab(3 + 2b) - \\
&- a^2(2 + 5b))(-b_{112} + b_{122} + b(K_1 - K_2))))) - \\
&- a(-6a^2(2 + a(-3 + b))(-1 + b)b^3 a_2^3 b_2 - 6a^2 ba_2^2((a^2(-1 + 2b) - \\
&- ab(-3 + 4b + b^2) + b(-1 - b + 3b^2))b_1 b_2 + b(-(b(-4 + 5b) + \\
&+ a^2(3 - 4b + 2b^2) + a(-2 + 7b - 8b^2 + b^3))b_2^2 + (-1 + b)(-6ab + a^2(1 + b) + \\
&+ 2b(1 + b))(bK - b_{12}))) + 2a_2(3a^2(2a^2(1 - 3b)b + a^3(-1 + 2b) - \\
&- 2b(1 - 3b + 3b^2) + a(1 - 2b + 6b^3))b_1^2 b_2 - a^2 b_1(-3(a^3(3 - 5b + 2b^2) + \\
&+ b^2(-5 + 5b + 3b^2) - ab(-6 + 4b + 7b^2 + b^3) - a^2(3 + 2b - 11b^2 + 3b^3))b_2^2 + \\
&+ b(b(a^3(-4 + b) + a^2(8 + 10b - 6b^2) - 3b(1 - 4b + b^2) + ab(-17 + 2b^2))K +
\end{aligned}
$$

$$+ 3(b + 3b^2 - 6b^3 + a^3(-1 + 2b) + ab(-6 + 7b + 4b^2) - a^2(-2 + b + 5b^2))b_{12} -$$
$$- 3(-1 + b)(a^3 - 3b^2 + ab(5 + 2b) - a^2(2 + 3b))b_{22})) +$$
$$+ b(-3a^2b(a^3b + b(-2 + 3b) + a(-4 + 7b - 4b^2) + a^2(5 - 8b + 2b^2))b_2^3 +$$
$$+ b_2(-3(-1 + b)b(3a^4 - 7a^3(1 + b) + 2b^2(1 + b) - ab(5 + 9b + 2b^2) +$$
$$+ a^2(3 + 14b + 6b^2))a_{11} + 3(-1 + b)b(6b^3 + 3a^4(2 + b) - ab^2(17 + 8b) +$$
$$+ a^2b(15 + 26b) - a^3(4 + 24b + 3b^2))a_{12} + a(-a^3bK + 12a^4bK - 17a^3b^2K -$$
$$- 25a^4b^2K - 14ab^3K + 26a^2b^3K + 41a^3b^3K + 10a^4b^3K + 3b^4K + 12ab^4K -$$
$$- 48a^2b^4K - 11a^3b^4K - 3b^5K + 8ab^5K + 7a^2b^5K + 3a(-1 + b)b^2(a^2(-4 + b) -$$
$$- 3b + a(3 + 4b - b^2))a_{22} - 3(-1 + a)a(-1 + b)(a + a^2 - 4ab + b(-1 + 3b))b_{11} +$$
$$+ 9a^3b_{12} - 9a^4b_{12} - 15a^2bb_{12} - 3a^3bb_{12} + 21a^4bb_{12} + 18ab^2b_{12} - 3a^2b^2b_{12} -$$
$$- 18a^3b^2b_{12} - 9a^4b^2b_{12} - 15ab^3b_{12} + 30a^2b^3b_{12} - 9ab^4b_{12} + 3a^2b^4b_{12} + 3a^3bb_{22} -$$
$$- 6a^4bb_{22} + 3a^2b^2b_{22} - 3a^3b^2b_{22} + 9a^4b^2b_{22} - 6ab^3b_{22} + 3a^2b^3b_{22} - 3a^3b^3b_{22} -$$
$$- 3a^4b^3b_{22} + 6ab^4b_{22} - 6a^2b^4b_{22} + 3a^3b^4b_{22})) - 3a^2(-1 + b)b(a^3 - 3b^2 +$$
$$+ ab(5 + 2b) - a^2(2 + 3b))(-b_{112} + b_{122} + b(K_1 - K_2)))) +$$
$$+ (-1 + a)a(30a^3b^3K^2 - 30a^4b^3K^2 - 60a^2b^4K^2 + 30a^3b^4K^2 +$$
$$+ 30a^4b^4K^2 + 30ab^5K^2 + 30a^2b^5K^2 - 60a^3b^5K^2 - 30ab^6K^2 + 30a^2b^6K^2 -$$
$$- 6a^3b^3Ka_{22} + 24a^2b^4Ka_{22} - 18ab^5Ka_{22} - 18a^2b^5Ka_{22} + 6a^3b^5Ka_{22} +$$
$$+ 18ab^6Ka_{22} - 6a^2b^6Ka_{22} - 6a^2bKb_1^2 + 8a^3bKb_1^2 + 12ab^2Kb_1^2 - 18a^2b^2Kb_1^2 -$$
$$- 16a^3b^2Kb_1^2 - 8ab^3Kb_1^2 + 34a^2b^3Kb_1^2 - 6ab^4Kb_1^2 - 6a^2b^2a_{111}b_2 + 12ab^3a_{111}b_2 +$$
$$+ 6a^2b^3a_{111}b_2 - 6b^4a_{111}b_2 - 12ab^4a_{111}b_2 + 6b^5a_{111}b_2 + 12a^2b^2a_{112}b_2 -$$
$$- 18a^3b^2a_{112}b_2 - 24ab^3a_{112}b_2 + 36a^2b^3a_{112}b_2 + 18a^3b^3a_{112}b_2 + 12b^4a_{112}b_2 -$$
