ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 9 (496)

УДК 518.17

И.Ю. ЗОЛОТАРЕВ

СТЕПЕНЬ ЭКВИВАРИАНТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ СО ЗНАЧЕНИЕМ В КЛАССАХ ЭКВИВАРИАНТНЫХ БОРДИЗМОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Цель данной статьи — обобщение известных конструкций G-степени [1]–[7] с позиции теории бордизмов и G-расслоений. Здесь предлагается конструкция обобщенной степени отображений, эквивариантных относительно действия компактных групп Ли, со значениями в классах эквивариантно оснащенных бордизмов гладких G-многообразий; отмечены связи с проблемой разрешимости нелинейных уравнений, заданных эквивариантными отображениями. В данной статье используются и методы, развитые в [8]–[10].

1. *Группа оснащенных G-бордизмов многообразия X^{n+k}.* Итак, пусть G — компактная группа Ли, X^{n+k} — гладкое G-многообразие, а M^n — компактное инвариантное подмногообразие в X^{n+k}. Пусть в $N(M^n)$ задано действие группы G так, что расслоение $\xi = (N(M^n), \pi, M^n)$ эквивариантно. И на многообразии M^n задана система $s^k(x) = \{s_1(x), \dots, s_k(x)\}$ непрерывных, невырожденных эквивариантных сечений расслоения ξ, образующих базис в слое $N_x(M^n)$, $x \in M^n$.

Определение 1.1. Пару (M^n, s^k) назовем G-оснащенным G-подмногообразием в X^{n+k}.

На множестве таких пар естественно ввести отношение эквивалентности (G-бордантности).

Определение 1.2. Пару (M_0^n, s_0^k) назовем G-бордантной в X^{n+k} паре (M_1^n, s_1^k), если в G-многообразии $X^{n+k} \times [0,1]$ (с тривиальным действием G на $[0,1]$) существует G-оснащенное подмногообразие (V^{n+1}, s^k), краем которого является $M_0^n \cup M_1^n$ и $s^k \mid \partial V^{n+1} = s_0^k \cup s_1^k$.

2. *Степень эквивариантного отображения многообразия.* Рассмотрим два компактных G-многообразия X^{n+k} и Y^k. Пусть $f : X^{n+k} \to Y^k$, C^1 — гладкое G-отображение, для которого $y_0 \in Y^k$ является регулярным значением и такое, что $f(x) \neq y_0$ при $x \in \partial X^{n+k}$. Обозначим через $G_{Y_0} = H$ стабилизатор точки y_0. Действие G на X^{n+k} индуцирует действие H на $M^n = f^{-1}(y_0)$. Подгруппа H также действует и на пространстве TX^{n+k} при помощи дифференциалов $Dh(x)$, $h \in H$. На TX^{n+k} существует метрика, инвариантная относительно такого действия, т. е. $\langle u_x, v_x\rangle_x = \langle Dh(x)u_x, Dh(x)v_x\rangle_{hx}$ для любого $h \in H$. Следовательно, $h \in H$ переводит $N_x(M^n)$ в $N_{hx}(M^n)$. Зафиксируем теперь в $T_{Y_0}(Y^k)$ базис $\{e_1, \dots, e_k\}$. Отображение $Df(x)$, $x \in M^n$, индуцирует невырожденное отображение пространства $N_x(M^n)$ в $T_{Y_0}(Y^k)$. Таким образом, в каждой точке $x \in M^n$ можно построить невырожденный k-репер (оснащение) $s^k(x) = \{s_1(x), \dots, s_k(x)\}$, $s_j(x) \in N_x(M^n)$, такой, что $Df(x)s_j(x) = e_j$.

На нормальном расслоении $N(M^n)$ к H-подмногообразию $M^n = f^{-1}(y_0)$ можно определить действие группы H так, чтобы расслоение $\xi = (N(M^n), \pi, M^n)$ было эквивариантным, а k-реперное поле $s^k(x) = \{s_1(x), \dots, s_k(x)\}$ было H-оснащением.

