И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 5 (480)

УДК 517.955

*В.И. ЖЕГАЛОВ, А.Н. МИРОНОВ*

# О ЗАДАЧАХ КОШИ ДЛЯ ДВУХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Речь пойдет об уравнении

$$L(u) \equiv u_{xxy} + au_{xx} + bu_{xy} + cu_x + du_y + eu = f \tag{1}$$

и его трехмерном аналоге. Уравнение (1), имеющее приложения, в частности, в биологии ([1], с. 261), исследовалось, например, в работах [2]–[8]. В основном изучалась задача Гурса и близкие к ней. В данной работе в терминах функций Римана строятся формулы решения задачи Коши.

**1.** Будем предполагать, что в рассматриваемой области гладкость коэффициентов определяется включениями $a, \dots, e \in C^2$, $f \in C$. Следуя работе [8], определим функцию Римана $R(x, y, \xi, \eta)$ как решение интегрального уравнения

$$v(x,y) - \int_\eta^y a(x,\beta)v(x,\beta)d\beta - \int_\xi^x [b(\alpha,y) - (x-\alpha)d(\alpha,y)]v(\alpha,y)d\alpha + \\ + \int_\xi^x \int_\eta^y [c(\alpha,\beta) - (x-\alpha)e(\alpha,\beta)]v(\alpha,\beta)d\beta\, d\alpha = 1. \tag{2}$$

Решение (2) существует и единственно ([9], сс. 154, 164).

Справедливо тождество [8]:

$$(uR)_{xxy} \equiv RL(u) + (Mu)_{xy} + (Nu)_{xx} - (Pu)_x - (Qu)_y + [u_yR_x + u(aR)_x]_x, \tag{3}$$
$$M = R_x - bR, \quad N = R_y - aR, \quad P = R_{xy} - (aR)_x - (bR)_y + cR,$$
$$Q = R_{xx} - (bR)_x + dR,$$

где $R$ зависит от $(x, y, \xi, \eta)$, а коэффициенты $a, \dots, d$ — от $(x, y)$. Из (2) следует, что

$$M(x,y,x,y) \equiv N(x,y,x,\eta) \equiv P(x,y,x,\eta) \equiv Q(x,y,\xi,y) \equiv 0, \\ R(x,y,x,y) \equiv 1. \tag{4}$$

Запишем (3) несколько иначе

$$RL(u) \equiv \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}, \tag{5}$$

$$S = \frac{1}{2}(uR)_{xy} - \frac{1}{2}[u(2R_x - bR)]_y + [u(R_y - aR)]_x + u[R_{xy} - (aR)_x - (bR)_y + cR],$$
$$T = \frac{1}{2}(uR)_{xx} - \frac{1}{2}[u(2R_x - bR)]_x + u[R_{xx} - (bR)_x + dR].$$

Пусть $D$ — треугольная область плоскости $(\xi, \eta)$, ограниченная характеристиками $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, и отрезком кривой $\Sigma$: $\eta = \sigma(\xi)$, $\sigma'(\xi) < 0$, класса $C^2$. Для определенности полагаем $y_0=\sigma(0)$, $\sigma(x_0)=0$. Сформулируем задачу Коши для уравнения (1): найти функцию $u\in C^2(D\cup\Sigma)\cap C^{(2,1)}(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) и граничным условиям

$$u\big|_\Sigma=u_0(\xi),\quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_\Sigma=u_1(\xi),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\Big|_\Sigma=u_2(\xi). \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали, $\mathbf{n}=(\sigma',-1)/\Delta$, $\Delta=\sqrt{1+\sigma'^2(x)}$ ([10], с. 254), $u_0\in C^2$, $u_1\in C^1$, $u_2\in C$. Класс $C^{(k,l)}$ означает существование и непрерывность всех производных $\partial^{r+s}/\partial x^r\partial y^s$ $(r=0,\dots,k;\ s=0,\dots,l)$.

