

ГО ВЭНЬ БИНЬ, А.Н. СКИБА

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О ТОЖДЕСТВАХ РЕШЕТОК ω -ЛОКАЛЬНЫХ И ω -КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Все рассматриваемые нами группы конечны. В дальнейшем символ ω означает некоторое непустое множество простых чисел. Следуя [1], символом $G_{\omega d}$ обозначим наибольшую нормальную в G подгруппу N со свойством $\omega \cap \pi(H/K) \neq \emptyset$ для каждого композиционного фактора H/K из N ($G_{\omega d} = 1$, если $\omega \cap \pi(\text{Soc}(G)) = \emptyset$). Как и в [2], через $C^p(G)$ обозначим пересечение централизаторов всех тех главных факторов группы G , чьи композиционные факторы имеют простой порядок p ($C^p(G) = G$, если в G нет главных факторов с таким свойством). Наконец, в соответствии со стандартной терминологией, через $G_{\mathfrak{S}_\omega}$ обозначим \mathfrak{S}_ω -радикал группы G , т. е. произведение всех таких ее разрешимых нормальных подгрупп, чьи порядки являются ω -группами.

Пусть f — произвольная функция вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}. \tag{1}$$

Следуя [1], [3] соответственно, сопоставим функции f два класса групп

$$LF_\omega(f) = (G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G) \cap \omega)$$

и

$$CF_\omega(f) = (G \mid G/G_{\mathfrak{S}_\omega} \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех таких } p \in \omega,$$

что в G имеется композиционный фактор порядка p).

Если формация $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторой функции вида (1), то \mathfrak{F} называется ω -локальной формацией с ω -локальным спутником f [1]. Если же $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, то \mathfrak{F} называется ω -композиционной формацией с ω -композиционным спутником f [3]. Нетрудно заметить, что класс локальных формаций совпадает с классом \mathbb{P} -локальных формаций (см. подробнее [1]), а класс композиционных формаций совпадает с классом \mathbb{P} -композиционных формаций.

Напомним теперь восходящие к работе [4] понятия кратно ω -локальной и кратно ω -композиционной формаций. Всякая формация считается 0-кратно ω -локальной, а при $n > 0$ формация \mathfrak{F} называется n -кратно ω -локальной [1], если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n - 1)$ -кратно ω -локальными формациями. Аналогично, всякая формация считается 0-кратно ω -композиционной, а при $n > 0$ формация \mathfrak{F} называется n -кратно ω -композиционной [3], если $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$, где все непустые значения функции f являются $(n - 1)$ -кратно ω -композиционными формациями.

Относительно включения \subseteq множество всех n -кратно ω -локальных формаций l_n^ω и множество всех n -кратно ω -композиционных формаций c_n^ω являются полными решетками.

В [5] была установлена модулярность решетки локальных формаций $l = l_1^\mathbb{P}$. Впоследствии этот факт нашел много приложений при исследовании локальных формаций с заданными внутренними ограничениями (см. [6], гл. 4; [7], гл. 4, 5), и он был развит в различных направлениях. В частности, А.Н. Скибой было установлено (см. подробнее [6], § 8), что при любых целых n и

m у решеток $l_n = l_n^{\mathbb{P}}$ и $l_m = l_m^{\mathbb{P}}$ системы тождеств совпадают. Позднее в [8] была доказана модулярность решетки всех ω -локальных формаций l_0^{ω} , а в [1], [3] была установлена модулярность решеток l_n^{ω} и c_n^{ω} при произвольных ω и n .

В данной работе докажем следующую теорему, охватывающую все эти результаты и дающую положительный ответ на вопрос 2 из [1] в случае, когда ω — бесконечное множество.

Теорема. Пусть m и n — целые неотрицательные числа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) всякое тождество решетки всех формаций l_0^{ω} выполняется в каждой из решеток l_n^{ω} , c_m^{ω} ;
- 2) если ω — бесконечное множество, то системы тождеств решеток l_n^{ω} и c_m^{ω} совпадают.

Символом $l_n^{\omega} \text{ form } \mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех n -кратно ω -локальных формаций, которые содержат совокупность групп \mathfrak{X} . В [1] было доказано, что если $\mathfrak{F} = l_n^{\omega} \text{ form } \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$, где

$$f(a) = \begin{cases} l_{n-1}^{\omega} \text{ form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } a \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X}); \\ \emptyset, & \text{если } a \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X}); \\ l_{n-1}^{\omega} \text{ form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{X}), & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Такой спутник f называется [1] минимальным l_{n-1}^{ω} -значным ω -локальным спутником формации \mathfrak{F} .