Определение 2.1. Назовем H-степенью отображения $f : X^{n+k} \to Y^k$ относительно регулярного значения $y_0 \in Y^k$ и ориентирующего репера $e^k = \{e_1, \dots, e_k\}$ пространства Y^k класс бордизмов $[M^n, s^k]_H \in HB_n(X^{n+k})$, т. е.

$$\deg_H(f, X^{n+k}, y_0, e^k) = [M^n, s^k]_H.$$

Естественно, что для любой замкнутой подгруппы $L \subset H$ определена L-степень $\deg_L(f, X^{n+k}, y_0, e^k) = [M, s^k]_L$. Вообще говоря, если $L \subset K$ — две замкнутые подгруппы в H, то определено естественное отображение соответствующих классов бордизмов $I_{L,K} : KB_n(X^{n+k}) \to LB_n(X^{n+k})$, $I_{L,K}[M^n, s^k]_H = [M, s^k]_K$. При этом отображении K-степень $\deg_K(f, X^{n+k}, y_0, e^k)$ преобразуется в L-степень $\deg_L(f, X^{n+k}, y_0, e^k)$, $I_{L,K} : \deg_K(f, X^{n+k}, y_0) \to \deg_L(f, X^{n+k}, y_0)$.

Введем на множестве таких реперов некоторое отношение эквивариантности и покажем независимость степени от выбора репера из класса эквивалентности.

Определение 2.2. Пусть e_0^k и e_1^k — два базисных репера в $T_{Y_0}(Y^k)$. Назовем их L-изотопными ($L \subset H$), если существует семейство L-отображений $\Theta_t : Y^k \to Y^k$, $t \in [0, 1]$, удовлетворяющее условиям

1) $\Theta_t(y_0) = y_0$ для любого $t \in [0, 1]$ и Θ_t — локальный диффеоморфизм в точке $y_0 \in Y^k$;

2) $D\Theta_0(y_0) = \mathrm{Id}$, а $D\Theta(y_0)_1$ переводит репер e_1^k в e_0^k.

Класс эквивалентности репера e^k обозначим через $[e^k]_L$.

Теорема 2.1. *Два ортонормированных репера e_0^k, e_1^k пространства $T_{Y_0}(Y^k) = R^k$ L-изотопны между собой (т. е $[e_0^k]_L = [e_1^k]_L$) тогда и только тогда, когда связывающая их матрица $A \in SO(k)$ коммутирует с любым элементом подгруппы $L \subset O(k)$ (действующей на касательном пространстве $T_{Y_0}(Y^k) = R^k$ посредством дифференциалов), т. е. принадлежит централизатору $C_{SO(k)}(L)$ подгруппы L в группе $O(k)$.*

Теорема 2.2. *Пусть для некоторой замкнутой подгруппы $L \subset H$ базисные реперы e_0^k и e_1^k L-изотопны (т. е. $[e_0^k]_L = [e_1^k]_L$), тогда*

$$\deg_L(f, X^{n+k}, y_0, e_0^k) = \deg_L(f, X^{n+k}, y_0, e_1^k).$$

В связи с этим будем обозначать степень также символом $\deg_L(f, X^{n+k}, y_0, [e^k]_L)$. Обозначим через $\Phi(L)$ множество классов L-изотопных реперов пространства $R^k = T_{y_0}(Y^k)$. Как и ранее, $\Phi(L)$ совпадает с множеством $SO(k)/C_{SO(k)}(L)$, где $C_{SO(k)}(L)$ — централизатор подгруппы L в группе $SO(k)$, т. е. $C_{SO(k)}(L) = \{A \in SO(k) : Ah = hA$ для любого $h \in L\}$.