$$- 18ab^4a_{112}b_2 - 48a^2b^4a_{112}b_2 + 42ab^5a_{112}b_2 - 12b^6a_{112}b_2 + 12a^3b^2a_{122}b_2 -$$
$$- 42a^2b^3a_{122}b_2 + 48ab^4a_{122}b_2 + 18a^2b^4a_{122}b_2 - 12a^3b^4a_{122}b_2 - 18b^5a_{122}b_2 -$$
$$- 36ab^5a_{122}b_2 + 24a^2b^5a_{122}b_2 + 18b^6a_{122}b_2 - 12ab^6a_{122}b_2 - 6a^3b^3a_{222}b_2 +$$
$$+ 12a^2b^4a_{222}b_2 + 6a^3b^4a_{222}b_2 - 6ab^5a_{222}b_2 - 12a^2b^5a_{222}b_2 + 6ab^6a_{222}b_2 +$$
$$+ 20a^3bKb_1b_2 - 22a^4bKb_1b_2 - 42a^2b^2Kb_1b_2 + 10a^3b^2Kb_1b_2 + 44a^4b^2Kb_1b_2 +$$
$$+ 28ab^3Kb_1b_2 + 68a^2b^3Kb_1b_2 - 84a^3b^3Kb_1b_2 - 56ab^4Kb_1b_2 + 28a^2b^4Kb_1b_2 +$$
$$+ 6ab^5Kb_1b_2 - 6a^3ba_{22}b_1b_2 + 18a^2b^2a_{22}b_1b_2 + 12a^3b^2a_{22}b_1b_2 - 12ab^3a_{22}b_1b_2 -$$
$$- 30a^2b^3a_{22}b_1b_2 + 18ab^4a_{22}b_1b_2 + 4a^3b^2Kb_2^2 - 8a^4b^2Kb_2^2 - 18a^2b^3Kb_2^2 +$$
$$+ 36a^3b^3Kb_2^2 - 14a^4b^3Kb_2^2 + 2ab^4Kb_2^2 - 32a^2b^4Kb_2^2 + 22a^3b^4Kb_2^2 + 22ab^5Kb_2^2 -$$
$$- 14a^2b^5Kb_2^2 - 12a^3b^2a_{22}b_2^2 + 6a^2b^3a_{22}b_2^2 + 12a^3b^3a_{22}b_2^2 + 6ab^4a_{22}b_2^2 -$$
$$- 6a^3b^4a_{22}b_2^2 - 12ab^5a_{22}b_2^2 + 6a^2b^5a_{22}b_2^2 + 6a^2b_1^2b_2^2 + 6a^3b_1^2b_2^2 - 12abb_1^2b_2^2 -$$
$$- 24a^2bb_1^2b_2^2 - 12a^3bb_1^2b_2^2 + 36ab^2b_1^2b_2^2 + 36a^2b^2b_1^2b_2^2 - 36ab^3b_1^2b_2^2 - 18a^3b_1b_2^3 +$$
$$+ 36a^2bb_1b_2^3 + 30a^3bb_1b_2^3 - 24ab^2b_1b_2^3 - 66a^2b^2b_1b_2^3 - 12a^3b^2b_1b_2^3 + 36ab^3b_1b_2^3 +$$
$$+ 18a^2b^3b_1b_2^3 + 12a^2b^2b_2^4 - 18a^2b^3b_2^4 + 6a^3b^3b_2^4 + 6a^2b^2Kb_{11} - 18a^3b^2Kb_{11} -$$
$$- 6ab^3Kb_{11} + 18a^2b^3Kb_{11} + 18a^3b^3Kb_{11} - 24a^2b^4Kb_{11} + 6ab^5Kb_{11} - 6a^2bb_2^2b_{11} -$$
$$- 6a^3bb_2^2b_{11} + 6ab^2b_2^2b_{11} + 30a^2b^2b_2^2b_{11} + 6a^3b^2b_2^2b_{11} - 24ab^3b_2^2b_{11} - 24a^2b^3b_2^2b_{11} +$$

$$+ 18ab^4b_2^2b_{11} - 6(a-b)ba_{11}(-(a-2ab+b(-2+3b))b_1b_2 -$$
$$- b((1+(-2+a)b)b_2^2 + (-1+b)(1-3a+b)(bK-b_{12}))) -$$
$$- 6(a-b)ba_{12}(2(a-3ab^2+a^2(-1+2b)+b(-2+3b))b_1b_2 +$$
$$+ b((a^2(-3+b)-b(1+b)+2a(1+b^2))b_2^2 +$$
$$+ (-1+b)(3a^2+3b-4a(1+b))(bK-b_{12}))) -$$
$$- 36a^3b^2Kb_{12} + 42a^4b^2Kb_{12} + 78a^2b^3Kb_{12} - 42a^3b^3Kb_{12} - 42a^4b^3Kb_{12} -$$
$$- 42ab^4Kb_{12} - 42a^2b^4Kb_{12} + 78a^3b^4Kb_{12} + 42ab^5Kb_{12} - 36a^2b^5Kb_{12} +$$
$$+ 6a^3b^2a_{22}b_{12} - 24a^2b^3a_{22}b_{12} + 18ab^4a_{22}b_{12} + 18a^2b^4a_{22}b_{12} - 6a^3b^4a_{22}b_{12} -$$
$$- 18ab^5a_{22}b_{12} + 6a^2b^5a_{22}b_{12} + 6a^2b_1^2b_{12} + 6a^3b_1^2b_{12} - 12abb_1^2b_{12} -$$
$$- 24a^2bb_1^2b_{12} - 12a^3bb_1^2b_{12} + 36ab^2b_1^2b_{12} + 36a^2b^2b_1^2b_{12} - 36ab^3b_1^2b_{12} -$$
$$- 18a^3b_1b_2b_{12} + 36a^2bb_1b_2b_{12} + 18a^3bb_1b_2b_{12} - 24ab^2b_1b_2b_{12} - 30a^2b^2b_1b_2b_{12} +$$
