ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 10 (521)

УДК 517.926

Ю.Я. ИСАЕНКО

СТРУКТУРА ПЕРИОДИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИМЕЮЩИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ, ТОЖДЕСТВЕННО РАВНЫЙ ЕДИНИЦЕ

Хорошо известно [1], что для линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами справедлива фундаментальная теорема Флоке–Ляпунова, которая утверждает, что матрицант $X(t)$ уравнения

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

с ω-периодической вещественной матрицей коэффициентов представим в виде $X(t) = F(t)e^{Rt}$, где R — постоянная вещественная матрица со следом, равным нулю, если $\operatorname{Sp} A(t) \equiv 0$, а $F(t)$ — вещественная матрица-функция, в общем случае периода 2ω, которая удовлетворяет условиям $F(0) = I$ и $\det F(t) \equiv 1$. Эта теорема объединяет два различных предложения: теорему Флоке [2] об общем виде решения такого уравнения и теорему Ляпунова [3] о приводимости.

В [4] получены необходимые и достаточные условия того, что матрица-функция

$$F(t) = A_0 + A_k \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t$$

удовлетворяет условиям $F(0) = I$ и $\det F(t) \equiv 1$, т.е. может выступать в качестве первого сомножителя в представлении матрицанта $X(t)$. В данной статье установлены аналогичные условия для матриц-функций

$$F(t) = A_0 + A_k \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t + A_n \cos\frac{2\pi n}{\omega}t + B_n \sin\frac{2\pi n}{\omega}t, \tag{$*$}$$

где $t \in R$; A_0, A_k, B_k, A_n, B_n — постоянные квадратные матрицы второго порядка, причем среди матриц A_i, B_i по крайней мере одна отлична от нулевой для $i = k$ и $i = n$; ω — произвольное положительное число; k и n — не равные между собой натуральные числа. Для определенности будем считать, что $n > k$.

В дальнейшем, если матрица-функция $F(t)$ имеет представление ($*$) и удовлетворяет условиям $F(0) = I$ и $\det F(t) \equiv 1$, будем говорить, что $F(t) \in \Omega_2^\omega$.

Рассмотрим подмножество $M = \{k,\ n-k,\ 2k,\ n,\ n+k,\ 2n\}$ множества N натуральных чисел. Имеют место следующие три возможности:

А) M состоит из шести чисел, если $n \neq 2k$ и $n \neq 3k$;

Б) M состоит из пяти чисел, если $n = 3k$;

В) M состоит из четырех чисел, если $n = 2k$.

Ниже рассматривается в основном случай А). Достаточно просто доказывается

Теорема 1. *Если имеет место случай* А)*, то для включения $F(t) \in \Omega_2^\omega$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения*:

$$A_0A_0^- + \frac{1}{2}[A_kA_k^- + B_kB_k^- + A_nA_n^- + B_nB_n^-] = I, \tag{1}$$

$$A_0A_k^- + A_kA_0^- = 0, \tag{2}$$

$$A_0B_k^- + B_kA_0^- = 0, \tag{3}$$

$$A_kA_n^- + A_nA_k^- + B_kB_n^- + B_nB_k^- = 0, \tag{4}$$
$$A_kB_n^- + B_nA_k^- - B_kA_n^- - A_nB_k^- = 0, \tag{5}$$
$$A_kA_k^- - B_kB_k^- = 0, \tag{6}$$
$$A_kB_k^- + B_kA_k^- = 0, \tag{7}$$
$$A_0A_n^- + A_nA_0^- = 0, \tag{8}$$
$$A_0B_n^- + B_nA_0^- = 0, \tag{9}$$
$$A_kA_n^- + A_nA_k^- - B_kB_n^- - B_nB_k^- = 0, \tag{10}$$
$$A_kB_n^- + B_nA_k^- + B_kA_n^- + A_nB_k^- = 0, \tag{11}$$
$$A_nA_n^- - B_nB_n^- = 0, \tag{12}$$
$$A_nB_n^- + B_nA_n^- = 0, \tag{13}$$
$$A_0 + A_k + A_n = I, \tag{14}$$

где через A^- обозначена матрица, присоединенная к матрице A.