Определение 2.3. Назовем L-степенью ($L \subset H = G_{y_0}$) C^1-гладкого, эквивариантного отображения $f : X^{n+k} \to Y^k$ относительно регулярного значения y_0 систему

$$\deg_L(f, X^{n+k}, y_0) = \{\deg_L(f, X^{n+k}, y_0, [e^k]_L),\ [e^k]_L \in \Phi(L)\}.$$

Теорема 2.3. *Пусть f_0 и f_1 — два C^1-гладких G-отображения пространства X^{n+k} в Y^k, для которых y_0 является регулярным значением, а $F(x, t)$ — C^1-гладкая допустимая G-гомотопия между ними. Тогда также выполняется равенство*

$$\deg_L(f_0, X^{n+k}, y_0) = \deg_L(f_1, X^{n+k}, y_0).$$

Как известно, обычная степень $\deg(f, X^{n+k}, y_0)$ отображения $f : X^{n+k} \to Y^{n+k}$ не зависит от выбора регулярного значения $y_0 \in Y^{n+k}$ в том смысле, что если y_0 и y_1 — два различных регулярных значения из одной компоненты связности пространства Y^{n+k}, то $\deg(f, X^{n+k}, y_0) = \deg(f, X^{n+k}, y_1)$. Покажем, что для эквивариантной степени $\deg_L(f, X^{n+k}, y_0)$ с некоторым изменением выполняется аналогичное свойство.

Теорема 2.4. *Пусть y_0 и y_1 — два регулярных значения для $f : X^{n+k} \to Y^k$ из одной компоненты связности пространства $(Y^k)^L = \mathrm{Fix}(L, Y^k) = \{y \in Y^k,\ gy = y$ для любого $g \in L\}$, где $L \subset H = G_{y_0}$, тогда*

$$\deg_L(f, X^{n+k}, y_0) = \deg_L(f, X^{n+k}, y_1).$$

3. *Ориентированная сингулярная степень эквивариантных отображений.* Заметим,что существует гомоморфизм группы $GBn(X)$ в группу $\Omega_n(G)$ ориентированных эквивариантных бордизмов группы G

$$\varphi : GBn(X) \to \Omega_n(G),$$
$$\varphi([M^n, v^k]_H) = [G, M^n] \in \Omega_n(G)$$

и гомоморфизм $\varepsilon : \Omega_n(G) \to \Omega_{n-r}$, $[G, M^n] \to [M^n/G] \in \Omega_{n-r}$, где $\dim G = r$, Ω_{n-r} — обычная группа ориентированных бордизмов Тома.

Рассмотрим некоторое гладкое эквивариантное отображение $f : \overline{X} \subset R^{n+k} \to R^k$ (G действует ортогонально), для которого $0 \in R^k$ является регулярным значением и $f(x) \neq 0$, когда $x \notin \partial X$. Очевидно $f^{-1}(0) = M^n$ является замкнутым G-многообразием размерности n.

Определение 3.1. Элемент $\deg(G, f, X, 0) = \varphi(\deg_G(f, X, 0, e^k)) = [G, M^n] \in \Omega_n(G)$ назовем *ориентированной сингулярной* G-степенью эквивариантного отображения $f : \overline{X} \in R^{n+k} \to R^k$ относительно регулярного значения $0 \in R^k$.

Определение 3.2. Элемент $d(G, f, X, 0) = \varepsilon(\deg(G, f, X, 0)) \in \Omega_{n-r}$ назовем ориентированной G-степенью эквивариантного отображения относительно регулярного значения $0 \in V$.

Теорема 3.1. *Пусть G — конечная группа ранга r, свободно действующая на множестве $\overline{X} \subset R^k$, где X — открытое ограниченное, инвариантное подмножество, а $f : \overline{X} \subset R^k \to R^k$ — допустимое, непрерывное, эквивариантное отображение. Тогда*

