ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

УДК 517.977

М.И. СУМИН

СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЛУЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ, I: ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ МИНИМИЗИРУЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, НОРМАЛЬНОСТЬ

1. Введение

Задачам оптимального управления распределенными системами, описываемыми эллиптическими уравнениями с фазовыми ограничениями, посвящено за последние десять лет достаточно большое количество работ (напр., [1]–[9]). Основное внимание уделялось авторами доказательству принципа максимума Понтрягина, изучению связи устойчивости задачи (в том или ином естественном смысле) при одномерном возмущении фазового ограничения как с выполнимостью принципа максимума, так и с выполнимостью регулярного принципа максимума [8].

Отличие данной работы от [1]–[9] заключается в следующем. Во-первых, в качестве "основного элемента теории" здесь принимается не оптимальное управление, а минимизирующая последовательность (м. п.) обычных управлений — так называемое минимизирующее приближенное решение (м. п. р.) в смысле Дж. Варги [10]. Это позволяет рассмотреть задачу (семейство задач) с функциональным параметром в фазовом ограничении в ее наибольшей общности без каких-либо дополнительных предположений, связанных с существованием оптимального управления (обычного или обобщенного), не прибегая к расширению в смысле [10]. Получаемые в статье необходимые условия для м. п. р., которые мы называем принципом максимума для м. п. р., превращаются "в пределе" в обычный принцип максимума Понтрягина (в случае существования оптимального управления). Во-вторых, рассматриваем возмущение задачи — возмущение фазового ограничения в метрике наиболее естественного (бесконечномерного) пространства возмущений $C(X)$, где $X \subset \Omega$ — компакт, на котором должно выполняться фазовое ограничение, Ω — область задания эллиптической краевой задачи. В-третьих, в работе обсуждаются не только условия регулярности получаемого принципа максимума для м. п. р., но и условия его нормальности (соответствующие понятия [11]–[14] вводятся в статье). И, наконец, в-четвертых, в статье используется принципиально иной по сравнению с [1]–[9] метод доказательства [15]. Этот метод заключается в аппроксимации исходной задачи (семейства задач) с фазовым ограничением (с континуальным числом функциональных ограничений) последовательностью задач (семейств задач) с конечным числом функциональных ограничений и конечномерным параметром в ограничениях, получении в аппроксимирующих задачах принципа максимума для м. п. р. и завершающем предельном переходе в получаемых результатах при стремлении к бесконечности числа аппроксимирующих функциональных ограничений. При такой аппроксимации становится возможным одновременно записать на основе результатов [11]–[14] условия нормальности аппроксимирующих задач с конечным числом функциональных ограничений и использовать их для доказательства условий нормальности в исходной задаче с фазовым ограничением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95-01-00701, 98-01-00793).

В первой части работы показывается, что поточечному принципу максимума для м. п. р. (обычному поточечному принципу максимума в случае существования оптимального управления) удовлетворяет любое м. п. р. (любое оптимальное управление в случае его существования), если только задача имеет смысл (значение задачи конечно при рассматриваемом значении параметра). Здесь показывается также, что достаточным условием нормальности задачи является в совокупности с некоторыми стандартными предположениями о выпуклости функций, задающих исходные данные задачи, условие Слейтера. Вторая часть работы посвящена изучению связи условий регулярности и нормальности рассматриваемой задачи с дифференциальными свойствами функции значений (чувствительность). Здесь показывается, что следствием нормальности при некотором фиксированном значении $q \in C(X)$ является липшицевость ее функции значений в окрестности точки q и что регулярность задачи с фазовым ограничением есть типичное свойство подобного рода задач, т. к. оно имеет место для значений функционального параметра из некоторого, по крайней мере, всюду плотного множества, принадлежащего множеству всех тех значений параметра, для которых задача "имеет смысл" (функция значений конечна). Здесь же обсуждается возможность усиления последнего результата.

2. Постановка задачи

Пусть $U \subset R^m$ — компакт, Ω — ограниченная область в R^n, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_\infty(\Omega) : u(x) \in U$ почти всюду на $\Omega\}$. Рассмотрим семейство зависящих от функционального параметра q оптимизационных задач

$$I_0(u) \to \inf, \quad I_1(u) \in \mathcal{M} + q, \quad u \in \mathcal{D}, \quad q \in C(X) \equiv \mathcal{B} \text{ — параметр}, \qquad (P_q)$$

где

$$I_0(u) \equiv \int_\Omega F(x, z[u](x), u(x))dx, \quad I_1(u) \equiv G(\cdot, z[u](\cdot)),$$

$\mathcal{M} \subset C(X)$ — выпуклое замкнутое множество всех непрерывных неположительных функций на X, $X \subset \overline{\Omega}$ — компакт, $z[u] \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — соответствующее управлению $u \in \mathcal{D}$ слабое решение в смысле [16] задачи Дирихле для полулинейного эллиптического уравнения с дивергентной главной частью

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x) z_{x_j} + a(x, z, u(x)) = 0, \quad z(x) = 0, \quad x \in S. \qquad (2.1)$$

Считаем, что на исходные данные задачи (P_q) наложены следующие условия:

а) функции $G, \partial G/\partial z : \overline{\Omega} \times R^1 \to R^1$ непрерывны по (x, z), функции $F, \partial F/\partial z : \Omega \times R^1 \times R^m \to R^1$, a, $\partial a/\partial z : \Omega \times R^1 \times R^m \to R^1$ измеримы в смысле Лебега по (x, z, u) и непрерывны по (z, u) при почти всех x, функции $a_{i,j} : \overline{\Omega} \to R^1$, $i, j = 1, \ldots, n$, липшицевы;

б) справедливы оценки

$$\nu|\xi|^2 \le a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2, \quad \nu, \mu > 0, \quad a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x),$$
$$|a(x, 0, u)| + |\partial a(x, z, u)/\partial z| \le a_z(x) + N(M) \quad \forall x \in \Omega, \quad z \in S_M^1, \quad u \in U,$$
$$\partial a(x, z, u)/\partial z \le 0 \quad \forall (x, z, u) \in \Omega \times R^1 \times U,$$

где $a_z \in L_{q/2}(\Omega)$, $q > n$ ([16], с. 181), $S_M^n \equiv \{x \in R^n : |x| < M\}$;

в) справедлива оценка

$$|F(x, 0, u)| + |\partial F(x, z, u)/\partial z| \le f_z(x) + N(M) \quad \forall x \in \Omega, \quad z \in S_M^1, \quad u \in U,$$

где $f_z \in L_{q/2}(\Omega)$, $q > n$, $N(M) > 0$ — неубывающая функция переменного $M > 0$;

г) граница $S \equiv \partial\Omega$ является липшицевой.