$$+ 12a^3b^2b_1b_2b_{12} + 12ab^3b_1b_2b_{12} - 42a^2b^3b_1b_2b_{12} + 36ab^4b_1b_2b_{12} + 18a^3bb_2^2b_{12} -$$
$$- 30a^2b^2b_2^2b_{12} - 48a^3b^2b_2^2b_{12} + 24ab^3b_2^2b_{12} + 66a^2b^3b_2^2b_{12} + 24a^3b^3b_2^2b_{12} -$$
$$- 36ab^4b_2^2b_{12} - 18a^2b^4b_2^2b_{12} - 6a^2bb_{11}b_{12} - 6a^3bb_{11}b_{12} + 6ab^2b_{11}b_{12} +$$
$$+ 30a^2b^2b_{11}b_{12} + 6a^3b^2b_{11}b_{12} - 24ab^3b_{11}b_{12} - 24a^2b^3b_{11}b_{12} + 18ab^4b_{11}b_{12} +$$
$$+ 18a^3bb_{12}^2 - 42a^2b^2b_{12}^2 - 24a^3b^2b_{12}^2 + 24ab^3b_{12}^2 + 48a^2b^3b_{12}^2 + 6a^3b^3b_{12}^2 -$$
$$- 24ab^4b_{12}^2 - 6a^2b^4b_{12}^2 + 6a^4b^2Kb_{22} - 24a^3b^3Kb_{22} + 18a^2b^4Kb_{22} + 18a^3b^4Kb_{22} -$$
$$- 6a^4b^4Kb_{22} - 18a^2b^5Kb_{22} + 6a^3b^5Kb_{22} - 6a^3b_1^2b_{22} - 6a^4b_1^2b_{22} + 18a^2bb_1^2b_{22} +$$
$$+ 18a^3bb_1^2b_{22} + 12a^4bb_1^2b_{22} - 12ab^2b_1^2b_{22} - 24a^2b^2b_1^2b_{22} - 24a^3b^2b_1^2b_{22} +$$
$$+ 12ab^3b_1^2b_{22} + 12a^2b^3b_1^2b_{22} + 18a^4b_1b_2b_{22} - 36a^3bb_1b_2b_{22} - 18a^4bb_1b_2b_{22} +$$
$$+ 6a^2b^2b_1b_2b_{22} + 36a^3b^2b_1b_2b_{22} - 12a^4b^2b_1b_2b_{22} + 12ab^3b_1b_2b_{22} - 6a^2b^3b_1b_2b_{22} +$$
$$+ 24a^3b^3b_1b_2b_{22} - 12ab^4b_1b_2b_{22} - 12a^2b^4b_1b_2b_{22} + 18a^3b^2b_2^2b_{22} - 18a^2b^3b_2^2b_{22} -$$
$$- 24a^3b^3b_2^2b_{22} + 6a^4b^3b_2^2b_{22} + 24a^2b^4b_2^2b_{22} - 6a^3b^4b_2^2b_{22} + 6a^3bb_{11}b_{22} + 6a^4bb_{11}b_{22} -$$
$$- 12a^2b^2b_{11}b_{22} - 18a^3b^2b_{11}b_{22} - 6a^4b^2b_{11}b_{22} + 6ab^3b_{11}b_{22} + 18a^2b^3b_{11}b_{22} +$$
$$+ 12a^3b^3b_{11}b_{22} - 6ab^4b_{11}b_{22} - 6a^2b^4b_{11}b_{22} - 18a^4bb_{12}b_{22} + 48a^3b^2b_{12}b_{22} +$$
$$+ 12a^4b^2b_{12}b_{22} - 30a^2b^3b_{12}b_{22} - 42a^3b^3b_{12}b_{22} + 6a^4b^3b_{12}b_{22} + 30a^2b^4b_{12}b_{22} -$$
$$- 6a^3b^4b_{12}b_{22} - 6a^3bb_1b_{112} + 18a^2b^2b_1b_{112} + 12a^3b^2b_1b_{112} - 12ab^3b_1b_{112} -$$
$$- 30a^2b^3b_1b_{112} + 18ab^4b_1b_{112} + 6a^3b^2b_2b_{112} - 18a^2b^3b_2b_{112} - 12a^3b^3b_2b_{112} +$$
$$+ 12ab^4b_2b_{112} + 30a^2b^4b_2b_{112} - 18ab^5b_2b_{112} + 6a^3bb_1b_{122} + 6a^4bb_1b_{122} -$$
$$- 18a^2b^2b_1b_{122} - 18a^3b^2b_1b_{122} - 12a^4b^2b_1b_{122} + 12ab^3b_1b_{122} + 24a^2b^3b_1b_{122} +$$
$$+ 24a^3b^3b_1b_{122} - 12ab^4b_1b_{122} - 12a^2b^4b_1b_{122} - 6a^3b^2b_2b_{122} - 6a^4b^2b_2b_{122} +$$
$$+ 18a^2b^3b_2b_{122} + 18a^3b^3b_2b_{122} + 12a^4b^3b_2b_{122} - 12ab^4b_2b_{122} - 24a^2b^4b_2b_{122} -$$
$$- 24a^3b^4b_2b_{122} + 12ab^5b_2b_{122} + 12a^2b^5b_2b_{122} - 6a^4bb_1b_{222} + 12a^3b^2b_1b_{222} +$$
$$+ 6a^4b^2b_1b_{222} - 6a^2b^3b_1b_{222} - 12a^3b^3b_1b_{222} + 6a^2b^4b_1b_{222} + 6a^4b^2b_2b_{222} -$$