Лемма 1. Пусть A — монолитическая группа с неабелевым монолитом R , \mathfrak{M} — некоторая полуформация и $A \in l_n^{\omega} \text{ form } \mathfrak{M}$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Проведем индукцию по n . Пусть $n = 0$. Тогда

$$A \in l_0^{\omega} \text{ form } \mathfrak{M} = \text{form } \mathfrak{M}.$$

Пусть $A \notin \mathfrak{M}$. Тогда согласно следствию 1.2.26 из [7] в $\text{form } \mathfrak{M}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, M, N_1, \dots, N_t, M_1, \dots, M_t$ ($t \geq 2$), что выполняются следующие утверждения:

1) $A \simeq H/N$ и $M/N = \text{Soc}(H/N)$; 2) H/N_i — монолитическая \mathfrak{M} -группа с монолитом M_i/N_i , который H -изоморфен M/N .

Понятно, что $C_H(M/N) = N$. Значит, $N_i \subseteq N$. Поэтому $A \simeq H/N \in \mathfrak{M}$. Противоречие. Итак, утверждение леммы при $n = 0$ верно.

Пусть $n > 0$ и при $n - 1$ лемма верна.

Обозначим через f минимальный l_{n-1}^{ω} -значный ω -локальный спутник формации $\mathfrak{F} = l_n^{\omega} \text{ form } \mathfrak{M}$. Если $\omega \cap \pi(R) = \emptyset$, то $A_{\omega d} = 1$ и поэтому по лемме 5 из [1]

$$A \simeq A/A_{\omega d} \in f(\omega') \subseteq l_{n-1}^{\omega} \text{ form } \mathfrak{M}.$$

Следовательно, $A \in \mathfrak{M}$. Пусть $\omega \cap \pi(R) \neq \emptyset$ и $p \in \omega \cap \pi(R)$. Тогда $F_p(A) = 1$ и поэтому по лемме 5 из [1]

$$A \simeq A/F_p(A) \in f(p) \subseteq l_{n-1}^{\omega} \text{ form } \mathfrak{M}.$$

Значит, $A \in \mathfrak{M}$. \square

Лемма 2. Пусть \mathfrak{M} — полуформация и $A \in l_n^{\omega} \text{ form } \mathfrak{M}$. Тогда справедливы следующие условия:

- 1) если $O_p(A) = 1$ и $p \in \omega$, то $A \in l_n^{\omega} \text{ form } \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G/O_p(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$;
- 2) если $A_{\omega d} = 1$, то $A \in l_n^{\omega} \text{ form } \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G/G_{\omega d}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{M}$, то утверждение леммы очевидно. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $A \notin \mathfrak{M}$.

Сначала предположим, что A — монолитическая группа с монолитом R . Пусть $n = 0$. Тогда $A \in l_n^\omega \text{form } \mathfrak{M} = \text{form } \mathfrak{M}$. Значит, согласно следствию 1.2.26 из [7] в формации $\text{form } \mathfrak{M}$ найдется группа H с такими нормальными подгруппами $N, M, N_1, \dots, N_t, M_1, \dots, M_t$ ($t \geq 2$), что выполняются следующие условия: 1) $H/N \simeq A$, $M/N = \text{Soc}(H/N)$; 2) $N_1 \cap \dots \cap N_t = 1$; 3) H/N_i — монолитическая \mathfrak{M} -группа с монолитом M_i/N_i , который H -изоморфен M/N . Значит, из условий 2) и 3) следует, что

$$A \in \text{HR}_0\{H/N_1, \dots, H/N_t\} \subseteq \text{form } \mathfrak{M}_1.$$

Пусть $n > 0$. Предположим сначала, что $O_p(A) = 1$. Если R — неабелева группа, то согласно лемме 1 $A \in \mathfrak{M}$, что противоречит нашему первоначальному соглашению относительно группы A . Значит, R — q -группа, где $q \in \mathbb{P} \setminus \{p\}$. Следовательно, $F_q(A) = O_q(A)$. Поскольку для любой группы G имеет место

$$G/G_{\omega d} \simeq (G/O_p(G))/(G_{\omega d}(G)/O_p(G)) \simeq (G/O_p(G))/(G/O_p(G))_{\omega d},$$