Введем на множестве $\mathcal{D}$ метрику Экланда $d(u^1, u^2) \equiv \text{meas}\{x \in \Omega : u^1(x) \neq u^2(x)\}$, превратив его тем самым в полное метрическое пространство. Согласно [10] м. п. р. в задаче (P_q) называется последовательность управлений $u^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$I_0(u^i) \leq \beta(q) + \gamma^i, \quad u^i \in \mathcal{D}_q^{\varepsilon^i}, \quad \gamma^i, \varepsilon^i \geq 0, \quad \gamma^i, \varepsilon^i \to 0, \quad i \to \infty, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{D}_q^\varepsilon \equiv \{u \in \mathcal{D} : \rho(I_1(u), \mathcal{M} + q) \leq \varepsilon\}$, $\rho(I, \mathcal{M} + q) \equiv \inf\limits_{x \in \mathcal{M}} |x + q - I|_X^{(0)}$, $\beta(q) \equiv \beta_{+0}(q) \equiv \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \beta_\varepsilon(q) \leq \beta_0(q)$, $\beta_\varepsilon(q) \equiv \inf\limits_{u \in \mathcal{D}_q^\varepsilon} I_0(u)$, $\beta_\varepsilon(q) \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}_q^\varepsilon = \emptyset$, $|q|_X^{(0)} \equiv \|q\|_{C(X)}$. При этом функцию $\beta : \mathcal{B} \to R^1 \cup \{+\infty\}$ принято называть функцией значений задачи (P_q).

3. Вспомогательные результаты

Приведем сведения о свойствах решений исходной краевой задачи (2.1), а также сопряженной краевой задачи.

Лемма 3.1. *Для любого управления $u \in \mathcal{D}$ существует единственное решение $z[u] \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap C^{(\alpha)}(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле (2.1) такое, что*

$$\|z[u]\|_{2,\Omega}^{(1)} + |z[u]|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)} \leq C_1,$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от $u \in \mathcal{D}$. Решение $z[u]$ непрерывно в метрике $W_2^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^{(\alpha)}(\overline{\Omega})$ зависит от $u \in \mathcal{D}$.

Доказательство леммы см. в ([5]; [8], теорема 2.1).

Лемма 3.2. *Функционал $I_0 : \mathcal{D} \to R^1$ и оператор $I_1 : \mathcal{D} \to \mathcal{B} \equiv C(X)$ ограничены и непрерывны. Функция значений $\beta : \mathcal{B} \to R^1 \cup \{+\infty\}$ полунепрерывна снизу.*

Доказательство. Первое утверждение леммы есть тривиальное следствие леммы 3.1 и условий на функции F, G. Доказательство второго ничем не отличается от доказательства аналогичного утверждения в [12], [13].

Лемма 3.3. *Для любого управления $u \in \mathcal{D}$ сопряженная задача*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}(x) \eta_{x_i} + \partial a(x, z[u](x), u(x)) / \partial z \eta = \psi(x), \quad \eta(x) = 0, \quad x \in S, \tag{3.1}$$

при любой функции $\psi \in L_{q/2}(\Omega)$, $q > n$, однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap C^{(\alpha)}(\overline{\Omega})$, причем решение $\eta[u, \psi]$ этой задачи удовлетворяет оценкам

$$|\eta[u, \psi]|_{\overline{\Omega}}^{(\alpha)} \leq C_2 \|\psi\|_{q/2,\Omega}, \quad \|\eta[u, \psi]\|_{2,\Omega}^{(1)} + |\eta[u, \psi]|_{\infty,\Omega} \leq C_3 \|\psi\|_{q/2,\Omega},$$

где постоянные $\alpha \in (0, 1)$, $C_2, C_3 > 0$ не зависят от $u \in \mathcal{D}$, $\psi \in L_{q/2}(\Omega)$.

Доказательство леммы можно найти в ([5]; [8], лемма 2.2; [17], теоремы 8.6, 8.16, 8.29).

Приведем также необходимые сведения о задаче Дирихле для линейного эллиптического уравнения с мерой Радона в правой части. Воспользуемся для этого результатами работы [8].

Лемма 3.4. *Для любого управления $u \in \mathcal{D}$ и любой борелевской меры $\mu \in M(\Omega)$, где $M(\Omega)$ — множество всех регулярных борелевских мер на Ω ($M(\Omega) \equiv C_0^*(\Omega)$, $C_0(\Omega)$ — пространство всех непрерывных функций на Ω, обращающихся в 0 на $\partial\Omega$), существует единственное решение $\eta[u, \mu] \in \overset{\circ}{W}{}_\sigma^1(\Omega)$, $\sigma < n/(n-1)$, задачи*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}(x) \eta_{x_i} + \partial a(x, z[u](x), u(x)) / \partial z \eta = \mu, \quad \eta(x) = 0, \quad x \in S, \tag{3.2}$$

причем

$$\|\eta[u, \mu]\|_{\sigma,\Omega}^{(1)} \leq C|\mu| \quad \forall u \in \mathcal{D},$$

где постоянная $C > 0$ зависит лишь от σ.

Замечание 3.1. Отметим, что единственность решений $z[u]$, $\eta[u,\psi]$, $\eta[u,\mu]$ прямой и сопряженной задач обеспечивается за счет условия $\partial a(x,z,u)/\partial z \le 0$ (см. условие б)), благодаря которому, как известно, спектры линеаризованной и сопряженной задач сдвигаются в область $(-\infty,0)$ (подробнее см., напр., в [17], теорема 8.6).

4. Принцип максимума для м. п. р. в задаче с фазовыми ограничениями

Докажем в данном разделе теорему о необходимых условиях на элементы произвольного м. п. р. в исходной задаче (P_q). Эти необходимые условия можно называть также принципом максимума для м. п. р.

Теорема 4.1. *Пусть* $\beta(q) < \infty$ *и* u^s, $s=1,2,\dots,$ — *м. п. р. в смысле* (2.2) *в задаче* (P_q). *Тогда существуют последовательность чисел* $\gamma^s \ge 0$, $s=1,2,\dots$, $\gamma^s \to 0$, $s\to\infty$, *последовательность пар* (μ_0^s,λ^s), $\mu_0^s \ge 0$, $\lambda^s \in M(\Omega)$, $\mu_0^s + |\lambda^s| = 1$, *с положительной мерой* λ^s, *сосредоточенной на множестве* $\{x\in X : |G(x,z[u^s](x)) - q(x)| \le \gamma^s\}$, *такие, что*

$$\int_\Omega \max_{v\in U}\{\mu_0^s(H_0(x,z[u^s](x),v,\eta_0[u^s](x)) - H_0(x,z[u^s](x),u^s(x),\eta_0[u^s](x))) + \\ + (H(x,z[u^s](x),v,\eta^s[u^s](x)) - H(x,z[u^s](x),u^s(x),\eta^s[u^s](x)))\}dx \le \gamma^s,$$