$$- 12a^3b^3b_2b_{222} - 6a^4b^3b_2b_{222} + 6a^2b^4b_2b_{222} + 12a^3b^4b_2b_{222} - 6a^2b^5b_2b_{222} +$$
$$+ 6a^3b^2b_{1112} - 12a^2b^3b_{1112} - 6a^3b^3b_{1112} + 6ab^4b_{1112} + 12a^2b^4b_{1112} -$$
$$- 6ab^5b_{1112} - 6a^3b^2b_{1122} - 6a^4b^2b_{1122} + 12a^2b^3b_{1122} + 18a^3b^3b_{1122} +$$

$$
\begin{aligned}
&+ 6a^4b^3b_{1122} - 6ab^4b_{1122} - 18a^2b^4b_{1122} - 12a^3b^4b_{1122} + 6ab^5b_{1122} + 6a^2b^5b_{1122} + \\
&+ 6a^4b^2b_{1222} - 12a^3b^3b_{1222} - 6a^4b^3b_{1222} + 6a^2b^4b_{1222} + 12a^3b^4b_{1222} - \\
&- 6a^2b^5b_{1222} - 15a^3b^2b_1K_1 + 24a^2b^3b_1K_1 + 9a^3b^3b_1K_1 - 9ab^4b_1K_1 - 12a^2b^4b_1K_1 + \\
&+ 3ab^5b_1K_1 - a^3b^2b_2K_1 + 29a^4b^2b_2K_1 + 2a^2b^3b_2K_1 - 75a^3b^3b_2K_1 - 29a^4b^3b_2K_1 - \\
&- ab^4b_2K_1 + 69a^2b^4b_2K_1 + 82a^3b^4b_2K_1 - 23ab^5b_2K_1 - 83a^2b^5b_2K_1 + 30ab^6b_2K_1 + \\
&+ 7a^3b^2b_1K_2 + 7a^4b^2b_1K_2 - 8a^2b^3b_1K_2 - 21a^3b^3b_1K_2 - a^4b^3b_1K_2 + ab^4b_1K_2 + \\
&+ 15a^2b^4b_1K_2 + 2a^3b^4b_1K_2 - ab^5b_1K_2 - a^2b^5b_1K_2 - 27a^4b^2b_2K_2 + 78a^3b^3b_2K_2 + \\
&+ 21a^4b^3b_2K_2 - 81a^2b^4b_2K_2 - 66a^3b^4b_2K_2 + 30ab^5b_2K_2 + 75a^2b^5b_2K_2 - \\
&- 30ab^6b_2K_2 - 6a^3b^3K_{11} + 12a^2b^4K_{11} + 6a^3b^4K_{11} - 6ab^5K_{11} - 12a^2b^5K_{11} + \\
&+ 6ab^6K_{11} + 6a^3b^3K_{12} + 6a^4b^3K_{12} - 12a^2b^4K_{12} - 18a^3b^4K_{12} - 6a^4b^4K_{12} + \\
&+ 6ab^5K_{12} + 18a^2b^5K_{12} + 12a^3b^5K_{12} - 6ab^6K_{12} - 6a^2b^6K_{12} - 6a^4b^3K_{22} + \\
&+ 12a^3b^4K_{22} + 6a^4b^4K_{22} - 6a^2b^5K_{22} - 12a^3b^5K_{22} + 6a^2b^6K_{22}));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
j_5 = &-6(-1+b)b^2(6a^3 - 6a^2(1+b) - b(1+b) + 2a(1+b)^2)a_1^3a_2 - \\
&- 2ba_1^2(-3(-1+b)b(-b^2(5+2b) + a^3(10+7b) + ab(12+11b+4b^2) - \\
&- a^2(8+19b+10b^2))a_2^2 - a(-1+b)b(a(3a^3 + a^2(4-17b) + \\
&+ (3-4b)b + a(-6+9b+8b^2))K + 3(6a^3 - 6a^2(1+b) - b(1+b) + \\
&+ 2a(1+b)^2)a_{12} - 3(2a^3(1+b) - b^2(1+b) - 2a^2(1+2b+2b^2) + \\
&+ ab(3+3b+2b^2))a_{22}) + 3aa_2((b + a^2(7-12b)b - 2b^3 + a^3(-2+4b) + \\
&+ a(1-8b+7b^2+4b^3))b_1 + b(-(-2+b)b^2 + a^3(-6+4b) + \\
&+ a^2(3+7b-5b^2) + a(1-6b-b^2+2b^3))b_2)) - \\
&- a_1(-6(-1+b)b^3(a^3(-13+b) + 6b^2 - 2ab(7+4b) + 2a^2(5+9b))a_2^3 + \\
&+ 6aba_2^2((a^3(3-6b) + 2b^2(-2+3b) + ab(7-5b-9b^2) + \\
&+ a^2(-2-5b+14b^2+b^3))b_1 + b(2(-2+b)b^2 + ab(8+3b-4b^2) + \\
&+ a^3(10-8b+b^2) + a^2(-8-5b+4b^2+b^3))b_2) + \\
&+ 2aa_2(-21a^3b^2K + 20a^4b^2K + 35a^2b^3K + 14a^3b^3K - 39a^4b^3K - \\
&- 17ab^4K - 70a^2b^4K + 50a^3b^4K + 19a^4b^4K + 39ab^5K + 14a^2b^5K - \\
&- 43a^3b^5K - 22ab^6K + 21a^2b^6K - 3(-1+b)b^2(6a^3 - b(1+2b) - \\