то по лемме 5 из [1] $f(\omega') = h(\omega')$, где f и h — минимальные l_{n-1}^ω -значные ω -локальные спутники формаций $\mathfrak{F} = l_n^\omega \text{form } \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H} = l_n^\omega \text{form } \mathfrak{M}_1$ соответственно. Значит, если $q \notin \omega$, то $A_{\omega d} = 1$ и поэтому

$$A \simeq A/A_{\omega d} \in f(\omega') = h(\omega') \subseteq \mathfrak{H}.$$

Пусть $q \in \omega$. Тогда поскольку для любой группы G имеет место

$$G/F_q(G) \simeq (G/O_p(G))/(F_q(G)/O_p(G)) = (G/O_p(G))/F_q(G/O_p(G)),$$

то по лемме 5 из [1] $f(q) = h(q)$. Значит, $A/O_q(A) \in \mathfrak{H}$ и, следовательно,

$$A/F_r(A) \simeq (A/O_q(A))/(F_r(A)/O_q(A)) = (A/O_q(A))/F_r(A/O_q(A)) \in h(r)$$

для всех $r \in \omega \cap \pi(A)$. Значит, $A \in \mathfrak{H}$. Аналогично доказывается, что $A \in l_n^\omega \text{form } \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = \{G/O_{\omega d}(G) \mid G \in \mathfrak{M}\}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\text{Soc}(A) = N_1 \times \dots \times N_t$, где $t > 1$. Пусть M_i — наибольшая нормальная в A подгруппа, содержащая $N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_t$, но не содержащая N_i , $i = 1, \dots, t$. Тогда согласно лемме 4.1.3 из [7] $A \in \text{R}_0(A/M_1, \dots, A/M_t)$, где A/M_i — монолитическая группа с монолитом $N_i M_i/M_i$. Понятно, что $A/M_i \in l_n^\omega \text{form } \mathfrak{M}$. Значит, согласно уже доказанному $A/M_i \in l_n^\omega \text{form } \mathfrak{M}_1$. Следовательно, $A \in \mathfrak{H}$. \square

Для произвольной совокупности n -кратно ω -локальных формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ положим

$$\vee_n^\omega(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = l_n^\omega \text{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right),$$

в частности,

$$\mathfrak{M} \vee_n^\omega \mathfrak{H} = l_n^\omega \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Функция $f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ называется l_n^ω -значной, если все ее значения принадлежат решетке l_n^ω .

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность l_n^ω -значных функций вида

$$f_i : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}.$$

Тогда через $\vee_n^\omega(f_i \mid i \in I)$ обозначим такую функцию f , что $f(\omega') = l_n^\omega \text{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(\omega'))$, в частности, $(f_1 \vee_n^\omega f_2)(\omega') = l_n^\omega \text{form}(f_1(\omega') \cup f_2(\omega'))$ и $f(p) = l_n^\omega \text{form}(\bigcup_{i \in I} f_i(p))$, в частности, $(f_1 \vee_n^\omega f_2)(p) = l_n^\omega \text{form}(f_1(p) \cup f_2(p))$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(p) \neq \emptyset$. Если же $f_i(p) = \emptyset$ для всех $i \in I$, то полагаем $f(p) = \emptyset$.

Из леммы 5 из [1] следует

Лемма 3. Пусть f_i — минимальный l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F}_i , $i \in I$. Тогда $\vee_{n-1}^\omega(f_i \mid i \in I)$ — минимальный l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee_n^\omega(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.

Если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ и $f(a) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то f называется внутренним спутником формации \mathfrak{F} .

Лемма 4. Для произвольного набора $\{\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i) \mid i \in I\}$ ω -локальных формаций \mathfrak{F}_i , где f_i — некоторый внутренний l_{n-1}^ω -значный спутник \mathfrak{F}_i , справедливо равенство

$$\vee_n^\omega(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF_\omega(\vee_{n-1}^\omega(f_i \mid i \in I)).$$

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор n -кратно ω -локальных формаций и f_i — некоторый внутренний l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F}_i . Пусть $\mathfrak{F} = \vee_n^\omega(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, $\mathfrak{M} = LF_\omega(\vee_{n-1}^\omega(f_i \mid i \in I))$ и h_i — минимальный l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F}_i . Тогда ввиду леммы 3 $h = \vee_{n-1}^\omega(h_i \mid i \in I)$ — минимальный l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F} и, очевидно, $h \leq f = \vee_{n-1}^\omega(f_i \mid i \in I)$. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Предположим, что обратное включение неверно. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$. Обозначим через R монолит группы G . Тогда $R = G^\mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi(R) \cap \omega$.