где $\eta^s[u^s] \equiv \eta[u^s, -\partial G(\cdot,z[u^s](\cdot))/\partial z\lambda^s]$ — *решение сопряженной задачи* (3.2) *при* $u=u^s$, $\mu = -\partial G(\cdot,z[u^s](\cdot))/\partial z\lambda^s$,

$$H_0(x,z,u,\eta) \equiv \eta a(x,z,u) - F(x,z,u), \quad H(x,z,u,\eta) \equiv \eta a(x,z,u).$$

Замечание 4.1. Из теоремы 4.1 следует, что если управление $u^0 \in \mathcal{D}_q^0$ таково, что $I_0(u^0) = \beta(q)$, то оно удовлетворяет обычному принципу максимума ($\mu_0^s = \mu_0$, $\lambda^s = \lambda$, $\gamma^s = \gamma = 0$). Несколько видоизменяя рассуждения приводимого ниже доказательства теоремы 4.1, можно показать, что такой же обычный принцип максимума справедлив и для любого управления $u^0 \in \mathcal{D}_q^0$ такого, что $I_0(u^0) = \beta_0(q)$.

Доказательство. Применим метод работы [15]. Так как u^s, $s=1,2,\dots$, есть м. п. р. в задаче (P_q), то, очевидно, она же есть м. п. и в задаче

$$J(u) \equiv \max\{I_0(u) - \beta(q),\ G(x,z[u](x)) - q(x),\ x\in X\} \to \inf, \quad u\in\mathcal{D},$$

с нулевой нижней гранью, т. е.

$$J(u^s) \le \inf_{u\in\mathcal{D}} J(u) + \varepsilon_s, \quad \varepsilon_s \ge 0,\ \ \varepsilon_s \to 0,\ \ s\to\infty. \tag{4.1}$$

Применяя в силу (4.1) к функционалу J вариационный принцип Экланда [18], получаем управление $u^{1,s}\in\mathcal{D}$, дающее решение в задаче

$$J^s(u) \equiv J(u) + \sqrt{\varepsilon_s}\, d(u,u^{1,s}) \to \inf, \quad u\in\mathcal{D}, \tag{4.2}$$

и удовлетворяющее неравенствам

$$d(u^s,u^{1,s}) \le \sqrt{\varepsilon_s}, \quad J(u^{1,s}) \le J(u^s). \tag{4.3}$$

Пусть $\widehat{X}$ — счетная всюду плотная сеть компакта X, $\widehat{X}_k \equiv \{x^{k,1},\dots,x^{k,l_k}\} \subset \widehat{X}$ — конечная $1/k$-сеть компакта X, $\widehat{X}_k \subset \widehat{X}_{k+1}$, $k=1,2,\dots$ Аппроксимируем задачу (4.2) последовательностью задач

$$J^{s,k}(u) \equiv \max\{I_0(u) - \beta(q),\ I_j^k(u) - q(x^{k,j}),\ j=1,\dots,l_k\} + \sqrt{\varepsilon_s}\, d(u,u^{1,s}) \to \inf, \\ u\in\mathcal{D},\ \ k=1,2,\dots,$$

где функционал I_j^k определен равенством $I_j^k(u) \equiv G(x^{k,j}, z[u](x^{k,j}))$. Можно утверждать, что имеет место равенство

$$\inf_{u \in \mathcal{D}} J^{s,k}(u) \to \inf_{u \in \mathcal{D}} J^s(u) = J^s(u^{1,s}) = J(u^{1,s}), \quad k \to \infty. \tag{4.4}$$

Действительно, с одной стороны, легко заметить, что

$$\limsup_{k \to \infty} \inf_{u \in \mathcal{D}} J^{s,k}(u) \le J(u^{1,s}). \tag{4.5}$$

Предположим, с другой стороны, что при некотором $\delta > 0$

$$\liminf_{k \to \infty} \inf_{u \in \mathcal{D}} J^{s,k}(u) \le -\delta + J(u^{1,s}). \tag{4.6}$$

Тогда существует последовательность управлений $v^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что

$$J^{s,k}(v^k) \le -\frac{\delta}{2} + J(u^{1,s}), \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.7}$$

Из (4.7) в силу равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности семейства решений $\{z[u] : u \in \mathcal{D}\} \subset C(\overline{\Omega})$ (см. оценку леммы 3.1) и условий на функции F, G следует, что существует номер $k_0 > 0$ такой, что

$$J(v^{k_0}) + \sqrt{\varepsilon_s}\, d(v^{k_0}, u^{1,s}) \le -\frac{\delta}{4} + J(u^{1,s}).$$

Последнее неравенство противоречит оптимальности управления $u^{1,s}$ и, следовательно, (4.6) не может иметь места, откуда в совокупности с (4.5) и вытекает справедливость (4.4).

В силу (4.4), очевидно, имеем

$$J^{s,k}(u^{1,s}) \le \inf_{u \in \mathcal{D}} J^{s,k}(u) + \delta_k, \quad \delta_k \ge 0, \ \ \delta_k \to \infty, \ \ k \to \infty,$$

и, значит, можем применить вариационный принцип [18] еще раз, но теперь уже к функционалу $J^{s,k}(\cdot)$. Получаем управление $u^{1,s,k} \in \mathcal{D}$, дающее решение в задаче

$$J^{s,k}(u) + \sqrt{\delta_k}\, d(u, u^{1,s,k}) \to \inf, \quad u \in \mathcal{D}, \tag{4.8}$$

и удовлетворяющее неравенствам

$$d(u^{1,s}, u^{1,s,k}) \le \sqrt{\delta_k}, \quad J(u^{1,s,k}) \le J(u^{1,s}). \tag{4.9}$$

Аппроксимируем каждую из задач (4.8) семейством "сглаженных" задач

$$J^{s,k,h}(u) \equiv \max\{I_0(u) - \beta(q), \ I_j^{k,h}(u) - q(x^{k,j}), \ j = 1, \dots, l_k\} + \\ + \sqrt{\varepsilon_s}\, d(u, u^{1,s}) + \sqrt{\delta_k}\, d(u, u^{1,s,k}) \to \inf, \quad u \in \mathcal{D}, \ \ h \in [0, h_0], \tag{4.10}$$

где

$$I_j^{k,h}(u) \equiv 1/\operatorname{meas}(S_h(x^{k,j}) \cap \Omega) \int\limits_{S_h(x^{k,j}) \cap \Omega} G(x, z[u](x))dx,$$

$S_h(x^{k,j})$ — шар в R^n радиуса h с центром в $x^{k,j}$. Благодаря равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности (см. оценку леммы 3.1) множества решений $\{z[u] : u \in \mathcal{D}\}$, можно утверждать, что имеет место предельное соотношение

$$\inf_{u \in \mathcal{D}} J^{s,k,h}(u) \to \inf_{u \in \mathcal{D}} J^{s,k}(u) = J^{s,k}(u^{1,s,k})$$