&- 3a^2(2+3b) + a(1+8b+3b^2))a_{11} + 3(-1+b)b^2(-2b^2(4+b) + \\
&+ 2a^3(7+4b) + ab(19+15b+4b^2) - a^2(12+27b+11b^2))a_{12} - 27a^2b^3a_{22} + \\
&+ 30a^3b^3a_{22} + 45ab^4a_{22} - 21a^2b^4a_{22} - 33a^3b^4a_{22} - 18b^5a_{22} - 27ab^5a_{22} + \\
&+ 51a^2b^5a_{22} + 3a^3b^5a_{22} + 18b^6a_{22} - 18ab^6a_{22} - 3a^2b^6a_{22} + 3a^2b_1^2 - 3a^4b_1^2 - \\
&- 6abb_1^2 - 6a^2bb_1^2 + 6a^3bb_1^2 + 6a^4bb_1^2 + 18ab^2b_1^2 - 18a^3b^2b_1^2 - 18ab^3b_1^2 + \\
&+ 18a^2b^3b_1^2 - 9a^3b_1b_2 + 9a^4b_1b_2 + 18a^2bb_1b_2 - 18a^4bb_1b_2 - 12ab^2b_1b_2 - \\
&- 30a^2b^2b_1b_2 + 30a^3b^2b_1b_2 + 12a^4b^2b_1b_2 + 24ab^3b_1b_2 - 24a^3b^3b_1b_2 - \\
&- 9ab^4b_1b_2 + 9a^2b^4b_1b_2 + 6a^2b^2b_2^2 - 6a^4b^2b_2^2 - 18a^2b^3b_2^2 + 18a^3b^3b_2^2 + \\
&+ 3ab^4b_2^2 - 3a^3b^4b_2^2 - 3a^2bb_{11} + 3a^4bb_{11} + 3ab^2b_{11} + 12a^2b^2b_{11} - 12a^3b^2b_{11} - \\
&- 3a^4b^2b_{11} - 12ab^3b_{11} + 12a^3b^3b_{11} + 9ab^4b_{11} - 9a^2b^4b_{11} + 9a^3bb_{12} - 9a^4bb_{12} -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 21a^2b^2b_{12} + 21a^4b^2b_{12} + 12ab^3b_{12} + 30a^2b^3b_{12} - 30a^3b^3b_{12} - 12a^4b^3b_{12} - \\
&- 21ab^4b_{12} + 21a^3b^4b_{12} + 9ab^5b_{12} - 9a^2b^5b_{12} + 9a^3b^2b_{22} - 9a^4b^2b_{22} - \\
&- 12a^2b^3b_{22} + 12a^4b^3b_{22} + 3ab^4b_{22} + 12a^2b^4b_{22} - 12a^3b^4b_{22} - 3a^4b^4b_{22} - \\
&- 3ab^5b_{22} + 3a^3b^5b_{22}) + a^2b(6(-1+b)b(3a^3 - b^2 + ab(3+2b) - \\
&- a^2(2+5b))a_{112} - 6b(b^2 - b^4 + 2a^3(-1+b^2) + a^2(2+2b-4b^3) + \\
&+ ab(-3+b^2+2b^3))a_{122} + 6a^2b^2a_{222} - 6a^3b^2a_{222} - 12ab^3a_{222} + 6a^2b^3a_{222} + \\
&+ 6a^3b^3a_{222} + 6b^4a_{222} + 6ab^4a_{222} - 12a^2b^4a_{222} - 6b^5a_{222} + 6ab^5a_{222} + \\
&+ 6a^2Kb_1 - 14a^3Kb_1 + 2a^4Kb_1 + 6abKb_1 - 6a^2bKb_1 + 28a^3bKb_1 - \\
&- 4a^4bKb_1 - 28ab^2Kb_1 - 2a^3b^2Kb_1 + 30ab^3Kb_1 - 18a^2b^3Kb_1 - 6aa_{12}b_1 + \\
&+ 12a^3a_{12}b_1 - 6ba_{12}b_1 + 48aba_{12}b_1 - 42a^2ba_{12}b_1 - 24a^3ba_{12}b_1 - 42ab^2a_{12}b_1 + \\
&+ 72a^2b^2a_{12}b_1 + 12b^3a_{12}b_1 - 24ab^3a_{12}b_1 + 6a^2a_{22}b_1 - 6a^3a_{22}b_1 - 18aba_{22}b_1 + \\
&+ 6a^2ba_{22}b_1 + 12a^3ba_{22}b_1 + 12b^2a_{22}b_1 + 18ab^2a_{22}b_1 - 30a^2b^2a_{22}b_1 + \\
&+ 34a^2b^2Kb_2 - 18b^3a_{22}b_1 + 18ab^3a_{22}b_1 + 6a^2bKb_2 - 24a^3bKb_2 + 6a^4bKb_2 - \\
&- 4a^4b^2Kb_2 - 16ab^3Kb_2 - 20a^2b^3Kb_2 + 12a^3b^3Kb_2 + 8ab^4Kb_2 - 2a^2b^4Kb_2 - \\
&- 6aba_{12}b_2 - 18a^2ba_{12}b_2 + 36a^3ba_{12}b_2 + 36ab^2a_{12}b_2 - 42a^2b^2a_{12}b_2 - \\
&- 24a^3b^2a_{12}b_2 - 12b^3a_{12}b_2 + 6ab^3a_{12}b_2 + 30a^2b^3a_{12}b_2 + 6b^4a_{12}b_2 - \\
&- 12ab^4a_{12}b_2 + 18a^2ba_{22}b_2 - 18a^3ba_{22}b_2 - 30ab^2a_{22}b_2 + 18a^2b^2a_{22}b_2 + \\