Предположим, что R — неабелева группа. Тогда $F_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \simeq G/F_p(G) \in (\vee_{n-1}^\omega(f_i \mid i \in I))(p) = l_{n-1}^\omega \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} f_i(p) \right).$$

Значит, согласно лемме 1

$$G \in \bigcup_{i \in I} f_i(p) \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Следовательно, R — p -группа. Тогда $O_p(G) = F_p(G)$. Но $G \in \mathfrak{M} = LF_\omega(\vee_{n-1}^\omega(f_i \mid i \in I))$. Значит, $G/O_p(G) \in l_{n-1}^\omega \text{ form}(\bigcup_{i \in I} f_i(p))$. Так как при этом $O_p(G/O_p(G)) = 1$, то по лемме 2 и лемме 5 из [1]

$$\begin{aligned} G/O_p(G) &\in l_{n-1}^\omega \text{ form}(A/O_p(A) \mid A \in \bigcup_{i \in I} f_i(p)) = \\ &= l_{n-1}^\omega \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} l_{n-1}^\omega \text{ form}(A/O_p(A) \mid A \in f_i(p)) \right) = \\ &= l_{n-1}^\omega \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} h_i(p) \right) = (\vee_{n-1}^\omega(h_i \mid i \in I))(p) = h(p). \end{aligned}$$

Значит, согласно лемме 4 из [1] $G \in \mathfrak{F}$. Полученное противоречие показывает, что $\omega \cap \pi(R) = \emptyset$ и поэтому $G_{\omega d} = 1$. Снова применяя лемму 2 и лемму 5 из [1], имеем

$$\begin{aligned} G \simeq G/G_{\omega d} &\in l_{n-1}^\omega \text{ form}(A/A_{\omega d} \mid A \in \bigcup_{i \in I} f_i(\omega')) = \\ &= l_{n-1}^\omega \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} l_{n-1}^\omega \text{ form}(A/A_{\omega d} \mid A \in f_i(\omega')) \right) = \\ &= l_{n-1}^\omega \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} h_i(\omega') \right) = (\vee_{n-1}^\omega(h_i \mid i \in I))(\omega') = h(\omega'). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. \square

Напомним [7], что совокупность формаций Θ называется полной решеткой формаций, если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и в Θ имеется такая формация \mathfrak{F} , что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой другой формации \mathfrak{M} из Θ . Формации, принадлежащие Θ , называются Θ -формациями. В дальнейшем Θ обозначает некоторую полную решетку формаций и если $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Theta$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — нижняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ . Символом $\mathfrak{M} \vee_\Theta \mathfrak{H}$ обозначается ([7], с. 151) верхняя грань для $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$ в Θ .

Пусть \mathfrak{X} — некоторый непустой класс групп. Полную решетку формаций θ назовем \mathfrak{X} -отделимой, если для любого термина $\omega(x_1, \dots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\theta\}$, любых θ -формаций $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ и любой группы $A \in \mathfrak{X} \cap \omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$ найдутся такие \mathfrak{X} -группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что $A \in \omega(\theta \text{ form } A_1, \dots, \theta \text{ form } A_m)$.

Лемма 5. *Решетка $l_n^\omega \mathfrak{G}$ -отделима.*

Доказательство. Пусть $\omega(x_1, \dots, x_m)$ — терм сигнатуры $\{\cap, \vee_n^\omega\}$, $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ — произвольные формации из l_n^ω и $A \in \omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$. Индукцией по числу r вхождений символов из $\{\cap, \vee_n^\omega\}$ в терм ω покажем, что найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, \dots, m$, что $A \in \omega(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_m)$, где $\mathfrak{M}_i = l_n^\omega \text{ form } A_i$. При $r = 0$ это очевидно. Индукцией по n докажем, что данное утверждение верно при $r = 1$. Пусть $n = 0$, т. е. либо $A \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, либо

$$A \in \mathfrak{F}_1 \vee_0^\omega \mathfrak{F}_2 = l_0^\omega \text{ form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \text{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