$$\deg(f, X, 0) = r d(G, f, X, 0).$$

Итак, пусть теперь $f : X \subset W \to V$ — эквивариантное отображение, V — пространство ортогонального представления группы G, а на $W = V \oplus R^n$ группа Ли G действует тривиально по второй компоненте. Зафиксируем какую-нибудь подгруппу $H \subset G$ и рассмотрим G-отображение $f_H : X_H \subset W^H \to V^H$. Действие группы G индуцирует на X_H свободное действие группы Вейля $W(H)$ подгруппы H, а f_H — $W(H)$-отображение. Определена эквивариантная степень *типа* Ульриха–Кравцевича

$$d(G, f, X, 0) = \{d(W(H), f_H, X_H, 0)\}_{H \subset G}.$$

Теорема 3.2. *В случае, когда $G = S^1$, $H = Z_k$, $W(H) = S^1$ и $f : \overline{X} \subset V \oplus R^1 \to V$, эквивариантная степень $d(S^1, f, X, 0)$ совпадает со степенью Ульриха–Кравцевича S^1-$\deg(f, X, 0)$.*

4. *Приложения эквивариантной степени $d(G, f, X)$ к теории бифуркаций.* Предположим, что $W = R^n$ — пространство ортогонального представления компактной группы Ли G. Пусть M^k — некоторое гладкое k-мерное подмногообразие, вложенное в $W^G \oplus R^k$. Обозначим через $T_x(M^k)$ и $N_x(M^k)$ касательное и нормальное пространство в M^k в точке x, т. е. $W \oplus R^k = T_x(M^k) \oplus N_x(M^k)$.

Символом C_M обозначим класс непрерывных эквивариантных отображений $f : W \oplus R^k \to W$ таких, что

1) f дифференцируема в каждой точке $x \in M^k$ и производная $Df(x)$ непрерывно зависит от $x \in M^k$;
2) $M^k \subset f^{-1}(0)$, т. е. для всех $x \in M^k$ выполняется $f(x) = 0$.

Пусть $f \in C_M$, символом $\Lambda(f)$ обозначим множество M^k-сингулярных точек отображения f, т. е.

$$\Lambda(f) = \{x \in M;\ Df(x)|_{N_X(M^k)} : N_x(M^k) \to W \text{ не изоморфизм}\}.$$

Обозначим $C_M^1 = \{f \in C_M,\ f$ есть класс C^1 на множестве $W \oplus R^k \setminus \Lambda(f)\}$.

Итак, пусть $f \in C_M^1$. Назовем точки из M^k тривиальными решениями уравнения

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Все остальные решения этого уравнения назовем нетривиальными.

Определение 4.1. Назовем точку $x_0 \in M^k$ точкой бифуркации уравнения (1), если в любой окрестности точки $x_0 \in M^k$ существует нетривиальное решение уравнения (1). Множество точек бифуркации обозначим через $B(f) \subset M^k$.

Поскольку из условия, что $x_0 \in M^k$ является точкой бифуркации, немедленно следует, что $x_0 \in \Lambda(f)$ (т. е. $B(f) \subset \Lambda(f)$), то нас будет интересовать проблема бифуркации лишь для $x_0 \in \Lambda(f)$, $f \in C_M^1$. Таким образом, исследуем вопрос: когда от M^k-сингулярной точки $x_0 \in \Lambda(f)$ ответвляется нетривиальное решение уравнения (1)? Сформулируем условие, достаточное для того, чтобы изолированная M^k-сингулярная точка отображения f была точкой бифуркации. Воспользуемся для этого эквивариантной ориентированной степенью.

Итак, пусть $x_0 \in \Lambda(f)$ — изолированная M^k-сингулярная точка отображения f.

Рассмотрим открытую ограниченную окрестность D точки x_0 в M такую, что $\overline{D} \cap \Lambda(f) = \{x_0\}$. Поскольку $\overline{D}$ — компактное подмножество в M^k, то существует достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что ограничение отображения $\psi : N(M^k) \to W \oplus R^n$, $\psi(x, v) = x + v$ на множество $N(\overline{D}, \varepsilon) = \{(x, v) \in N(M^k);\ x \in \overline{D},\ \|v\| \leq \varepsilon\}$, есть эквивариантное вложение. Так как мы можем выбрать ε сколь угодно малым, то можно считать, что $f(x + v) \neq 0$ для любого $x \in \partial D$ и $\|v\| \leq \varepsilon$. Поскольку $\partial D \cap \Lambda(f) = \varnothing$, то все точки x из ∂D не являются M-сингулярными для f. Обозначим $\overline{U} = \psi(N(\overline{D}, \varepsilon))$ и назовем множество $\overline{U}$ *специальной окрестностью* изолированной M-сингулярной точки $x_0 \in \Lambda(f)$.