Следствие. Если имеет место случай A) и $F(t) \in \Omega_2^\omega$, то матрицы A_0, A_k, B_k, A_n, B_n удовлетворяют условиям

$$A_kA_n^- + A_nA_k^- = (\operatorname{Sp} A_kA_n^-)I = 0, \tag{15}$$
$$A_kB_n^- + B_nA_k^- = (\operatorname{Sp} A_kB_n^-)I = 0, \tag{16}$$
$$B_kB_n^- + B_nB_k^- = (\operatorname{Sp} B_kB_n^-)I = 0, \tag{17}$$
$$A_nB_k^- + B_kA_n^- = (\operatorname{Sp} A_nB_k^-)I = 0, \tag{18}$$
$$\operatorname{Sp} A_0 = 2\det A_0, \tag{19}$$
$$\operatorname{Sp} A_k = 2\det A_k, \tag{20}$$
$$\operatorname{Sp} A_n = 2\det A_n, \tag{21}$$
$$\operatorname{Sp} B_k = \operatorname{Sp} B_n = 0. \tag{22}$$

Далее используются некоторые результаты для матриц второго порядка, которые формулируются в виде нескольких лемм и их следствий. Убедиться в справедливости этих утверждений легко можно с помощью непосредственной проверки.

Лемма 1. *Для любых матриц A, B имеет место равенство*

$$\det(A+B) = \det A + \det B + \operatorname{Sp}(AB^-).$$

Лемма 2. *Пусть A и B — ненулевые матрицы такие, что*

$$\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B = \operatorname{Sp} AB^- = 0.$$

Тогда $\det B < 0$, *если* $\det A > 0$, *и* $\det B \le 0$, *если* $\det A = 0$.

Следствие. Пусть $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B = \operatorname{Sp} AB^- = 0$, причем $A \neq 0$, $\det A = \det B = 0$. Тогда $B = \lambda A$, где $\lambda \in R$.

Лемма 3. *Пусть ненулевые матрицы A и B удовлетворяют условиям*

$$\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B = \operatorname{Sp} AB^- = \det A = 0,$$
$$\det B \neq 0.$$

Если матрица C такая, что $\operatorname{Sp} C = \operatorname{Sp} AC^- = \operatorname{Sp} BC^- = 0$, *то* $\det C = 0$.

Следствие. Если $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} B = 0$ и матрицы A и B линейно независимы, то множество решений системы
$$\operatorname{Sp} AX^- = 0, \quad \operatorname{Sp} BX^- = 0,$$
где $\operatorname{Sp} X = 0$, одномерно.

Предположим, что матрицы B_k и B_n, входящие в разложение матрицы-функции $F(t)$, коллинеарны. Тогда справедлива

Лемма 4. *Пусть* $F(t) \in \Omega_2^\omega$, *имеет место случай* A), *а матрицы* B_k *и* B_n *коллинеарны. Тогда* $\det B_k = \det B_n = 0$.

Доказательство. Если $B_k = B_n = 0$, то утверждение леммы справедливо. Пусть теперь, по крайней мере, одна из матриц B_k, B_n отлична от нулевой, например $B_k \neq 0$. Тогда $B_n = \lambda B_k$ по условию леммы и, следовательно, $\det B_n = \lambda^2 \det B_k$. Поэтому, если $\det B_k = 0$, то получаем $\det B_n = 0$, т. е. и в этом случае утверждение леммы остается в силе. Покажем теперь, что предположение $\det B_k \neq 0$ приводит к противоречию. Действительно, из этого предположения вытекает, что $\lambda = 0$, т. к. условие (17) в этой ситуации принимает вид
$$\operatorname{Sp} B_k B_n^- = \operatorname{Sp}\{B_k[\lambda B_k]^-\} = \lambda \operatorname{Sp} B_k B_k^- = 2\lambda \det B_k = 0.$$

Таким образом, $B_n = 0$, а это совместно с (12) влечет $\det A_n = 0$. Следовательно, в силу (21) получаем $\operatorname{Sp} A_n = 0$. Итак, матрица A_n удовлетворяет соотношению $\operatorname{Sp} A_n = \det A_n = 0$. Кроме этого, $A_n \neq 0$, иначе бы $F(t) \notin \Omega_2^\omega$, что противоречит условию леммы.