В первом случае $A \in \text{form } A \cap \text{form } A$. Во втором случае по лемме 1.2.22 из [7] $A \simeq H/N$, где

$$H \in R_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).$$

Понятно, что $H^{\mathfrak{F}_1} \cap H^{\mathfrak{F}_2} = 1$. Значит,

$$A \in \text{form}\{H/H^{\mathfrak{F}_1}, H/H^{\mathfrak{F}_2}\} = \text{form}(H/H^{\mathfrak{F}_1}) \vee \text{form}(H/H^{\mathfrak{F}_2}) \subseteq \mathfrak{F}_1 \vee_0^\omega \mathfrak{F}_2.$$

Пусть $n > 0$, $\{p_1, \dots, p_t\} = \pi(A)$ и $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_n^\omega \mathfrak{F}_2$. Тогда ввиду теоремы 1.3.13 из [7] и леммы 3

$$A/F_{p_i}(A) \in f_1(p_i) \vee_{n-1}^\omega f_2(p_i), \quad A/A_{\omega d} \in f_1(\omega') \vee_{n-1}^\omega f_2(\omega'),$$

где f_j — минимальный l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F}_j , $j = 1, 2$. По индукции найдутся такие группы $A_{i_1} \in f_1(p_i)$, $A_{i_2} \in f_2(p_i)$, $T_1 \in f_1(\omega')$, $T_2 \in f_2(\omega')$, что

$$\begin{aligned} A/F_{p_i}(A) &\in (l_{n-1}^\omega \text{ form } A_{i_1}) \vee_{n-1}^\omega (l_{n-1}^\omega \text{ form } A_{i_2}), \\ A/A_{\omega d} &\in (l_{n-1}^\omega \text{ form } T_1) \vee_{n-1}^\omega (l_{n-1}^\omega \text{ form } T_2). \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} (l_{n-1}^\omega \text{ form } A_{i_1}) \vee_{n-1}^\omega (l_{n-1}^\omega \text{ form } A_{i_2}) &= l_{n-1}^\omega \text{ form}\{A_{i_1}, A_{i_2}\}, \\ (l_{n-1}^\omega \text{ form } T_1) \vee_{n-1}^\omega (l_{n-1}^\omega \text{ form } T_2) &= l_{n-1}^\omega \text{ form}\{T_1, T_2\}. \end{aligned}$$

Пусть \mathfrak{M}_1 — полуформация, порожденная группой A_{i_1} , \mathfrak{M}_2 — полуформация, порожденная группой A_{i_2} . Понятно, что $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ — полуформация и

$$A/F_{p_i}(A) \in l_{n-1}^\omega \text{ form}\{A_{i_1}, A_{i_2}\} = l_{n-1}^\omega \text{ form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2).$$

Значит, ввиду леммы 2 можно считать, что

$$|O_{p_i}(A_k)| = 1 = |O_{p_i}(B_l)|$$

для всех $k = 1, \dots, t$ и $l = 1, \dots, r$.

Применяя лемму 2 и аналогичные соображения, можем считать, что $(T_i)_{\omega d} = 1$, $i = 1, 2$.

Пусть $D_{i_1} = A_1 \times \dots \times A_t$ и $D_{i_2} = B_1 \times \dots \times B_r$. Тогда

$$|O_{p_i}(D_{i_1})| = 1 = |O_{p_i}(D_{i_2})|.$$

Кроме того, понятно, что

$$A/F_{p_i}(A) \in l_{n-1}^\omega \text{ form}(D_{i_1}, D_{i_2}) \subseteq l_{n-1}^\omega \text{ form}\{A_{i_1}, A_{i_2}\}.$$

Пусть Z_i — группа порядка p_i , $B_{i_1} = Z_i \wr D_{i_1}$, $B_{i_2} = Z_i \wr D_{i_2}$. Ввиду леммы 4 из [1] $B_{i_1} \in \mathfrak{F}_1$, $B_{i_2} \in \mathfrak{F}_2$. Значит,

$$A_1 = B_{1_1} \times B_{2_1} \times \dots \times B_{t_1} \times T_1 \in \mathfrak{F}_1, \quad A_2 = B_{1_2} \times B_{2_2} \times \dots \times B_{t_2} \times T_2 \in \mathfrak{F}_2.$$

Покажем, что

$$A \in \mathfrak{F} = (l_n^\omega \text{ form } A_1) \vee_n^\omega (l_n^\omega \text{ form } A_2).$$