и, следовательно, опять можем записать

$$J^{s,k,h}(u^{1,s,k}) \le \inf_{u \in \mathcal{D}} J^{s,k,h}(u) + \gamma_h, \quad \gamma_h \ge 0, \ \ \gamma_h \to 0, \ \ h \to 0, \tag{4.11}$$

т. е. управление $u^{1,s,k}$ является γ_h-оптимальным в задаче (4.10). Здесь для получения необходимых условий субоптимальности управления $u^{1,s,k}$ в задаче (4.10) целесообразно воспользоваться результатами работы [19], т. к. $J^{s,k,h}$ является функционалом типа функционала $J_{\xi,\rho}$ в [19]. Остановимся кратко на схеме получения этих условий субоптимальности. Применяя в силу (4.11) вариационный принцип [18] к функционалу $J^{s,k,h}$, получаем управление $u^{1,s,k,h} \in \mathcal{D}$, которое дает решение в задаче

$$J^{s,k,h}(u) + \sqrt{\gamma_h}\, d(u^{1,s,k,h}, u) \to \inf, \quad u \in \mathcal{D}, \tag{4.12}$$

и удовлетворяет неравенствам

$$d(u^{1,s,k}, u^{1,s,k,h}) \le \sqrt{\gamma_h}, \quad J(u^{1,s,k,h}) \le J(u^{1,s,k}).$$

Запишем необходимые условия оптимальности управления $u^{1,s,k,h}$ в задаче (4.12), которые одновременно можно трактовать как и условия субоптимальности управления $u^{1,s,k}$ в задаче (4.10).

Пусть U^* — счетное всюду плотное подмножество множества U ($U^* = U$, если U счетно или конечно). Определим вариацию $u^{1,s,k,h,\varepsilon}$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, управления $u^{1,s,k,h}$

$$u^{1,s,k,h,\varepsilon}(x) \equiv \begin{cases} u^{1,s,k,h}(x), & x \in \Omega \setminus \bigcup\limits_{\substack{p=1,\dots,p_1\\ r=1,\dots,r_p}} \Omega^\varepsilon_{p,r}; \\ u^{p,r} \in U^*, & x \in \Omega^\varepsilon_{p,r}, \ \ p = 1,\dots,p_1, \ \ r = 1,\dots,r_p, \end{cases}$$

где $\Omega^\varepsilon_{p,r} \equiv \Big\{ x \equiv (x_1,\dots,x_n) \in R^n : x_1^p - \varepsilon \sum\limits_{m=1}^{r} \gamma^{p,m} < x_1 \le x_1^p - \varepsilon \sum\limits_{m=1}^{r-1} \gamma^{p,m}, \ x_i^p - \varepsilon r < x_i \le x_i^p - \varepsilon(r-1), \ i = 2,\dots,n \Big\}$, $x^p \in \Omega$, $p = 1,\dots,p_1$, — набор точек Лебега функций $a(x, z[u^{1,s,k,h}](x), v) - a(x, z[u^{1,s,k,h}](x), u^{1,s,k,h}(x))$, $F(x, z[u^{1,s,k,h}](x), v) - F(x, z[u^{1,s,k,h}](x), u^{1,s,k,h}(x))$, $x \in \Omega$, для всех $v \in U^*$ одновременно, $\gamma^{p,r}$, $p = 1,\dots,p_1$, $r = 1,\dots,r_p$, — набор неотрицательных чисел такой, что $\sum\limits_{p=1}^{p_1} \sum\limits_{r=1}^{r_p} \gamma^{p,r} \le 1$, $u^{p,r} \in U^*$, $p = 1,\dots,p_1$, $r = 1,\dots,r_p$, — набор векторов, $\varepsilon_0 > 0$ — достаточно малое число, зависящее от наборов $\gamma^{p,r}$, x^p, такое, что множества $\Omega^{\varepsilon_0}_p \equiv \Big\{ \Big[x_1^p - \varepsilon_0 \sum\limits_{m=1}^{r_p} \gamma^{p,m}, x_1^p \Big] \Big\} \times \Big\{ \prod\limits_{i=2}^{n} [x_i^p - \varepsilon_0 r_p, x_i^p] \Big\}$, $p = 1,\dots,p_1$, попарно не пересекаются.

Обозначим через $\mathbf{N}$ множество всех конечных наборов $\mathbf{n} \equiv \{x^p, \ \gamma^{p,r}, \ u^{p,r}, \ p = 1,\dots,p_1, \ r = 1,\dots,r_p\}$, определяющих вариацию $u^{1,s,k,h,\varepsilon}$ и удовлетворяющих перечисленным выше условиям на точки x^p, числа $\gamma^{p,r}$ и векторы $u^{p,r}$. Можно утверждать, что справедлива следующая аналогичная лемме 7 в [19]

Лемма 4.1. *При любом фиксированном наборе $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ справедливы равенства для первых вариаций $\delta I_0(u^{1,s,k,h}, \mathbf{n})$, $\delta I_j^{k,h}(u^{1,s,k,h}, \mathbf{n})$ функционалов I_0, $I_j^{k,h}$, $j = 1,\dots,l_k$,*

$$\begin{aligned} \delta I_0(u^{1,s,k,h}, \mathbf{n}) &\equiv \lim_{\varepsilon\to 0} (I_0(u^{1,s,k,h,\varepsilon}) - I_0(u^{1,s,k,h}))/\varepsilon^n = \\ &= -\sum_{p=1}^{p_1} \sum_{r=1}^{r_p} \gamma^{p,r} (H_0(x^p, z[u^{1,s,k,h}](x^p), u^{p,r}, \eta_0[u^{1,s,k,h}](x^p)) - \\ &\quad - H_0(x^p, z[u^{1,s,k,h}](x^p), u^{1,s,k,h}(x^p), \eta_0[u^{1,s,k,h}](x^p))), \\ \delta I_j^{k,h}(u^{1,s,k,h}, \mathbf{n}) &\equiv \lim_{\varepsilon\to 0} (I_j^{k,h}(u^{1,s,k,h,\varepsilon}) - I_j^{k,h}(u^{1,s,k,h}))/\varepsilon^n = \\ &= -\sum_{p=1}^{p_1} \sum_{r=1}^{r_p} \gamma^{p,r} (H(x^p, z[u^{1,s,k,h}](x^p), u^{p,r}, \eta_j^{k,h}[u^{1,s,k,h}](x^p)) - \\ &\quad - H(x^p, z[u^{1,s,k,h}](x^p), u^{1,s,k,h}(x^p), \eta_j^{k,h}[u^{1,s,k,h}](x^p))), \end{aligned}$$