Рассмотрим точку $(x,y)$ из $D$. Пусть $y_1=\sigma(x)$, $y=\sigma(x_1)$; $D_{xy}$ и $\Sigma_{xy}$ — части области $D$ и кривой $\Sigma$ соответственно, лежащие между характеристиками $\xi=x$, $\eta=y$. Заменив в (5) переменные $\xi$ на $x$, $\eta$ на $y$, проинтегрируем (5) по $(\xi,\eta)$ по области $D_{xy}$. Использовав формулу Грина ([11], с. 236), получим

$$\iint\limits_{D_{xy}} Rf\,d\xi\,d\eta=\int_{x_1}^{x}T\big|_{\eta=y}d\xi+\int_{y_1}^{y}S\big|_{\xi=x}d\eta+\int\limits_{\Sigma_{xy}}S\,d\eta-T\,d\xi. \tag{7}$$

Учитывая тождества (4), после очевидных преобразований приведем (7) к виду

$$\iint\limits_{D_{xy}} Rf\,d\xi\,d\eta=u_x(x,y)-\frac12(uR)_\xi(x_1,y,x,y)-\frac12(uR)_\xi(x,y_1,x,y)+$$
$$+\frac12[u(2R_\xi-bR)](x_1,y,x,y)+\frac12[u(2R_\xi-bR)](x,y_1,x,y)+\int\limits_{\Sigma_{xy}}S\,d\eta-T\,d\xi. \tag{8}$$

Переписав (8) в виде

$$u_x(x,y)=F(x,y) \tag{9}$$

и проинтегрировав (9) по $x$, получим решение задачи Коши

$$u(x,y)=u(x_1,y)+\int_{x_1}^{x}F(\alpha,y)\,d\alpha. \tag{10}$$

Формула (10) содержит заданные на $\Sigma$ значения $u$, $u_x$, $u_y$, $u_{xx}$, $u_{xy}$. Покажем, что эти значения можно определить из (6). Действительно, из (6) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma'\frac{\partial u}{\partial y}&=u_0',\\ \frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial y}&=u_1,\\ \sigma''\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sigma'\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\sigma'^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=u_0'',\\ \frac{\sigma''\Delta-\sigma'\Delta'}{\Delta^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\Delta'}{\Delta}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sigma'-1}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\sigma'}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=u_1',\\ \frac{\sigma'^2}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{2\sigma'}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=u_2,\end{aligned} \tag{11}$$

где все значения берутся на кривой $\Sigma$. Определитель системы (11)

$$\frac{1}{\Delta^4}\begin{vmatrix} 1 & \sigma' & 0 & 0 & 0 \\ \sigma' & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'' & 1 & 2\sigma' & {\sigma'}^2 \\ \dfrac{\sigma''\Delta-\sigma'\Delta'}{\Delta} & \dfrac{\Delta'}{\Delta} & \sigma' & {\sigma'}^2-1 & -\sigma' \\ 0 & 0 & {\sigma'}^2 & -2\sigma' & 1 \end{vmatrix} = \frac{(1+{\sigma'}^2)^4}{\Delta^4} = (1+{\sigma'}^2)^2 > 0,$$

следовательно, по условиям (6) определяются все требуемые для (10) функции.

**2.** Рассмотрим теперь трехмерный аналог уравнения (1)

$$L(u) \equiv u_{xxyz} + a_{210}u_{xxy} + a_{201}u_{xxz} + a_{111}u_{xyz} + a_{200}u_{xx} + a_{110}u_{xy} + \\ + a_{101}u_{xz} + a_{011}u_{yz} + a_{100}u_x + a_{010}u_y + a_{001}u_z + a_{000}u = f, \quad (12)$$

где $a_{klm} \in C^3$, $f \in C$.

Развиваем методику из [8]. А именно, назовем функцией Римана $R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ решение интегрального уравнения

$$v(x,y,z) - \int_\zeta^z a_{210}(x,y,\gamma)v(x,y,\gamma)d\gamma - \int_\eta^y a_{201}(x,\beta,z)v(x,\beta,z)d\beta - \\ - \int_\xi^x [a_{111}(\alpha,y,z) - (x-\alpha)a_{011}(\alpha,y,z)]v(\alpha,y,z)d\alpha + \int_\eta^y \int_\zeta^z a_{200}(x,\beta,\gamma)v(x,\beta,\gamma)d\gamma\, d\beta + \\ + \int_\xi^x \int_\zeta^z [a_{110}(\alpha,y,\gamma) - (x-\alpha)a_{010}(\alpha,y,\gamma)]v(\alpha,y,\gamma)d\gamma\, d\alpha + \\ + \int_\xi^x \int_\eta^y [a_{101}(\alpha,\beta,z) - (x-\alpha)a_{001}(\alpha,\beta,z)]v(\alpha,\beta,z)d\beta\, d\alpha - \\ - \int_\xi^x \int_\eta^y \int_\zeta^z [a_{100}(\alpha,\beta,\gamma) - (x-\alpha)a_{000}(\alpha,\beta,\gamma)]v(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma\, d\beta\, d\alpha = 1. \quad (13)$$

Решение (13) существует и единственно ([9], сс. 154, 164).