Для этого достаточно установить, что $A/A_{\omega d} \in f(\omega')$ и $A/F_{p_i}(A) \in f(p_i)$, где f — минимальный l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F} . Понятно, что $B_{i_1} \in \mathfrak{F}$. Значит, $B_{i_1}/F_{p_i}(B_{i_1}) \in f(p_i)$. Но, поскольку $O_{p_i}(D_{i_1}) = 1$, то $B_{i_1}/F_{p_i}(B_{i_1}) \simeq D_{i_1}$, т. е. $D_{i_1} \in f(p_i)$. Аналогично убеждаемся, что $D_{i_2} \in f(p_i)$. Следовательно,

$$A/F_{p_i}(A) \in l_{n-1}^\omega \text{ form}\{D_{i_1}, D_{i_2}\} \subseteq f(p_i).$$

Понятно, что $T_1, T_2 \in \mathfrak{F}$. Значит, по лемме 5 из [1]

$$T_i \simeq T_i/(T_i)_{\omega d} \in f(\omega') = l_{n-1}^\omega \text{ form}(G/G_{\omega d} \mid G \in \mathfrak{F}) = f(\omega').$$

Следовательно, $l_{n-1}^\omega \text{ form}\{T_1, T_2\} \subseteq f(\omega')$. Поэтому $A/A_{\omega d} \in f(\omega')$. Этим самым доказано утверждение леммы при $r = 1$.

Пусть теперь терм ω имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee_n^\omega\}$ и для термов с меньшим числом вхождений лемма верна. Пусть ω имеет вид

$$\omega_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \Delta \omega_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee_n^\omega\}$, и

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

Обозначим через \mathfrak{H}_1 формацию $\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a})$, а через \mathfrak{H}_2 — формацию $\omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Тогда найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_2 \in \mathfrak{H}_2$, что $A \in l_n^\omega \text{ form } A_1 \Delta l_n^\omega \text{ form } A_2$. С другой стороны, согласно индуктивному предположению найдутся такие группы $B_1, \dots, B_a, C_1, \dots, C_b$, что

$$B_k \in \mathfrak{F}_{i_k}, C_k \in \mathfrak{F}_{j_k}, A_1 \in \omega_1(l_n^\omega \text{ form } B_1, \dots, l_n^\omega \text{ form } B_a), A_2 \in \omega_2(l_n^\omega \text{ form } C_1, \dots, l_n^\omega \text{ form } C_b).$$

Пусть переменные x_{i_1}, \dots, x_{i_a} не входят в слово ω_2 , а все переменные $x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a}$ в это слово входят. Пусть $D_{i_k} = B_k$, если $k < t+1$, $D_{i_k} = B_k \times C_q$, где q такое, что $x_{i_k} = x_{j_q}$ при всех $k \geq t+1$. Пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a}\}$. Обозначим через \mathfrak{M}_p формацию $l_n^\omega \text{ form } D_{i_p}$, а через \mathfrak{X}_c — формацию

$$l_n^\omega \text{ form } D_{j_c}, \quad p = 1, \dots, a; \quad c = 1, \dots, b.$$

Тогда ясно, что

$$A_1 \in \omega_1(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_a), \quad A_2 \in \omega_2(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_b).$$

Значит, найдутся такие формации $\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_m$, что

$$A \in \omega_1(\mathfrak{H}_{i_1}, \dots, \mathfrak{H}_{i_a}) \Delta \omega_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \dots, \mathfrak{H}_{j_b}) = \omega(\mathfrak{H}_1, \dots, \mathfrak{H}_m),$$

где $\mathfrak{H}_i = l_n^\omega \text{ form } K_i$, $K_i \in \mathfrak{F}_i$. Итак, мы доказали, что решетка $l_n^\omega \mathfrak{G}$ -отделима. \square

Для всякого терма ω сигнатуры $\{\cap, \vee_n^\omega\}$ через $\bar{\omega}$ обозначим терм сигнатуры $\{\cap, \vee_{n-1}^\omega\}$, получаемый из терма ω , заменой каждого вхождения символа \vee_n^ω на символ \vee_{n-1}^ω .