Рассмотрим матрицу $C_k = A_k - \frac{1}{2} \operatorname{Sp} A_k I$. Для этой матрицы имеем
$$\operatorname{Sp} C_k = \operatorname{Sp}[A_k - \tfrac{1}{2} \operatorname{Sp} A_k I] = \operatorname{Sp} A_k - \tfrac{1}{2} \operatorname{Sp} A_k 2 = 0,$$
$$\operatorname{Sp} C_k A_n^- = \operatorname{Sp}\{[A_k - \tfrac{1}{2} \operatorname{Sp} A_k I] A_n^-\} = \operatorname{Sp} A_k A_n^- - \tfrac{1}{2} \operatorname{Sp} A_k \operatorname{Sp} A_n = 0$$
в силу (15) и $\operatorname{Sp} A_n = 0$;
$$\operatorname{Sp} C_k B_k^- = \operatorname{Sp}\{[A_k - \tfrac{1}{2} \operatorname{Sp} A_k I] B_k^-\} = \operatorname{Sp} A_k B_k^- - \tfrac{1}{2} \operatorname{Sp} A_k \operatorname{Sp} B_k = 0$$
в силу (7) и (22);
$$\det C_k = \det A_k - \tfrac{1}{2} \operatorname{Sp} A_k \operatorname{Sp}(A_k I) + \tfrac{1}{4} (\operatorname{Sp} A_k)^2 = \det A_k - \tfrac{1}{4} (\operatorname{Sp} A_k)^2 = \det A_k - (\det A_k)^2.$$

Таким образом, матрицы A_n, B_k и C_k удовлетворяют всем условиям леммы 3. В силу этой леммы имеем $\det C_k = 0$ и, следовательно, $\det A_k - (\det A_k)^2 = 0$, т. е. $\det A_k$ либо равен нулю, либо равен единице. Но $\det A_k = \det B_k$ в силу (6), а $\det B_k \neq 0$ по нашему предположению, поэтому $\det A_k = \det B_k = 1$. С другой стороны, матрицы A_n и B_k удовлетворяют всем условиям леммы 2, что следует из (18) и нашего предположения. Применив эту лемму, получаем $\det B_k \leq 0$, что приводит к противоречию.

Рассмотрим случай, когда матрицы B_k и B_n, входящие в разложение матрицы-функции $F(t)$, линейно независимы.

Лемма 5. *Пусть* $F(t) \in \Omega_2^\omega$, *имеет место случай* A) *и матрицы* B_k *и* B_n *линейно независимы. Тогда* $\det B_k$ *и* $\det B_n$ *отличны от нуля и единицы.*

Доказательство. Покажем вначале, что $\det B_k$ отличен от нуля. Предположим противное, т. е. $\det B_k = 0$. Тогда в силу (17), (22) и леммы 2 имеем $\det B_n \leq 0$. Но $\det B_n$ не может равняться нулю, иначе по следствию леммы 2 было бы верно соотношение $B_n = \lambda B_k$, а это противоречит линейной независимости B_k и B_n. Следовательно, $\det B_n < 0$. Рассмотрим матрицу $C_n = A_n - \frac{1}{2} \operatorname{Sp} A_n I$. Аналогично тому, как в лемме 4 для матриц C_k, C_n имеем
$$\operatorname{Sp} C_n = 0, \quad \operatorname{Sp} C_n B_k^- = 0, \quad \operatorname{Sp} C_n B_n^- = 0,$$
$$\det C_n = \det A_n - (\det A_n)^2.$$

Таким образом, матрицы B_k, B_n и C_n удовлетворяют всем условиям леммы 3. Поэтому, применяя эту лемму, получаем $\det C_n = 0$, а отсюда и из выражения $\det C_n$ через $\det A_n$ следует, что $\det A_n$ равен либо нулю, либо единице. С другой стороны, в силу (12) $\det A_n = \det B_n$, а $\det B_n$, как было показано, меньше нуля, что приводит к противоречию.