Далее используются обозначения

$$P_1 = R_z - a_{210}R, \quad P_2 = R_y - a_{201}R, \quad P_3 = R_x - a_{111}R,$$

$$Q_1 = R_{yz} - (a_{210}R)_y - (a_{201}R)_z + a_{200}R, \quad Q_2 = R_{xz} - (a_{210}R)_x - (a_{111}R)_z + a_{110}R,$$
$$Q_3 = R_{xy} - (a_{210}R)_x - (a_{111}R)_y + a_{101}R, \quad Q_4 = R_{xx} - (a_{111}R)_x + a_{011}R,$$

$$S_1 = R_{xyz} - (a_{210}R)_{xy} - (a_{201}R)_{xz} - (a_{111}R)_{yz} + (a_{200}R)_x + (a_{110}R)_y + (a_{101}R)_z - a_{110}R,$$
$$S_2 = R_{xxz} - (a_{210}R)_{xx} - (a_{111}R)_{xz} + (a_{110}R)_x + (a_{011}R)_z - a_{010}R,$$
$$S_3 = R_{xxy} - (a_{210}R)_{xx} - (a_{111}R)_{xy} + (a_{101}R)_x + (a_{011}R)_y - a_{001}R.$$

Здесь $R = R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$, а остальные функции зависят от $(x,y,z)$.

Из интегрального уравнения (13) могут быть получены тождества

$$P_1(x,y,\zeta,x,y,z) \equiv P_2(x,\eta,z,x,y,z) \equiv P_3(x,y,z,x,y,z) \equiv \\ \equiv Q_1(x,\eta,\zeta,x,y,z) \equiv Q_2(x,y,\zeta,x,y,z) \equiv Q_3(x,\eta,z,x,y,z) \equiv \\ \equiv Q_4(\xi,y,z,x,y,z) \equiv S_1(x,\eta,\zeta,x,y,z) \equiv S_2(\xi,y,\zeta,x,y,z) \equiv \\ \equiv S_3(\xi,\eta,z,x,y,z) \equiv 0, \quad R(x,y,z,x,y,z) \equiv 1. \quad (14)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости тождества

$$RL(u) \equiv \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z}, \tag{15}$$

$$W_1 = \frac{1}{3}(Ru)_{xyz} - \frac{1}{2}(P_1u)_{xy} - \frac{1}{2}(P_2u)_{xz} + (Q_1u)_x + \frac{1}{2}((Q_2 + P_{1x})u)_y + \frac{1}{2}((Q_3 + P_{2x})u)_z - (S_1 + Q_1)u,$$
$$W_2 = \frac{1}{3}(Ru)_{xxz} - \frac{1}{2}((P_3 + R_x)u)_{xz} - \frac{1}{2}(P_1u)_{xx} + \frac{1}{2}((Q_2 + P_{1x})u)_x + \frac{1}{2}(Q_4u)_z - S_2u,$$
$$W_3 = \frac{1}{3}(Ru)_{xxy} - \frac{1}{2}((P_3 + R_x)u)_{xy} - \frac{1}{2}(P_2u)_{xx} + \frac{1}{2}((Q_3 + P_{2x})u)_x + \frac{1}{2}(Q_4u)_y - S_3u.$$

В дальнейшем используется схема рассуждений статьи [12]. Пусть $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ — поверхность класса $C^3$ в пространстве $(\xi, \eta, \zeta)$. Потребуем, чтобы эта поверхность в каждой своей точке имела касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей. Для определенности можно положить $\zeta'_\xi < 0$, $\zeta'_\eta < 0$.

Проведем через точку $M(x, y, z)$ плоскости $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$. Пусть указанные плоскости пересекают поверхность $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ по кривым $BC$, $CA$ и $AB$ соответственно. Плоскости $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ и поверхность $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ определяют область $D$, граница которой состоит из двумерных многообразий $AMC$, $BCM$, $AMB$ и $ABC$. Ориентацию $D$ считаем положительной (ориентацию в пространстве можно связать с направлением внешней нормали к границе области).