Лемма 6. Пусть $\omega(x_1, \dots, x_m)$ — терм сигнатуры $\{\cap, \vee_n^\omega\}$, f_i — внутренний l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F}_i , $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$\omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) = LF_\omega(\bar{\omega}(f_1, \dots, f_m)).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу r вхождений в терм ω символов из $\{\cap, \vee_n^\omega\}$. Пусть

$$\omega(x_1, \dots, x_m) = \omega_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \Delta \omega_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee_n^\omega\}$,

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}$$

и лемма для термов ω_1, ω_2 выполняется. Тогда

$$\begin{aligned}\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) &= LF_\omega(\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})), \\ \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) &= LF_\omega(\bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})).\end{aligned}$$

Понятно, что оба спутника $\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})$ и $\bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})$ внутренние. Значит,

$$\begin{aligned}\omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) &= \omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) \Delta \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \\ &= LF_\omega(\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a}) \bar{\Delta} \bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})) = LF_\omega(\bar{\omega}(f_1, \dots, f_m)),\end{aligned}$$

где $\bar{\Delta} = \cap$, если $\Delta = \cap$ и $\bar{\Delta} = \vee_{n-1}^\omega$, если $\Delta = \vee_n^\omega$. \square

Лемма 7. Пусть θ — \mathfrak{X} -отделимая полная решетка формаций, M — такая ее подрешетка, которая со всякой своей формацией \mathfrak{F} содержит и все ее однопорожденные θ -подформации вида $\theta \text{ form } A$, где $A \in \mathfrak{X}$. Тогда тождество $\omega_1 = \omega_2$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\theta\}$ истинно в M , если оно выполняется для всех однопорожденных θ -формаций из M .

Доказательство. Пусть x_{i_1}, \dots, x_{i_a} — переменные, входящие в терм ω_1 , x_{j_1}, \dots, x_{j_b} — переменные, входящие в терм ω_2 , и пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b} \in M$. Покажем, что

$$\mathfrak{F} = \omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) \subseteq \mathfrak{M} = \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Не теряя общности, можем считать, что

$$x_{j_1}, \dots, x_{j_t} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\},$$

но

$$\{x_{j_{t+1}}, \dots, x_{j_b}\} \cap \{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} = \emptyset.$$

Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда по условию найдутся такие \mathfrak{X} -группы A_{i_1}, \dots, A_{i_a} , что $A_{i_k} \in \mathfrak{F}_{i_k}$ и

$$A \in \omega_1(\theta \text{ form } A_{i_1}, \dots, \theta \text{ form } A_{i_a}).$$

Пусть

$$\mathfrak{H}_{i_k} = \theta \text{ form } A_{i_k}, \quad \mathfrak{H}_{j_k} = \mathfrak{H}_{i_c},$$

если $x_{j_k} = x_{i_c}$, и пусть для каждого $k > t$ $\mathfrak{H}_{j_k} = \theta \text{ form } B_{j_k}$, где B_{j_k} — некоторая группа из \mathfrak{F}_{j_k} . По условию

$$\omega_1(\mathfrak{H}_{i_1}, \dots, \mathfrak{H}_{i_a}) = \omega_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \dots, \mathfrak{H}_{j_b}).$$

Но $\omega_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \dots, \mathfrak{H}_{j_b}) \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Аналогично доказывается обратное включение. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. \square

Доказательство теоремы. Докажем 1). Зафиксируем некоторое тождество

$$\omega_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) = \omega_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}) \quad (2)$$

сигнатуры $\{\cap, \vee_n^\omega\}$. И пусть

$$\bar{\omega}_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) = \bar{\omega}_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}) \quad (3)$$

— то же самое тождество, но уже в сигнатуре $\{\cap, \vee_{n-1}^\omega\}$.

Предположим, что тождество (3) выполняется в решетке l_{n-1}^ω . Пусть

$$\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}$$

— произвольные n -кратно ω -локальные формации, f_{i_c} — минимальный l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F}_{i_c} , f_{j_d} — минимальный l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации \mathfrak{F}_{j_d} . По лемме 6

$$\begin{aligned}\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) &= LF_\omega(\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})), \\ \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) &= LF_\omega(\bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})).\end{aligned}$$

Для произвольного простого числа $p \in \omega$ формации

$$f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p), f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)$$

принадлежат решетке l_{n-1}^ω . Значит,

$$\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})(p) = \bar{\omega}_1(f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p)) = \bar{\omega}_2(f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)) = \bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})(p).$$

Аналогично,

$$\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})(\omega') = \bar{\omega}_1(f_{i_1}(\omega'), \dots, f_{i_a}(\omega')) = \bar{\omega}_2(f_{j_1}(\omega'), \dots, f_{j_b}(\omega')) = \bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})(\omega').$$

Следовательно,

$$\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Таким образом, тождество (2) выполняется в решетке l_n^ω . Отсюда вытекает утверждение 1).