где $\eta_0[u^{1,s,k,h}], \eta_j^{k,h}[u^{1,s,k,h}] \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — *решения сопряженной задачи* (3.1) *при* $u = u^{1,s,k,h}$ *и при* $\psi(x) = -\nabla_z F(x, z[u^{1,s,k,h}](x), u^{1,s,k,h}(x))$, $\psi(x) = -1/\operatorname{meas}(S_h(x^{k,j}) \cap \Omega)\chi_j^{k,h}(x)\partial G(x, z[u^{1,s,k,h}](x))/\partial z$ *соответственно,*

$$\chi_j^{k,h}(x) \equiv \{1,\ x \in S_h(x^{k,j}) \cap \Omega;\ 0,\ x \in \Omega \setminus S_h(x^{k,j})\}.$$

Пусть $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{0, 1, \ldots, l_k\}$ — набор активных индексов, т. е. всех тех индексов, для которых справедливы равенства

$$J^{s,k,h}(u^{1,s,k,h}) - \phi_j(u^{1,s,k,h}) - \sqrt{\varepsilon_s}\, d(u^{1,s,k,h}, u^{1,s}) - \sqrt{\delta_k}\, d(u^{1,s,k,h}, u^{1,s,k}) = 0,$$

где приняты обозначения $\phi_0(u) \equiv I_0(u) - \beta(q)$, $\phi_j(u) \equiv I_j^{k,h}(u) - q(x^{k,h})$, $j = 1, \ldots, l_k$.

Благодаря аффинности по параметрам $\gamma^{p,r}$ выражений для первых вариаций $\delta I_0(u^{1,s,k,h}, \mathbf{n})$, $\delta I_j^{k,h}(u^{1,s,k,h}, \mathbf{n})$, множество векторов первых вариаций $\mathcal{K} \equiv \{(\delta I_0(u^{1,s,k,h}, \mathbf{n}), \delta I_1^{k,h}(u^{1,s,k,h}, \mathbf{n}), \ldots, \delta I_{l_k}^{k,h}(u^{1,s,k,h}, \mathbf{n})) \in R^{l_k+1} : \mathbf{n} \in \mathbf{N}\} \subset R^{l_k+1}$ выпукло (это доказывается с помощью стандартных для оптимального управления рассуждений). Обозначим через $\mathcal{K}_\varkappa$ проекцию $\mathcal{K}$ на подпространство $R^\varkappa$ векторов $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_\varkappa})$ пространства R^{l_k+1} векторов $(y_0, y_1, \ldots, y_{l_k})$. С помощью достаточно традиционных рассуждений можно показать, что выпуклое множество $\mathcal{K}_\varkappa$ не пересекается с выпуклым множеством $\mathcal{K}_\varkappa^- \equiv \{(y_{i_1}, \ldots, y_{i_\varkappa}) \in R^\varkappa : y_{i_j} < -2(\sqrt{\varepsilon_s} + \sqrt{\delta_k} + \sqrt{\gamma_h}),\ j = 1, \ldots, \varkappa\}$ (пересекаемость $\mathcal{K}_\varkappa$ и $\mathcal{K}_\varkappa^-$ противоречит оптимальности управления $u^{1,s,k,h}$) и, значит, отделяется от него вектором $\mu^{s,k,h} \in R^\varkappa$, $\mu^{s,k,h} \equiv (\mu_{i_1}^{s,k,h}, \ldots, \mu_{i_\varkappa}^{s,k,h})$, $\mu_{i_j}^{s,k,h} \geq 0$, $j = 1, \ldots, \varkappa$, $|\mu^{s,k,h}| = 1$. Дополняя этот вектор нулевыми компонентами (соответствующими пассивным индексам) до вектора $\mu^{s,k,h} \in R^{l_k+1}$ (сохраняем для него прежнее обозначение), $\mu^{s,k,h} \equiv (0, \ldots, 0, \mu_{i_1}^{s,k,h}, 0, \ldots, 0, \mu_{i_\varkappa}^{s,k,h}, 0, \ldots, 0)$, получаем

$$\begin{gathered}
\mu_0^{s,k,h}\delta I_0(u^{1,s,k,h}, \mathbf{n}) + \sum_{j=1}^{l_k} \mu_j^{s,k,h}\delta I_j^{k,h}(u^{1,s,k,h}, \mathbf{n}) \geq \\
\geq -2\sum_{j=0}^{l_k} \mu_j^{s,k,h}(\sqrt{\varepsilon_s} + \sqrt{\delta_k} + \sqrt{\gamma_h}) \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbf{N}, \\
\mu_0^{s,k,h}(J^{s,k,h}(u^{1,s,k,h}) - I_0(u^{1,s,k,h}) + \beta(q) - \\
-\sqrt{\varepsilon_s}\, d(u^{1,s,k,h}, u^{1,s}) - \sqrt{\delta_k}\, d(u^{1,s,k,h}, u^{1,s,k})) = 0, \\
\mu_j^{s,k,h}(J^{s,k,h}(u^{1,s,k,h}) - I_j^{k,h}(u^{1,s,k,h}) + q(x^{k,j}) - \\
-\sqrt{\varepsilon_s}\, d(u^{1,s,k,h}, u^{1,s}) - \sqrt{\delta_k}\, d(u^{1,s,k,h}, u^{1,s,k})) = 0, \quad j = 1, \ldots, l_k.
\end{gathered} \tag{4.13}$$

Из этих соотношений непосредственно вытекает следующая лемма, если в качестве наборов $\mathbf{n}$ брать всевозможные "одноточечные" наборы вида $\{x^1 \equiv x,\ \gamma^{1,1} = 1,\ u^{1,1} \equiv v,\ p_1 = 1,\ r_p = 1\}$ и учесть, что функции a, F непрерывны по компоненте u, а множество U^* всюду плотно в U.