Задача Коши: найти функцию $u \in C^3 \cap C^{(2,1,1)}$, удовлетворяющую уравнению (12) и следующим условиям на поверхности $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$:

$$u\big|_{ABC} = u_0(\xi, \eta), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{ABC} = u_1(\xi, \eta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 \mathbf{n}}\Big|_{ABC} = u_2(\xi, \eta), \quad \frac{\partial^3 u}{\partial^3 \mathbf{n}}\Big|_{ABC} = u_3(\xi, \eta). \tag{16}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$, $u_0 \in C^3$, $u_1 \in C^2$, $u_2 \in C^1$, $u_3 \in C$. Класс $C^{(k,l,m)}$ означает существование и непрерывность всех производных $\partial^{r+s+t}/\partial x^r \partial y^s \partial z^t$ $(r = 0, \dots, k;\ s = 0, \dots, l;\ t = 0, \dots, m)$.

Заменив в (15) переменные $\xi$ на $x$, $\eta$ на $y$, $\zeta$ на $z$, проинтегрируем (15) по $\xi$, $\eta$, $\zeta$ по области $D$. Применяя формулу Гаусса–Остроградского ([11], с. 241), получим

$$\iiint\limits_D Rf\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \iint\limits_{\partial D} W_1\, d\eta \wedge d\zeta + W_2\, d\zeta \wedge d\xi + W_3\, d\xi \wedge d\eta. \tag{17}$$

Здесь знак “$\wedge$” обозначает внешнее умножение дифференциальных форм. Обозначим правую часть (17) через $I$. Заменим интеграл по $\partial D$ суммой интегралов по ее составляющим $ABC$, $AMC$, $BCM$ и $ABM$. При этом учтем, что в соответствии с (14)

$$Q_1(x, \eta, \zeta, x, y, z) \equiv S_1(x, \eta, \zeta, x, y, z) \equiv S_2(\xi, y, \zeta, x, y, z) \equiv S_3(\xi, \eta, z, x, y, z) \equiv 0.$$

Таким образом, получаем

$$I=\iint\limits_{BCM}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta}-\frac{1}{2}(P_1u)_\xi+\frac{1}{2}(Q_2+P_{1\xi})u\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta}-\frac{1}{2}(P_2u)_\xi+\frac{1}{2}(Q_3+P_{2\xi})u\right]\right\}d\eta\wedge d\zeta+$$
$$+\iint\limits_{AMC}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta}-\frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\zeta-\frac{1}{2}(P_1u)_\xi+\frac{1}{2}(Q_2+P_{1\xi})u\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\xi}-\frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\xi+\frac{1}{2}Q_4u\right]\right\}d\zeta\wedge d\xi+$$
$$+\iint\limits_{ABM}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta}-\frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\eta-\frac{1}{2}(P_2u)_\xi+\frac{1}{2}(Q_3+P_{2\xi})u\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{6}(uR)_{\xi\xi}-\frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\xi+\frac{1}{2}Q_4u\right]\right\}d\xi\wedge d\eta+$$
$$+\iint\limits_{ABC}W_1\,d\eta\wedge d\zeta+W_2\,d\zeta\wedge d\xi+W_3\,d\xi\wedge d\eta.$$

По формуле Грина ([11], с. 236) интегралы по плоским областям $AMC$, $BCM$ и $ABM$ сводятся к однократным интегралам по замкнутым контурам

$$I=\int\limits_{BCM}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta}-\frac{1}{2}(P_1u)_\xi+\frac{1}{2}(Q_2+P_{1\xi})u\right]d\zeta-$$
$$-\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta}-\frac{1}{2}(P_2u)_\xi+\frac{1}{2}(Q_3+P_{2\xi})u\right]d\eta+$$
$$+\int\limits_{AMC}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\xi}-\frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\xi+\frac{1}{2}Q_4u\right]d\xi-$$
$$-\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta}-\frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\zeta-\frac{1}{2}(P_1u)_\xi+\frac{1}{2}(Q_2+P_{1\xi})u\right]d\zeta+$$
$$+\int\limits_{ABM}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta}-\frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\eta-\frac{1}{2}(P_2u)_\xi+\frac{1}{2}(Q_3+P_{2\xi})u\right]d\eta-$$
$$-\left[\frac{1}{6}(uR)_{\xi\xi}-\frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\xi+\frac{1}{2}Q_4u\right]d\xi+$$
$$+\iint\limits_{ABC}W_1\,d\eta\wedge d\zeta+W_2\,d\zeta\wedge d\xi+W_3\,d\xi\wedge d\eta.$$