Теперь осталось показать, что $\det B_k$ отличен от единицы. Опять предположим противное, т. е. $\det B_k = 1$. Тогда в силу леммы 2 и (17) получаем $\det B_n < 0$. Рассмотрим матрицу $C_k = A_k - \frac{1}{2} \operatorname{Sp} A_k I$. В доказательстве леммы 4 было показано, что $\operatorname{Sp} C_k = \operatorname{Sp} C_k B_k^- = 0$ и $\det C_k = \det A_k - (\det A_k)^2$, поэтому из предположения $\det B_k = 1$ и условия (6) получаем, что $\det C_k = 0$, а это совместно с леммой 2 влечет равенство $C_k = 0$.

Таким образом, $A_k = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} A_k I$. Из (6) и нашего предположения получаем, что $\det A_k = 1$, а это совместно с (20) влечет соотношение $\operatorname{Sp} A_k = 2$, следовательно, $A_k = I$. Отсюда, используя (15), получаем $\operatorname{Sp} A_n = 0$, что вместе с (21) дает равенство $\det A_n = 0$. С другой стороны, из (12) следует, что $\det A_n = \det B_n < 0$, т. е. пришли к противоречию.

Доказательство утверждений для матрицы B_n проводится точно так же, только у всех матриц индекс k нужно изменить на n и наоборот. $\square$

Теорема 2. *Если $F(t) \in \Omega_2^\omega$, имеет место случай* A) *и матрицы B_k и B_n, входящие в разложение* $(*)$, *коллинеарны, то $F(t)$ обязательно имеет вид*

$$F(t) = I - (\lambda + n)B_0 + \lambda B_0 \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \eta B_0 \cos\frac{2\pi n}{\omega}t + \mu B_0 \sin\frac{2\pi k}{\omega}t + \nu B_0 \sin\frac{2\pi n}{\omega}t, \qquad (23)$$

где B_0 — ненулевая квадратная матрица второго порядка, у которой определитель и след равны нулю, а λ, η, μ, ν — произвольные вещественные числа такие, что $\lambda^2+\mu^2\neq 0$ и $\eta^2+\nu^2\neq 0$.

Доказательство. Используя утверждение леммы 4 и (22), получаем, что постоянные матрицы B_k и B_n, входящие в разложение $(*)$ матрицы-функции $F(t)$, удовлетворяют соотношениям

$$\det B_k = \det B_n = \operatorname{Sp} B_k = \operatorname{Sp} B_n = 0.$$

Поэтому отсюда в силу (6) и (12) получаем $\det A_k = \det A_n = 0$ и т. к. A_k и A_n удовлетворяют условиям (20) и (21), то $\operatorname{Sp} A_k = \operatorname{Sp} A_n = 0$.

Таким образом, все матрицы A_k, A_n, B_k, B_n имеют след, равный нулю, определители, равные нулю, и удовлетворяют условиям (7), (13), (15), (16), (17) и (18). По условию теоремы среди этих матриц по меньшей мере две ненулевые, поэтому в силу следствия леммы 2 линейная оболочка, порожденная матрицами A_k, A_n, B_k, B_n, будет одномерным подпространством. Обозначив через B_0 любую базисную матрицу этого подпространства и используя (14), получаем, что $F(t)$ имеет вид (23). $\square$

Теорема 3. *Если $F(t) \in \Omega_2^\omega$, имеет место случай* A) *и матрицы B_k и B_n, входящие в разложение* $(*)$, *линейно независимы, то $F(t)$ имеет вид*

$$F(t) = [\det B_k I + B_k B_n^-] \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t + [\det B_n I - B_k B_n^-] \cos\frac{2\pi n}{\omega}t + B_n \sin\frac{2\pi n}{\omega}t \qquad (24)$$

либо вид

$$F(t) = [\det B_k I - B_k B_n^-] \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t + [\det B_n I + B_k B_n^-] \cos\frac{2\pi n}{\omega}t + B_n \sin\frac{2\pi n}{\omega}t, \qquad (24')$$

где $\operatorname{Sp} B_k = \operatorname{Sp} B_n = 0$ и матрицы B_k, B_n удовлетворяют соотношениям

$$\det B_k \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty), \qquad (25)$$

$$\det B_k + \det B_n = 1, \qquad (26)$$

$$\operatorname{Sp} B_k B_n^- = 0. \qquad (27)$$

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\operatorname{Sp} XB_k^- = 0, \quad \operatorname{Sp} XB_n^- = 0, \quad \operatorname{Sp} X = 0 \tag{28}$$