Лемма 4.2. *Существует вектор* $\mu^{s,k,h} \in R^{l_k+1}$,

$$\sum_{j=0}^{l_k} \mu_j^{s,k,h} = 1, \quad \mu_j^{s,k,h} \geq 0,\ \ j = 0, 1, \ldots, l_k,$$

удовлетворяющий соотношениям (4.13), *такой, что*

$$\int_\Omega \max_{v\in U}\Big\{\mu_0^{s,k,h}(H_0(x,z[u^{1,s,k,h}](x),v,\eta_0[u^{1,s,k,h}](x)) -$$
$$- H_0(x,z[u^{1,s,k,h}](x),u^{1,s,k,h}(x),\eta_0[u^{1,s,k,h}](x))) +$$
$$+\sum_{j=1}^{l_k}\mu_j^{s,k,h}(H(x,z[u^{1,s,k,h}](x),v,\eta_j^{k,h}[u^{1,s,k,h}](x)) -$$
$$- H(x,z[u^{1,s,k,h}](x),u^{1,s,k,h}(x),\eta_j^{k,h}[u^{1,s,k,h}](x)))\Big\}dx \le 2\,\mathrm{meas}\,\Omega(\sqrt{\varepsilon_s}+\sqrt{\delta_k}+\sqrt{\gamma_h}\,),$$

где $\eta_0[u^{1,s,k,h}]$ — *решение сопряженной задачи* (3.1) *при* $u = u^{1,s,k,h}$, $\psi(x) = -\nabla_z F(x, z[u^{1,s,k,h}](x),$ $u^{1,s,k,h}(x)), \eta_j^{k,h}[u^{1,s,k,h}]$ — *решение той же сопряженной задачи при* $u = u^{1,s,k,h}$,

$$\psi(x) \equiv -(1/\,\mathrm{meas}(S_h(x_j^k)\cap\Omega))\chi_j^{k,h}(x)\partial G(x,z[u^{1,s,k,h}](x))/\partial z.$$

Определим сосредоточенную на множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{l_k} S_h(x^{k,i})\cap\Omega$ меру Радона $\lambda^{s,k,h}$ с помощью равенства

$$\lambda^{s,k,h}(E) \equiv \sum_{j=1}^{l_k}\int_E \mu_j^{s,k,h}(1/\,\mathrm{meas}(S_h(x^{k,j})\cap\Omega))\chi_j^{k,h}(x)dx,$$

где $E\subset\overline{\Omega}$ — борелевское множество. При этом, очевидно, выполняется равенство

$$\mu_0^{s,k,h} + |\lambda^{s,k,h}| = 1. \tag{4.14}$$

Тогда лемма 4.2 может быть переписана в виде следующей леммы.

Лемма 4.3. *Существует такая пара* $(\mu_0^{s,k,h}, \lambda^{s,k,h})$ *с положительной мерой Радона* $\lambda^{s,k,h}\in M(\Omega)$, $\mu_0^{s,k,h}\ge 0$, $\mu_0^{s,k,h}+|\lambda^{s,k,h}| = 1$, *сосредоточенной на совокупности тех множеств* $S_h(x^{k,j})\cap\Omega$, $j = 1,\dots,l_k$, *для которых*

$$J^{s,k,h}(u^{1,s,k,h}) - I_j^{k,h}(u^{1,s,k,h}) + q(x^{k,j}) - \sqrt{\varepsilon_s}\,d(u^{1,s,k,h},u^{1,s}) - \sqrt{\delta_k}\,d(u^{1,s,k,h},u^{1,s,k}) = 0,$$

что

$$\int_\Omega \max_{v\in U}\{\mu_0^{s,k,h}(H_0(x,z[u^{1,s,k,h}](x),v,\eta_0[u^{1,s,k,h}](x)) -$$
$$- H_0(x,z[u^{1,s,k,h}](x),u^{1,s,k,h}(x),\eta_0[u^{1,s,k,h}](x))) +$$
$$+ (H(x,z[u^{1,s,k,h}](x),v,\eta^{s,k,h}[u^{1,s,k,h}](x)) -$$
$$- H(x,z[u^{1,s,k,h}](x),u^{1,s,k,h}(x),\eta^{s,k,h}[u^{1,s,k,h}](x)))\}dx \le$$
$$\le 2\,\mathrm{meas}\,\Omega(\sqrt{\varepsilon_s}+\sqrt{\delta_k}+\sqrt{\gamma_h}\,),$$

где $\eta^{s,k,h}[u^{1,s,k,h}]$ — *решение задачи* (3.2) *с* $\mu = -\partial G(\cdot, z[u^{1,s,k,h}](\cdot))/\partial z\lambda^{s,k,h}$, $u = u^{1,s,k,h}$.

В соотношениях леммы 4.3 можем перейти к пределу: сначала при $h\to 0$ в силу оценки (4.9), а затем при $k\to\infty$ в силу оценки (4.3). При этих предельных переходах, естественно, используются условие нормировки (4.14), $*$-слабая компактность единичного шара пространства мер Радона, положительность мер $\lambda^{s,k,h}$ и априорные оценки лемм 3.1, 3.4. Мы опускаем подробности этих, с одной стороны, достаточно громоздких, а с другой стороны, вполне очевидных предельных переходов, в результате которых приходим к следующей лемме.

Лемма 4.4. *Существует пара (μ_0^s, λ^s) с положительной мерой Радона $\lambda^s \in M(\Omega)$,*

$$\mu_0^s \geq 0, \quad \mu_0^s + |\lambda^s| = 1,$$

сосредоточенной на множестве $\{x \in X : J(u^{1,s}) - G(x, z[u^{1,s}](x)) + q(x) = 0\}$, такая, что

$$\int_\Omega \max_{v \in U} \{\mu_0^s (H_0(x, z[u^{1,s}](x), v, \eta_0[u^{1,s}](x)) - H_0(x, z[u^{1,s}](x), u^{1,s}(x), \eta_0[u^{1,s}](x))) +$$
$$+ (H(x, z[u^{1,s}](x), v, \eta^s[u^{1,s}](x)) - H(x, z[u^{1,s}](x), u^{1,s}(x), \eta^s[u^{1,s}](x)))\} dx \leq 2 \operatorname{meas} \Omega \sqrt{\varepsilon_s},$$

где $\eta^s[u^{1,s}]$ — решение сопряженной задачи (3.2) *с $\mu = -\partial G(\cdot, z[u^{1,s}](\cdot))/\partial z \lambda^s$, $u = u^{1,s}$.*

И, наконец, первая из оценок (4.3) в совокупности с априорными оценками лемм 3.1, 3.3, 3.4 дают возможность переписать последнюю лемму в терминах исходного м. п. р. u^s, $s = 1, 2, \ldots$ В результате такого вполне очевидного, но достаточно громоздкого переписывания получаем все соотношения доказываемой теоремы. $\square$

5. Регулярность, нормальность, условие Слейтера

В связи с теоремой 4.1 естественно ввести следующее определение [11]–[14] стационарной, нормальной стационарной, регулярной стационарной и анормальной стационарной в задаче (P_q) последовательностей.