Заменяем теперь каждый криволинейный интеграл суммой интегралов по составляющим его контура. Обозначим сумму этих однократных интегралов через $J$:

$$J=\int\limits_{CM}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta}-\frac{1}{2}(P_1u)_\xi+\frac{1}{2}(Q_2+P_{1\xi})u\right]d\zeta-$$
$$-\int\limits_{MB}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta}-\frac{1}{2}(P_2u)_\xi+\frac{1}{2}(Q_3+P_{2\xi})u\right]d\eta+$$
$$+\int\limits_{BC}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta}-\frac{1}{2}(P_2u)_\xi+\frac{1}{2}(Q_3+P_{2\xi})u\right]d\zeta-$$

$$
-\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta} - \frac{1}{2}(P_1u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_2 + P_{1\xi})u\right]d\eta +
$$

$$
+\int\limits_{AM} \left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\xi} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\xi + \frac{1}{2}Q_4u\right]d\xi -
$$

$$
-\int\limits_{MC} \left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\zeta - \frac{1}{2}(P_1u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_2 + P_{1\xi})u\right]d\zeta +
$$

$$
+\int\limits_{CA} \left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\xi} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\xi + \frac{1}{2}Q_4u\right]d\xi -
$$

$$
-\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\zeta - \frac{1}{2}(P_1u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_2 + P_{1\xi})u\right]d\zeta +
$$

$$
+\int\limits_{BM} \left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\eta - \frac{1}{2}(P_2u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_3 + P_{2\xi})u\right]d\eta -
$$

$$
-\int\limits_{MA} \left[\frac{1}{6}(uR)_{\xi\xi} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\xi + \frac{1}{2}Q_4u\right]d\xi +
$$

$$
+\int\limits_{AB} \left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\eta - \frac{1}{2}(P_2u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_3 + P_{2\xi})u\right]d\eta -
$$

$$
-\left[\frac{1}{6}(uR)_{\xi\xi} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\xi + \frac{1}{2}Q_4u\right]d\xi.
$$

Учитываем следующие тождества из (14):

$$
P_1(x,y,\zeta,x,y,z) \equiv P_2(x,\eta,z,x,y,z) \equiv Q_1(x,\eta,\zeta,x,y,z) \equiv
$$

$$
\equiv Q_2(x,y,\zeta,x,y,z) \equiv Q_3(x,\eta,z,x,y,z) \equiv Q_4(\xi,y,z,x,y,z) \equiv 0.
$$

Получаем

$$
J = \int\limits_{CM} \frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta}d\zeta - \int\limits_{MB} \frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta}d\eta + \int\limits_{BC} \left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta} - \frac{1}{2}(P_2u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_3 + P_{2\xi})u\right]d\zeta -
$$

$$
-\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta} - \frac{1}{2}(P_1u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_2 + P_{1\xi})u\right]d\eta + \int\limits_{AM} \left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\xi} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\xi\right]d\xi -
$$

$$
-\int\limits_{MC} \left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\zeta\right]d\zeta + \int\limits_{CA} \left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\xi} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\xi + \frac{1}{2}Q_4u\right]d\xi -
$$

$$
-\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\zeta - \frac{1}{2}(P_1u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_2 + P_{1\xi})u\right]d\zeta +
$$

$$
+\int\limits_{BM} \left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\eta\right]d\eta - \int\limits_{MA} \left[\frac{1}{6}(uR)_{\xi\xi} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\xi\right]d\xi +
$$

$$
+\int\limits_{AB} \left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\eta - \frac{1}{2}(P_2u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_3 + P_{2\xi})u\right]d\eta -
$$

$$
-\left[\frac{1}{6}(uR)_{\xi\xi} - \frac{1}{4}((P_3 + R_\xi)u)_\xi + \frac{1}{2}Q_4u\right]d\xi.
$$