относительно неизвестной квадратной матрицы X второго порядка. В силу следствия леммы 4 множество решений системы (28) — одномерное подпространство. Легко видеть, что матрица $C_k = A_k - \frac{1}{2}\operatorname{Sp} A_k I$ является ненулевым решением этой системы. Действительно, то, что $\operatorname{Sp} C_k B_k^- = 0$ и $\operatorname{Sp} C_k = 0$, было показано при доказательстве леммы 4. Далее, используя условия (16) и (22), получаем

$$\operatorname{Sp} C_k B_n^- = \operatorname{Sp} A_k B_n^- - \tfrac{1}{2}\operatorname{Sp} A_k \operatorname{Sp} B_n^- = 0.$$

Наконец, $\det C_k = \det A_k - (\det A_k)^2 = \det B_k - (\det B_k)^2 \neq 0$, т. к. по лемме 5 $\det B_k$ отличен от нуля и единицы. Таким образом, матрицу C_k можно взять в качестве базиса подпространства решений системы (28).

В доказательстве леммы 5 было показано, что матрица $C_n = A_n - \frac{1}{2}\operatorname{Sp} A_n I$ также является решением системы (28), следовательно, $C_n = \alpha C_k$, где $\alpha \in R$.

Заметим, что $\alpha \neq 0$. Действительно, если бы $\alpha = 0$, то $C_n = 0$ и $A_n = \frac{1}{2}\operatorname{Sp} A_n I$ или в силу (21) $A_n = \det A_n I$. Отсюда получаем $\det A_n = (\det A_n)^2$ и, следовательно, $\det A_n$ равен либо нулю, либо единице. Но $\det A_n = \det B_n$ в силу условия (12), а по лемме 5 $\det B_n$ отличен от нуля и единицы.

Обозначим через μ_i определитель матрицы B_i, где i принимает значения k и n. Теперь, используя (20) и (21), для матриц A_k и A_n получаем

$$A_k = \det A_k I + C_k, \quad A_n = \det A_n I + \alpha C_k,$$

или в силу (6) и (12)

$$A_k = \mu_k I + C_k, \quad A_n = \mu_n I + \alpha C_k.$$

Вычисляя определители матриц A_k и A_n по лемме 1 и учитывая, что $\operatorname{Sp} C_k = 0$, получим

$$\mu_k = \mu_k^2 + \det C_k, \quad \mu_n = \mu_n^2 + \alpha^2 \det C_k,$$

а отсюда следует равенство

$$\alpha^2 \mu_k (1 - \mu_k) = \mu_n (1 - \mu_n). \tag{29}$$

Помимо этого имеем $A_k A_n^- = [\mu_k I + C_k][\mu_n I + \alpha C_k]^- = \mu_k \mu_n I + \mu_k \alpha C_k^- + \mu_n C_k + \alpha C_k C_k^-$ и, т. к. $\operatorname{Sp} A_k A_n^- = 0$, $\operatorname{Sp} C_k = 0$ и $C_k C_k^- = \det C_k I$, получаем

$$\operatorname{Sp} A_k A_n^- = 2\mu_k \mu_n + 2\alpha \mu_k (1 - \mu_k) = 0$$

или

$$\mu_n + \alpha(1 - \mu_k) = 0. \tag{30}$$

Теперь соотношение (29) можно записать, учитывая (30), в виде

$$-\alpha \mu_k \mu_n = \mu_n (1 - \mu_n)$$

или после сокращения на $\mu_n \neq 0$

$$-\alpha \mu_k = 1 - \mu_n.$$

Подставляя это в (30), получаем $\mu_n + \alpha + 1 - \mu_n = 0$, откуда $\alpha = -1$, а условие (30) принимает вид

$$\mu_k + \mu_n = \det B_k + \det B_n = 1.$$

Поэтому $A_k = \mu_k I + C_k$, $A_n = (1 - \mu_k)I - C_k$, $A_k + A_n = I$ и, следовательно, $A_0 = 0$.