Определение 5.1. Последовательность $u^s \in \mathcal{D}$, $s = 1, 2, \ldots$, назовем стационарной в задаче (P_q), если существуют последовательность чисел $\gamma^s \geq 0$, $\gamma^s \to 0$, $s \to \infty$, такая, что $u^s \in \mathcal{D}_q^{\gamma^s}$, $s = 1, 2, \ldots$, ограниченная последовательность пар (μ_0^s, λ^s), $\mu_0^s \geq 0$, $\lambda^s \in M(\Omega)$, $\mu_0^s + |\lambda^s| \neq 0$, имеющая только ненулевые предельные точки $(\mu_0, \lambda) \neq 0$, с положительной мерой λ^s, сосредоточенной на множестве $\{x \in X : |G(x, z[u^s](x)) - q(x)| \leq \gamma^s\}$, такая, что

$$\int_\Omega \max_{v \in U} \{\mu_0^s (H_0(x, z[u^s](x), v, \eta_0[u^s](x)) - H_0(x, z[u^s](x), u^s(x), \eta_0[u^s](x))) +$$
$$+ (H(x, z[u^s](x), v, \eta^s[u^s](x)) - H(x, z[u^s](x), u^s(x), \eta^s[u^s](x)))\} dx \leq \gamma^s,$$

где $\eta^s[u^s]$ — решение сопряженной задачи 3.2 с $u = u^s$, $\mu = -\partial G(\cdot, z[u^s](\cdot))/\partial z \lambda^s$.

Определение 5.2. Стационарную в задаче (P_q) последовательность $u^s \in \mathcal{D}_q^{\gamma^s}$, $s = 1, 2, \ldots$, $\gamma^s \geq 0$, $\gamma^s \to 0$, $s \to \infty$, назовем нормальной (регулярной, анормальной), если все (существуют, не существуют) соответствующие ей согласно определению 5.1 последовательности множителей (μ_0^s, λ^s), $s = 1, 2, \ldots$, имеют (имеющие, имеющие) предельные точки (μ_0, λ) лишь с компонентой (лишь с компонентой, с компонентой) $\mu_0 > 0$. Задача (P_q) называется нормальной (анормальной), если все ее стационарные последовательности нормальны (анормальны). Задача (P_q) называется регулярной, если в ней существуют регулярные стационарные последовательности.

Покажем далее, что достаточным условием нормальности в так называемой "линейно выпуклой" задаче (P_q) является условие Слейтера. Для этого докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть $z \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ является решением линейной краевой задачи*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x) z_{x_j} + a(x) z = f(x), \quad z(x) = 0, \quad x \in S,$$

с удовлетворяющими условию б) *коэффициентами $a_{i,j}$ и с коэффициентами $a, f \in L_{q/2}(\Omega)$, $q > n$, $a(x) \leq 0$ почти всюду на Ω. Тогда для любой меры $\mu \in M(\Omega)$ справедливо равенство*

$$\int_\Omega z(x) \mu(dx) = \int_\Omega \eta(x) f(x) dx, \tag{5.1}$$

где $\eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_\sigma(\Omega)$, $\sigma < n/(n-1)$, есть решение сопряженной задачи

$$\frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}(x)\eta_{x_i} + a(x)\eta = \mu, \quad \eta(x) = 0, \quad x \in S. \tag{5.2}$$

Доказательство. По аналогии с [10] (см., напр., доказательство теоремы IV.2.6) $*$-слабо аппроксимируем радоновскую меру $\mu \in M(\Omega)$ последовательностью мер $\mu^k \in M(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots$, каждая из которых сосредоточена в конечном числе попарно различных точек $\{x^{k,1}, \dots, x^{k,l_k}\}$ области Ω,

$$\mu^k \equiv \sum_{j=1}^{l_k} \lambda^{k,j} \delta_{x^{k,j}}, \quad \mu^k \to \mu \ \ *\text{-слабо}, \quad k \to \infty, \tag{5.3}$$

где $\lambda^{k,j}$ — некоторые равномерно по $k = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, l_k$ ограниченные числа, $\delta_{x^{k,j}}$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $x^{k,j}$. Каждую из мер μ^k аппроксимируем последовательностью сосредоточенных на множестве $\bigcup\limits_{j=1}^{l_k} S_h(x^{k,j})$ мер $\mu^{k,h_t} \in M(\Omega)$, $t = 1, 2, \dots$,

$$\begin{gathered} \mu^{k,h_t} \equiv \sum_{j=1}^{l_k} \lambda^{k,j} (1/\operatorname{meas}(S_{h_t}(x^{k,j}) \cap \Omega)) \mu^{k,h_t,j}, \quad \mu^{k,h_t,j}(E) \equiv \int_E \chi_j^{k,h_t}(x)dx, \\ \mu^{k,h_t} \to \mu^k \ \ *\text{-слабо}, \quad t \to \infty, \end{gathered} \tag{5.4}$$

где $E \subset \overline{\Omega}$ — борелевское множество, $\chi_j^{k,h}$ — характеристическая функция шара $S_h(x^{k,j})$, $\mu^{k,h_t,j}$ — сосредоточенная на шаре $S_h(x^{k,j})$ мера Радона, которую можно отождествить с обычной мерой Лебега на указанном шаре. Можем записать

$$\int_\Omega z(x)\mu^{k,h_t}(dx) = \sum_{j=1}^{l_k} \lambda^{k,j} (1/\operatorname{meas}(S_{h_t}(x^{k,j}) \cap \Omega)) \int_\Omega z(x)\mu^{k,h_t,j}(dx) =$$
$$= \sum_{j=1}^{l_k} \lambda^{k,j} (1/\operatorname{meas}(S_{h_t}(x^{k,j}) \cap \Omega)) \int_\Omega z(x)\chi_j^{k,h_t}(x)dx.$$

Пользуясь здесь леммой 2 из [19] о представлении линейного функционала на множестве решений линейной краевой задачи Дирихле, получаем равенство

$$\int_\Omega z(x)\mu^{k,h_t}(dx) = \int_\Omega \eta^{k,h_t}(x) f(x)dx,$$

где $\eta^{k,h_t} \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^1_\sigma(\Omega)$ — решение сопряженной задачи (5.2) с $\mu = \mu^{k,h_t}$. Переходя в последнем равенстве в силу оценки леммы 3.4 ($\|\eta^{k,h_t}\|^{(1)}_{\sigma,\Omega} \le K$ с независящей от k, t постоянной $K > 0$, см. также лемму 2.4 в [8]), компактного вложения $W^1_\sigma(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ с $p < n\sigma/(n-\sigma)$, единственности решения η и $*$-слабых предельных соотношений (5.3), (5.4) к пределу сначала при $t \to \infty$, а затем при $k \to \infty$, получаем равенство (5.1). □

Теорема 5.1. *Пусть в задаче (P_q) функция a, задающая "правую" часть уравнения, имеет вид $a(x, z, u) \equiv a_1(x)z + a_2(x, u)$, а функция G, задающая фазовое ограничение, выпукла по z при всех x. Пусть также $u^0 \in \mathcal{D}$ — такое управление, что $G(x, z[u^0](x)) - q(x) \le -\gamma \ \forall x \in X$, $\gamma > 0$, т. е. в задаче (P_q) выполняется условие Слейтера. Тогда задача (P_q) является нормальной.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и пусть $u^s \in \mathcal{D}$, $s = 1, 2, \dots,$ — стационарная последовательность в задаче (P_q) такая, что соответствующая последовательность пар (μ_0^s, λ^s), $s = 1, 2, \dots$, имеет предельную точку (μ_0, λ) с компонентой $\mu_0 = 0$.