Вычисляя в полученной формуле для $J$ интегралы по отрезкам прямых, запишем (17) в следующем виде:

$$\iiint\limits_D Rf\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = u_\xi\big|_M - \frac{1}{3}((Ru)_\xi\big|_A + (Ru)_\xi\big|_B + (Ru)_\xi\big|_C) +$$
$$+\frac{1}{2}(P_3+R_\xi)u\big|_A + \frac{1}{4}(P_3+R_\xi)u\big|_B + \frac{1}{4}(P_3+R_\xi)u\big|_C +$$
$$+\int\limits_{BC}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta} - \frac{1}{2}(P_2u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_3+P_{2\xi})u\right]d\zeta -$$
$$-\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta} - \frac{1}{2}(P_1u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_2+P_{1\xi})u\right]d\eta +$$
$$+\int\limits_{CA}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\xi} - \frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\xi + \frac{1}{2}Q_4u\right]d\xi -$$
$$-\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\zeta} - \frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\zeta - \frac{1}{2}(P_1u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_2+P_{1\xi})u\right]d\zeta +$$
$$+\int\limits_{AB}\left[\frac{1}{6}(Ru)_{\xi\eta} - \frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\eta - \frac{1}{2}(P_2u)_\xi + \frac{1}{2}(Q_3+P_{2\xi})u\right]d\eta -$$
$$-\left[\frac{1}{6}(uR)_{\xi\xi} - \frac{1}{4}((P_3+R_\xi)u)_\xi + \frac{1}{2}Q_4u\right]d\xi +$$
$$+\iint\limits_{ABC} W_1\,d\eta\wedge d\zeta + W_2\,d\zeta\wedge d\xi + W_3\,d\xi\wedge d\eta. \quad (18)$$

Запишем (18) в виде

$$u_x(x,y,z) = F(x,y,z), \quad (19)$$

а затем проинтегрируем (19) по $x$. Если точка $A$ имеет координаты $(x_1,y,z)$, то решение задачи Коши принимает вид

$$u(x,y,z) = u(x_1,y,z) + \int_{x_1}^{x} F(\alpha,y,z)d\alpha. \quad (20)$$

Все значения функции $u$ и ее производных, входящие в формулу (19), определяются из условий (16). Это можно показать, рассуждая как в работе [12]. Пусть $\mathbf{n} = (n_1(x,y), n_2(x,y), n_3(x,y))$. Тогда в криволинейных координатах $(\xi,\eta,\mu)$, связанных с поверхностью $\zeta=\zeta(\xi,\eta)$, $u = u(\xi + n_1(\xi,\eta)\mu, \eta + n_2(\xi,\eta)\mu, \zeta(\xi,\eta) + n_3(x,y)\mu)$. Находя на поверхности $\zeta=\zeta(\xi,\eta)$ частные производные функции $u$ по переменным $\xi$, $\eta$, $\mu$, получаем систему для определения частных производных решения $u$ до третьего порядка включительно на поверхности $\zeta=\zeta(\xi,\eta)$. Ввиду громоздкости соответствующие выкладки не приводятся.

Заметим, что (10) и (20) играют роль известной формулы Римана ([13], с. 67, формула (1.169)).

## Литература


1. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* – М.: Высш. школа, 1995. – 301 с.
2. Colton D. *Pseudoparabolic equations in one space variable* // J. Different. equations. – 1972. – V. 12. – № 3. – P. 559–565.
3. Rundell W., Stecher M. *Remarks concerning the support of solutions of pseudoparabolic equation* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 63. – № 1. – P. 77–81.

4. Шхануков М.Х. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 4. – С. 689–699.
5. Шхануков М.Х. *Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка* // ДАН СССР. – 1982. – Т. 265. – № 6. – С. 1327–1330.
6. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547–552.
7. Джохадзе О.М. *Задача типа Дарбу для уравнения третьего порядка с доминирующими младшими членами* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 4. – С. 523–535.
8. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73–76.
9. Мюнтц Г. *Интегральные уравнения.* Т. 1. – Л.–М.: ГТТИ, 1934. – 330 с.
10. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
11. Зорич В.А. *Математический анализ.* Ч. 2. – М.: Наука, 1984. – 640 с.
12. Севастьянов В.А. *Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 69–73.
13. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.

*Казанский государственный университет*
*Елабужский государственный*
*педагогический институт*

*Поступила*
27.02.2001