Так как $\mu_k + \mu_n = 1$, то числа μ_k и μ_n не могут быть одновременно меньше нуля. С другой стороны, они не могут быть одновременно положительными в силу леммы 2 и условия $\operatorname{Sp} B_k B_n^- = 0$. Следовательно, $\mu_k \mu_n = \mu_k (1 - \mu_k) < 0$, т. е. $\mu_k \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Теперь для окончания доказательства теоремы осталось установить вид матрицы C_k. Очевидно, что в качестве C_k могут быть только те решения системы (28), у которых определитель равен $\mu_k(1-\mu_k)$. Легко видеть, что матрица $B_kB_n^-$ является ненулевым решением системы (28), поэтому любое решение системы имеет вид $X = \beta B_kB_n^-$, где $\beta \in R$. Отсюда $\det X = \beta^2 \det B_kB_n^- = \beta^2\mu_k(1-\mu_k)$ и, следовательно, $C_k = \pm B_kB_n^-$. Беря $C_k = B_kB_n^-$, получаем разложение (24), а беря $C_k = -B_kB_n^-$, получаем разложение (24$'$). □

Перейдем теперь к изучению достаточных условий принадлежности матрицы-функции $F(t)$ множеству Ω_2^ω, когда имеет место случай А). Оказывается, что необходимые условия, полученные в теоремах 2 и 3, одновременно являются и достаточными. А именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. *Если матрица-функция $F(t)$ имеет разложение*

$$F(t) = I - (\lambda+\eta)B_0 + \lambda B_0 \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + \eta B_0 \cos\frac{2\pi n}{\omega}t + \mu B_0 \sin\frac{2\pi k}{\omega}t + \nu B_0 \sin\frac{2\pi n}{\omega}t,$$

где B_0 — ненулевая квадратная матрица второго порядка, у которой определитель и след равны нулю, а λ, η, μ, ν — произвольные вещественные числа такие, что $\lambda^2+\mu^2\neq 0$ и $\eta^2+\nu^2\neq 0$, k и n — натуральные числа такие, что $n > k$, $n \neq 2k$, $n \neq 3k$, то матрица-функция $F(t)$ принадлежит Ω_2^ω.

Доказательство. Из представления $F(t)$ имеем

$$A_0 = I - (\lambda+\eta)B_0, \quad A_k = \lambda B_0, \quad A_n = \eta B_0, \quad B_k = \mu B_0,$$
$$B_n = \nu B_0, \quad F(0) = A_0 + A_k + A_n = I.$$

То, что $F(t)$ имеет представление $(*)$, следует из неравенства

$$(\lambda^2+\mu^2)(\eta^2+\nu^2) \neq 0.$$

Осталось проверить, что $F(t)F^-(t) \equiv I$, т. е. проверить справедливость соотношений (1)–(13). Так как матрицы A_k, A_n, B_k, B_n коллинеарны матрице B_0, для которой в силу условий теоремы имеем

$$B_0 + B_0^- = \operatorname{Sp} B_0 I = 0, \quad B_0B_0^- = \det B_0 I = 0,$$

то

$$A_kA_k^- = A_kA_n^- = A_kB_k^- = A_kB_n^- = A_nA_n^- = A_nB_k^- = A_nB_n^- = B_kB_k^- = B_kB_n^- = B_nB_n^- = 0. \quad (31)$$

Отсюда следует, что выполняются соотношения (4)–(7) и (10)–(13). Далее, легко видеть, что матрицы $A_0A_j^-$ и $A_0B_j^-$ для $j = k$ и $j = n$ коллинеарны матрице B_0, поэтому имеют место соотношения (2), (3), (8), (9). Справедливость соотношения (1) следует из (31) и того, что

$$A_0A_0^- = [I-(\lambda+\eta)B_0][I-(\lambda+\eta)B_0]^- = I - (\lambda+\eta)[B_0+B_0^-] + (\lambda+\eta)^2 B_0B_0^- = I.$$

Таким образом, показано, что имеют место соотношения (1)–(14), т. е. $F(t) \in \Omega_2^\omega$. □

Теорема 5. *Если $F(t)$ представима в виде*

$$F(t) = [\det B_kI \pm B_kB_n^-]\cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t + [\det B_nI \mp B_kB_n^-]\cos\frac{2\pi n}{\omega}t + B_n \sin\frac{2\pi n}{\omega}t,$$

где $\operatorname{Sp} B_k = \operatorname{Sp} B_n = 0$ и матрицы B_k, B_n удовлетворяют условиям (25)–(27), а k и n — натуральные числа такие, что $n > k$, $n \neq 2k$, $n \neq 3k$, то матрица-функция $F(t)$ принадлежит Ω_2^ω.