&+ 12a^3b^2a_{22}b_2 + 12b^3a_{22}b_2 + 6ab^3a_{22}b_2 - 18a^2b^3a_{22}b_2 - 6b^4a_{22}b_2 + \\
&+ 6ab^4a_{22}b_2 + 9a^3bK_1 - 3a^4bK_1 - 24a^2b^2K_1 + 3a^3b^2K_1 + 3a^4b^2K_1 + \\
&+ 15ab^3K_1 + 15a^2b^3K_1 - 12a^3b^3K_1 - 15ab^4K_1 + 9a^2b^4K_1 - a^3bK_2 + \\
&+ a^4bK_2 + 8a^2b^2K_2 - 14a^3b^2K_2 - 7ab^3K_2 + 13a^2b^3K_2 + 13a^3b^3K_2 - \\
&- a^4b^3K_2 - 20a^2b^4K_2 + 2a^3b^4K_2 + 7ab^5K_2 - a^2b^5K_2)) - \\
&- a(2(-1+b)b^2a_2^2(3(3a^3(1+b) - 2b^2(1+b) + 2ab(2+4b+b^2) - \\
&- a^2(2+9b+5b^2))a_{11} + b(a(a^3(14-3b) - 3b^2 + ab(7+4b) - \\
&- a^2(10+9b))K + 3(a^3(-13+b) + 6b^2 - 2ab(7+4b) + 2a^2(5+9b))a_{12})) + \\
&+ aba_2(6(-1+a)(a-b)^2(-1+b)ba_{111} - 6(-1+b)b(3a^3(1+b) - 2b^2(1+b) + \\
&+ 2ab(2+4b+b^2) - a^2(2+9b+5b^2))a_{112} + 24a^2b^2a_{122} - 30a^3b^2a_{122} - \\
&- 42ab^3a_{122} + 30a^2b^3a_{122} + 30a^3b^3a_{122} + 18b^4a_{122} + 18ab^4a_{122} - 54a^2b^4a_{122} - \\
&- 18b^5a_{122} + 24ab^5a_{122} - 2a^3Kb_1 + 8a^4Kb_1 + 12a^2bKb_1 - 20a^3bKb_1 - \\
&- 16a^4bKb_1 - 4ab^2Kb_1 + 34a^3b^2Kb_1 + 6ab^3Kb_1 - 24a^2b^3Kb_1 + 6a^3b^3Kb_1 - \\
&- 6a^2a_{11}b_1 + 6a^3a_{11}b_1 + 18aba_{11}b_1 - 6a^2ba_{11}b_1 - 12a^3ba_{11}b_1 - 12b^2a_{11}b_1 - \\
&- 18ab^2a_{11}b_1 + 30a^2b^2a_{11}b_1 + 18b^3a_{11}b_1 - 18ab^3a_{11}b_1 + 12a^2a_{12}b_1 - \\
&- 18a^3a_{12}b_1 - 42aba_{12}b_1 + 30a^2ba_{12}b_1 + 36a^3ba_{12}b_1 + 24b^2a_{12}b_1 + \\
&+ 30ab^2a_{12}b_1 - 84a^2b^2a_{12}b_1 - 36b^3a_{12}b_1 + 54ab^3a_{12}b_1 - 6a^2b^3a_{12}b_1 - \\
&- 18a^3bKb_2 + 30a^4bKb_2 - 2a^2b^2Kb_2 - 28a^4b^2Kb_2 - 4ab^3Kb_2 + 28a^2b^3Kb_2 - \\
&- 6a^3b^3Kb_2 + 6a^4b^3Kb_2 + 2ab^4Kb_2 - 14a^2b^4Kb_2 + 6a^3b^4Kb_2 - 18a^2ba_{11}b_2 + \\
&+ 18a^3ba_{11}b_2 + 30ab^2a_{11}b_2 - 18a^2b^2a_{11}b_2 - 12a^3b^2a_{11}b_2 - 12b^3a_{11}b_2 -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 6ab^3a_{11}b_2 + 18a^2b^3a_{11}b_2 + 6b^4a_{11}b_2 - 6ab^4a_{11}b_2 + 48a^2ba_{12}b_2 - 60a^3ba_{12}b_2 - \\
&- 48ab^2a_{12}b_2 + 30a^2b^2a_{12}b_2 + 48a^3b^2a_{12}b_2 + 24b^3a_{12}b_2 - 18ab^3a_{12}b_2 - \\
&- 24a^2b^3a_{12}b_2 - 6a^3b^3a_{12}b_2 - 12b^4a_{12}b_2 + 24ab^4a_{12}b_2 - 6a^2b^4a_{12}b_2 + \\
&+ a^3bK_1 - 7a^4bK_1 - 2a^2b^2K_1 + 20a^3b^2K_1 + ab^3K_1 - 13a^2b^3K_1 - 13a^3b^3K_1 + \\
&+ 7a^4b^3K_1 + 14a^2b^4K_1 - 8a^3b^4K_1 - ab^5K_1 + a^2b^5K_1 - 9a^3b^2K_2 + 15a^4b^2K_2 + \\
&+ 12a^2b^3K_2 - 15a^3b^3K_2 - 15a^4b^3K_2 - 3ab^4K_2 - 3a^2b^4K_2 + 24a^3b^4K_2 + \\
&+ 3ab^5K_2 - 9a^2b^5K_2) + 6(-1+a)a((-1+b)b^2(-3b^2 - a^2(4+b) + ab(7+b))a_{12}^2 + \\
&+ (a-b)(-1+b)b^2a_{11}(a(1+a-3b)K + (-1+3a-b)a_{12} - (a-b)(1+b)a_{22}) + \\
&+ a_{12}((-1+b)b^3(-a^2(-5+b) + a(-8+b)b + 3b^2)a_{22} + a((a + a^2 - 2b - 4ab - \\