Пусть $\varphi : \overline{U} \to R$ — инвариантная непрерывная функция такая, что $\varphi(x) < 0$ для $x \in \overline{D}$ и $\varphi(x) > 0$ для всех $x = u + v;\ u \in \overline{D},\ \|v\| = \varepsilon$. Назовем такую функцию *дополнительной функцией*. Определим отображение $f_\varphi : \overline{U} \to W \oplus R$, $f_\varphi(x) = (f(x), \varphi(x))$; $x \in \overline{U}$. Ясно, что $f_\varphi(x) \neq 0$ для всех $x \in \partial U$ и, следовательно, определена эквивариантная степень $d(G, f_\varphi, U)$.

Теорема 4.1. *Эквивариантная степень $d(G, f_\varphi, U)$ не зависит от выбора специальной окрестности U и дополнительной функции $\varphi(x)$. Кроме того, если $d(G, f_\varphi, U) \neq 0$, то x_0 есть точка бифуркации отображения f.*

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Борисовичу Юрию Григорьевичу за помощь в постановке задачи и активную поддержку в работе.

Литература

1. Борисович Ю.Г., Золотарев И.Ю. *К обобщенной теории степени эквивариантных отображений* // Тр. матем. ф-та. Новая сер. 3. – Воронеж, 1998. – С. 4–8.
2. Золотарев И.Ю. *К обобщенной теории степени отображений эквивариантных относительно действия компактной группы Ли $G = S^1$* // Сб. ст. аспирантов и студентов матем. ф-та. – Воронеж, 1999. – С. 51–54.
3. Борисович Ю.Г., Золотарев И.Ю. *К обобщенной теории G-степени для эквивариантных отображений многообразий* // Тр. матем. ф-та. Новая сер. 4. – Воронеж, 1999. – С. 12–17.
4. Борисович Ю.Г., Золотарев И.Ю., Портная Т.В. *О некоторых обобщениях топологических характеристик Л. Кронекера, М.А. Красносельского, Х. Хопфа* // Изв. РАЕН. Сер. ММИУ. – Самара, 2000. – Т. 4. – № 2. – С. 82–96.

5. Кравцевич В., Хуасинг С. *Аналитическое определение эквивариантной степени* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 6. – С. 37–54.
6. Borisovich Yu.G., Zolotarev I.Yu. *Generalized degree of equivariant maps* // Intern. Conference on Different. and Funct. Different. Equat. Abstracts MAI, Steklov Institute, MMS, Weierstrass Institute. – Moscow, Russia, August 11–17, 2002.
7. Borisovich Yu.G., Zolotarev I.Yu., Portnaya T.B. *Глобальный анализ и топологические характеристики нелинейных отображений* // Intern. Conference "Differential Equations and Related Topics" dedicated to the Centenary Anniversary of Ivan G. Petrovskii. XX Joint Session of Petrovskii Seminar and Moscow Math. Soc. Moscow, May 22-27, 2001. Book of Abstracts. – Moscow Univ. Press, 2001. – P. 70–72.
8. Бредон Г. *Введение в теорию компактных групп преобразований.* – М.: Наука, 1980. – 440 с.
9. Коннер П., Флойд Э. *Гладкие периодические отображения.* – М.: Мир, 1969. – 339 с.
10. Понтрягин Л.С. *Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий.* – М.: Наука, 1976. – 176 с.

Воронежский государственный университет

Поступила
14.11.2002