Тогда с учетом положительности меры λ^s, выпуклости по z функции G и леммы 5.1 можем записать для любого $u \in \mathcal{D}$

$$\int_\Omega (G(x,z[u](x)) - G(x,z[u^s](x)))\lambda^s(dx) \geq$$
$$\geq \int_\Omega \nabla_z G(x,z[u^s](x))(z[u](x) - z[u^s](x))\lambda^s(dx) =$$
$$= \int_\Omega \eta^s[u^s](x)(a(x,z[u^s](x),u^s(x)) - a(x,z[u^s](x),u(x)))dx =$$
$$= \int_\Omega (H(x,z[u^s](x),u^s(x),\eta^s[u^s](x)) - H(x,z[u^s](x),u(x),\eta^s[u^s](x)))dx, \quad (5.5)$$

где $\eta^s[u^s]$ — решение сопряженной задачи (3.2) с $u = u^s$, $\mu = -\partial G(\cdot, z[u^s](\cdot))/\partial z \lambda^s$. При этом, очевидно, разность $z[u](x) - z[u^s](x)$ есть решение линеаризованной краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x) z_{x_j} + a_1(x)z = a_2(x,u(x)) - a_2(x,u^s(x)), \quad z(x) = 0, \ \ x \in S.$$

Из предельного соотношения $\mu_0^s \to 0$, $s \to \infty$, неравенства (5.5), стационарности последовательности u^s, $s = 1,2,\ldots$, получаем для некоторой сходящейся к нулю последовательности неотрицательных чисел $\overline{\gamma}^s$, $s = 1,2,\ldots$,

$$\int_\Omega (G(x,z[u](x)) - G(x,z[u^s](x)))\lambda^s(dx) \geq$$
$$\geq \int_\Omega \{\mu_0^s(H_0(x,z[u^s](x),u^s(x),\eta_0[u^s](x)) - H_0(x,z[u^s](x),u(x),\eta_0[u^s](x))) +$$
$$+ (H(x,z[u^s](x),u^s(x),\eta^s[u^s](x)) - H(x,z[u^s](x),u(x),\eta^s[u^s](x)))\}dx +$$
$$+ \int_\Omega \{-\mu_0^s(H_0(x,z[u^s](x),u^s(x),\eta_0[u^s](x)) - H_0(x,z[u^s](x),u(x),\eta_0[u^s](x)))\}dx \geq -\overline{\gamma}^s.$$

В то же время в силу сосредоточенности положительной меры λ^s на множестве $\{x \in X : |G(x,z[u^s](x)) - q(x)| \leq \gamma^s\}$, невырожденности любой предельной для последовательности мер λ^s, $s = 1,2,\ldots$, меры и условия Слейтера можем записать

$$\int_\Omega (G(x,z[u^0](x)) - G(x,z[u^s](x)))\lambda^s(dx) \leq -\alpha$$

для некоторого числа $\alpha > 0$. Полученное противоречие говорит о том, что теорема доказана. □

Примечание при корректуре. Все результаты данной работы могут быть "замкнуты" и записаны в терминах обобщенных оптимальных управлений в смысле [10]. Однако мы не делаем этого здесь по двум причинам. Во-первых, расширение задачи потребовало бы заметного увеличения объема статьи. И, во-вторых, формулировка принципа максимума для м. п. р. обладает определенным преимуществом с прикладной точки зрения, т. к. не использует обобщенных управлений, являющихся абстрактными мерами.

Литература

1. Mackenroth U. *On some elliptic optimal control problems with state constraints* // Optim. – 1986. – V. 17. – P. 595–607.
2. Abergel F., Temam R. *Optimality conditions for some non-qualified problems of distributed control* // SIAM J. Control Optim. – 1989. – V. 27. – № 1. – P. 1–12.
3. Bergounioux M. *A penalization method for optimal control of elliptic problems with state constraints* // SIAM J. Control Optim. – 1992. – V. 30. – № 2. – P.305–323.

4. Bonans J.F. *Pontryagin's principle for the optimal control of semilinear elliptic systems with state constraints* // In "30th IEEE Conference on Control and Decision. Brighton, England". – 1991. – P. 1976–1979.
5. Bonans J.F., Casas E. *Un principe de Pontryagine pour le contrôle des systèmes elliptiques* // J. Different. Equat. – 1991. – V. 90. – P. 288–303.
6. Bonans J.F., Casas E. *A boundary Pontryagin's principle for the optimal control of state constrained elliptic systems* // Intern. Series of Num. Math. – Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. – V. 107. – P. 241–249.
7. Casas E. *Boundary control of semilinear elliptic equations with pointwise state constraints* // SIAM J. Control Optim. – 1993. – V. 31. – № 4. – P. 993–1006.
8. Bonans J.F., Casas E. *An extension of Pontryagin's principle for state-constrained optimal control of semilinear elliptic equations and variational inequalities* // SIAM J. Control Optim. – 1995. – V. 33. – № 1. – P. 274–298.
9. Alibert J.J., Raymond J.P. *Optimal control problems governed by semilinear elliptic equations with pointwise state constraints* // Preprint. – 1994.
10. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 624 с.
11. Сумин М.И. *Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами* // Сб. докл. 1-й междунар. конф. "Математические алгоритмы" (Н. Новгород, 14–19 августа 1994 г.). – Н. Новгород: Изд-во Нижегородск. ун-та, 1995. – С. 116–125.
12. Sumin M.I. *Suboptimal control of systems with distributed parameters: minimizing sequences, value function, regularity, normality* // Control and Cybernetics. – 1996. – V. 25. – № 3. – P. 529–552.
13. Сумин М.И. *Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: минимизирующие последовательности, функция значений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – № 1. – С. 23–41.
14. Сумин М.И. *Субоптимальное управление системами с распределенными параметрами: свойства нормальности, субградиентный двойственный метод* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – № 2. – С. 162–178.
15. Сумин М.И. *О минимизирующих последовательностях в задачах оптимального управления при ограниченных фазовых координатах* // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22. – № 10. – С. 1719–1731.
16. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1973. – 736 с.
17. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* – М.: Наука, 1989. – 464 с.
18. Ekeland I. *On the variational principle* // J. Math. Anal. Appl. – 1974. – V.47. – № 2. – P. 324–353.
19. Сумин М.И. *Оптимальное управление объектами, описываемыми квазилинейными эллиптическими уравнениями* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 8. – С. 1406–1416.

Нижегородский государственный университет

Поступила
16.11.1998