&- 2a^2b + 6b^2 + 6ab^2 - 6b^3)b_1^2 + (a^2(-3+6b-4b^2) + b^2(-4+8b-3b^2) + \\
&+ 2ab(3-7b+4b^2))b_1b_2 + b(b(2a^2+b^2+a(2-6b+b^2))b_2^2 - \\
&- (a-b)(-1+b)(-(1+a-3b)b_{11} + (a(3-4b) + b(-4+3b))b_{12} - \\
&- b((a(7-6b) + b(-6+7b))K + (a(-3+b)+b)b_{22}))))) + \\
&+ a(5a^3b^2K^2 - 10a^2b^3K^2 - 10a^3b^3K^2 + 5ab^4K^2 + 20a^2b^4K^2 + 5a^3b^4K^2 - \\
&- 10ab^5K^2 - 10a^2b^5K^2 + 5ab^6K^2 - (-1+b)b^3(-a^2(-3+b) + a(-4+b)b + b^2)Ka_{22} - \\
&- (a-b)^2(-1+b)b^2a_{1112} - a^2b^2a_{1122} + 2ab^3a_{1122} - b^4a_{1122} + a^2b^4a_{1122} - 2ab^5a_{1122} + \\
&+ b^6a_{1122} + a^2b^3a_{1222} - 2ab^4a_{1222} - a^2b^4a_{1222} + b^5a_{1222} + 2ab^5a_{1222} - b^6a_{1222} - \\
&- a^2ba_{112}b_1 + 3ab^2a_{112}b_1 + 2a^2b^2a_{112}b_1 - 2b^3a_{112}b_1 - 5ab^3a_{112}b_1 + 3b^4a_{112}b_1 + \\
&+ a^2ba_{122}b_1 - 3ab^2a_{122}b_1 - 2a^2b^2a_{122}b_1 + 2b^3a_{122}b_1 + 5ab^3a_{122}b_1 - 3b^4a_{122}b_1 - \\
&- a^2Kb_1^2 - a^3Kb_1^2 + 2abKb_1^2 + 4a^2bKb_1^2 + 2a^3bKb_1^2 - 6ab^2Kb_1^2 - 6a^2b^2Kb_1^2 + \\
&+ 6ab^3Kb_1^2 - 3a^2b^2a_{112}b_2 + 5ab^3a_{112}b_2 + 2a^2b^3a_{112}b_2 - 2b^4a_{112}b_2 - 3ab^4a_{112}b_2 + \\
&+ b^5a_{112}b_2 + 3a^2b^2a_{122}b_2 - 5ab^3a_{122}b_2 - 2a^2b^3a_{122}b_2 + 2b^4a_{122}b_2 + 3ab^4a_{122}b_2 - \\
&- b^5a_{122}b_2 + 3a^3Kb_1b_2 - 6a^2bKb_1b_2 - 6a^3bKb_1b_2 + 4ab^2Kb_1b_2 + 14a^2b^2Kb_1b_2 + \\
&+ 4a^3b^2Kb_1b_2 - 8ab^3Kb_1b_2 - 8a^2b^3Kb_1b_2 + 3ab^4Kb_1b_2 - 2a^2b^2Kb_2^2 - \\
&- 2a^3b^2Kb_2^2 + 6a^2b^3Kb_2^2 - ab^4Kb_2^2 - a^2b^4Kb_2^2a^2bKb_{11} + a^3bKb_{11} - ab^2Kb_{11} - \\
&- 5a^2b^2Kb_{11} - a^3b^2Kb_{11} + 4ab^3Kb_{11} + 4a^2b^3Kb_{11} - 3ab^4Kb_{11} - 3a^3bKb_{12} + \\
&+ 7a^2b^2Kb_{12} + 7a^3b^2Kb_{12} - 4ab^3Kb_{12} - 14a^2b^3Kb_{12} - 4a^3b^3Kb_{12} + 7ab^4Kb_{12} + \\
&+ 7a^2b^4Kb_{12} - 3ab^5Kb_{12} - 3a^3b^2Kb_{22} + 4a^2b^3Kb_{22} + 4a^3b^3Kb_{22} - ab^4Kb_{22} - \\
&- 5a^2b^4Kb_{22} - a^3b^4Kb_{22} + ab^5Kb_{22} + a^2b^5Kb_{22} + a^3bb_1K_1 - 3a^2b^2b_1K_1 - \\
&- 2a^3b^2b_1K_1 + 2ab^3b_1K_1 + 5a^2b^3b_1K_1 - 3ab^4b_1K_1 + 3a^3b^2b_2K_1 - 5a^2b^3b_2K_1 - \\
&- 2a^3b^3b_2K_1 + 2ab^4b_2K_1 + 3a^2b^4b_2K_1 - ab^5b_2K_1 - a^3bb_1K_2 + 3a^2b^2b_1K_2 + \\
&+ 2a^3b^2b_1K_2 - 2ab^3b_1K_2 - 5a^2b^3b_1K_2 + 3ab^4b_1K_2 - 3a^3b^2b_2K_2 + 5a^2b^3b_2K_2 + \\
&+ 2a^3b^3b_2K_2 - 2ab^4b_2K_2 - 3a^2b^4b_2K_2 + ab^5b_2K_2 - a^3b^2K_{11} + 2a^2b^3K_{11} + \\
&+ a^3b^3K_{11} - ab^4K_{11} - 2a^2b^4K_{11} + ab^5K_{11} + a^3b^2K_{12} - 2a^2b^3K_{12} + ab^4K_{12} - \\
&- a^3b^4K_{12} + 2a^2b^5K_{12} - ab^6K_{12} - a^3b^3K_{22} + 2a^2b^4K_{22} + a^3b^4K_{22} - ab^5K_{22} - \\
&- 2a^2b^5K_{22} + ab^6K_{22}))).