Доказательство. Нужно убедиться в справедливости соотношений (1)–(14). Имеем

$$A_k = \det B_k I \pm B_k B_n^-, \quad A_0 = 0, \quad A_n = \det B_n I \mp B_k B_n^-.$$

Отсюда заключаем, что имеют место соотношения (2), (3), (8), (9) и (14). Кроме того,

$$\det A_k = \det[(\det B_k)I \pm B_k B_n^-] = (\det B_k)^2 + \det B_k B_n^- = \det B_k[\det B_k + \det B_n] = \det B_k,$$

что справедливо в силу леммы 1 и условий (26) и (27) теоремы. Аналогично получаем $\det A_n = \det B_n$ и, следовательно, имеют место соотношения (1), (6) и (12).

Далее

$$A_k B_k^- = [\det B_k I \pm B_k B_n^-]B_k^- = (\det B_k)B_k^- \pm B_k B_n^- B_k^- =$$
$$= (\det B_k)B_k^- \pm (B_n B_k^-)^- B_k^- = (\det B_k)B_k^- \pm B_n B_k^- B_k = \det B_k[B_k^- \pm B_n] \in L.$$

Здесь воспользовались очевидными свойствами $(AB)^- = B^- A^-$, $A^- A = \det AI$, а также тем, что по условиям теоремы $\operatorname{Sp} B_k = \operatorname{Sp} B_n = \operatorname{Sp} B_k B_n^- = 0$. Аналогично проверяется, что матрицы $A_k B_n^-$, $A_n B_k^-$, $A_n B_n^-$ имеют след, равный нулю, поэтому справедливы соотношения (5), (7), (11) и (13). Наконец,

$$A_k A_n^- = [\det B_k I \pm B_k B_n^-][\det B_n I \mp B_k B_n^-] =$$
$$= \det B_k \det B_n I \pm \det B_n B_k B_n^- \mp \det B_k [B_k B_n^-]^- - B_k B_n^- [B_k B_n^-]^- = \pm B_k B_n^-,$$

а отсюда следуют соотношения (4) и (10). Таким образом, показано, что $F(t) \in \Omega_2^\omega$, т.к. имеют место соотношения (1)–(14).

В заключение приведем без доказательства один из результатов, относящихся к случаю Б).

Теорема 6. *Если*

$$F(t) = A_0 + A_k \cos\frac{2\pi k}{\omega}t + B_k \sin\frac{2\pi k}{\omega}t + A_n \cos\frac{2\pi n}{\omega}t + B_n \sin\frac{2\pi n}{\omega}t \in TP_2^\omega,$$

причем $n = 3k$, $|A_n| = |B_n| = 0$ *и матрицы* A_n, B_n *линейно независимы, то необходимо* $A_0 = 0$, $A_k = I - A_n$ *и* B_k *— единственное решение системы*

$$\operatorname{Sp} X = -3\operatorname{Sp} B_n, \quad \operatorname{Sp}(XA_n^-) = -\operatorname{Sp} B_n, \quad \operatorname{Sp}(XB_n^-) = \operatorname{Sp} A_n, \quad |X| = 1 + \operatorname{Sp} A_n.$$

Литература

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. *Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения.* – М.: Наука, 1972. – 718 с.
2. Floquet G. *Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques* // Ann. de l'Ecole Normale, 2-e serie. – 1883. – V. 12. – P. 47–88.
3. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* Собрание сочинений. Т. 2. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1956. – 472 с.
4. Исаенко Ю.Я. *Об одном классе линейных периодических дифференциальных уравнений на плоскости, интегрируемых в конечном виде* // Дифференц. и интегральн. уравнения. Тезисы докладов международной научной конференции. – Челябинск, 1999. – С.55.

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила
25.06.2003