Докажем 2). Предположим, что тождество (2) выполняется в решетке l_n^ω . Покажем, что тождество (3) выполняется в решетке l_{n-1}^ω . Для этого ввиду леммы 6 достаточно установить, что если

$$\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}$$

— произвольные однопорожжденные $(n-1)$ -кратно ω -локальные формации, то

$$\bar{\omega}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \bar{\omega}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}).$$

Пусть

$$\mathfrak{F}_{i_c} = l_{n-1}^\omega \text{ form } A_{i_c}, \quad \mathfrak{F}_{j_d} = l_{n-1}^\omega \text{ form } A_{j_d}, \quad c = 1, \dots, a; \quad d = 1, \dots, b.$$

Выберем такое простое число $p \in \omega$, что $p \notin \pi(A_{i_1}, \dots, A_{i_a}, A_{j_1}, \dots, A_{j_b})$, и пусть $B_{i_c} = P \wr A_{i_c}$, $B_{j_d} = P \wr A_{j_d}$ — сплетения, где P — группа порядка p . Формации

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{i_1} &= l_n^\omega \text{ form } B_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_a} = l_n^\omega \text{ form } B_{i_a}, \\ \mathfrak{M}_{j_1} &= l_n^\omega \text{ form } B_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_b} = l_n^\omega \text{ form } B_{j_b} \end{aligned}$$

принадлежат решетке l_n^ω . Значит,

$$\mathfrak{F} = \omega_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_a}) = \mathfrak{M} = \omega_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_b}).$$

Пусть f_{i_c} — минимальный l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации \mathfrak{M}_{i_c} , а f_{j_d} — минимальный l_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник формации \mathfrak{M}_{j_d} . Тогда ввиду леммы 6

$$\begin{aligned} \omega_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_a}) &= LF_\omega(\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})), \\ \omega_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_b}) &= LF_\omega(\bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})). \end{aligned}$$

Пусть f и m — минимальные l_{n-1}^ω -значные ω -локальные спутники формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{M} соответственно. Нетрудно убедиться, что

$$\bar{\omega}_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})(p) = f(p)$$

и

$$\bar{\omega}_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})(p) = m(p).$$

Значит,

$$\bar{\omega}_1(f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p)) = \bar{\omega}_2(f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)).$$

Но ввиду леммы 5 из [1]

$$f_{i_c}(p) = \mathfrak{F}_{i_c}, \quad f_{j_d}(p) = \mathfrak{F}_{j_d}, \quad c = 1, \dots, a; \quad d = 1, \dots, b.$$

Следовательно,

$$\bar{\omega}_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \bar{\omega}_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}),$$

т. е. тождество (3) истинно в решетке l_{n-1}^ω . Таким образом, каждое тождество решетки l_n^ω выполняется в решетке всех формаций l_0^ω . Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что

каждое тождество решетки c_m^ω выполняется в решетке всех формаций c_0^ω . Применяя теперь 1), получаем 2). \square

Литература

1. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп* // Матем. тр. – 1999. – Т. 2. – № 1. – С. 1–34.
2. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. – Walter de Gruyter: Berlin, New York, 1992. – 889 p.
3. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. *Частично композиционные формации конечных групп* // Докл. АН Беларуси. – 1999. – Т. 43. – № 4. – С. 5–8.
4. Скиба А.Н. *Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины* // Вопр. алгебры. – Минск, 1987. – Вып. 3. – С. 21–31.
5. Скиба А.Н. *О локальных формациях длины 5* // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Минск, 1986. – С. 135–149.
6. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. *Формации алгебраических систем*. – М.: Наука, 1989. – 254 с.
7. Скиба А.Н. *Алгебра формаций*. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 240 с.
8. Ballester-Bolinchés A., Shemetkov L.A. *On lattices of p -local formations of finite groups* // Math. Nachr. – 1997. – V. 186. – P. 57–65.

*Сюйчжоуский университет
(Китайская народная республика)*

*Гомельский государственный
университет (Беларусь)*

*Поступила
25.08.2000*