\end{aligned}
$$

Литература

1. Bol G. *On n-webs of curves in a plane* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1932. – V. 38. – P. 855–857.
2. Blaschke W., Bol G. *Geometrie der Gewebe.* – Springer-Verlag, Berlin, 1938. – viii+339 p.
3. Blaschke W. *Einführung in die Geometrie der Waben.* – Birkhäuser-Verlag, Basel–Stutgart, 1955. – 108 p.
4. Chern S.S. *Web geometry* // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). – 1982. – V. 6. – № 1. – P. 1–8.
5. Dou A. *Plane four-webs* // Mem. Real Acad. Ci. Art. Barcelona. – 1953. – V. 31. – № 5. – P. 133–218.
6. Dou A. *Rang der ebenen* 4-*Gewebe* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1955. – Bd. 19. – H. 3/4. – S. 149–157.
7. Pantazi Al. *Sur la détermination du rang d'un tissu plan* // C. R. Inst. Sci. Roum. – 1938. – V. 2. – P. 108–111.
8. Pantazi Al. *Sur une classification nouvelle des tissus plans* // C. R. Inst. Sci. Roum. – 1940. – V. 4. – P. 230–232.
9. Mihăileanu N.N. *Sur les tissus plans de première espèce* // Bull. Math. Soc. Roum. Sci. – 1941. – V. 43. – P. 23–26.
10. Pirio L. Équations fonctionnelles abéliennes et géométrie des tissus // Ph. D. Thesis, Univ. Paris-6, 2004. – P. 1–267.
11. Poincaré H. *Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes* // Bull. Soc. Math. France. – 1901. – V. 29. – P. 61–86.
12. Chern S.S., Griffiths P.A. *An inequality for the rank of a web and webs of maximum rank* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. (4). – 1978. – V. 5. – № 3. – P. 539–557.
13. Chern S.S., Griffiths P.A. *Abel's theorem and webs* // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. – 1978. – V. 80. – № 1–2. – S. 13–110.
14. Lie S. *Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden* // Lie Arch. – 1882. – V. VII. – S. 155–176.
15. Akivis M.A., Goldberg V.V., Lychagin V.V. *Linearizability of d-webs, $d \geq 4$, on two-dimensional manifolds* // Selecta Math. – 2004. – V. 10. – № 4. – P. 431–451.
16. Goldberg V.V. *Four-webs in the plane and their linearizability* // Acta Appl. Math. – 2004. – V. 80. – № 1. – P. 35–55.
17. Goldberg V.V. *Theory of multicodimensional* $(n+1)$-*webs.* – Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988. – xxii+466 p.
18. Abel N.H. *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très etendue de fonctions transcendentes // Œuvres Complètes de Niels Henrik Abel* (new ed.), Imprimerie de Grøndahl & Son, Christiania; 1881, Vol. 1, Ch. 12, P. 145–211; edited by L. Sylow and S. Lie. Reprint of the second (1881) edition, Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1992, viii+621 p. First published *Mémoires presentes par divers savants*, t. VII, 1841.
19. Griffiths P.A. *On Abel's differential equations* // Algebraic Geometry, J.J. Sylvester Sympos., Johns Hopkins Univ., Baltimore, Md., 1976, 26–51. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, Md, 1977.
20. Goldberg V.V., Lychagin V.V. *On the Blaschke conjecture for* 3-*webs* // J. Geom. Anal. – 2006. – V. 16. – № 1. – P. 69–115.
21. Kruglikov B., Lychagin V.V. *Multi-brackets of differential operators and compatibility of PDE systems* // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. – 2006. – V. 342. – P. 557–561.
22. Blaschke W., Dubourdieu J. *Invarianten von Kurvengeweben* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1928. – V. 6. – S. 198–215.
23. Ripoll O. *Determination du rang des tissus du plan et autres invariants geometriques* // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2005. – V. 341. – № 4. – P. 247–252.
24. Mayrhofer K. *Kurvensysteme auf Flächen* // Math. Z. – 1928. – V. 28. – S. 728–752.
25. Griffiths P.A. *Variations on a theorem of Abel* // Invent. Math. – 1976. – V. 35. – P. 321–390.

26. Rogers L.J. *On function sum theorems connected with the series* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ // London Math. Soc. Proc. (2). – 1907. – V. 4. – P. 169–189.
27. Lewin L. *Polylogarithms and associated functions.* – North-Holland Publishing Co., New York, 1981. – xvii+359 p.
28. Pirio L. *Sur les tissus plans de rang maximum et le problème de Chern* // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I. – 2004. – V. 339. – № 2. – P. 131–136.

Технологический институт штата
Нью Джерси (Ньюарк, Нью Джерси, США)
Университет г. Тромсё, Норвегия

Поступила
12.04.2007