ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

УДК 530.12

Р.Ф. БИЛЯЛОВ, Б.С. НИКИТИН

СПИНОРЫ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ РЕПЕРАХ. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ СПИНОРОВ

Введение

В наиболее общей математической форме спиноры были введены Э. Картаном в 1913 г. [1], а затем в 1928 г. переоткрыты Ван дер Варденом [2] в связи с физическими исследованиями Дирака. Спиноры дают линейное представление группы вращений пространства n измерений, причем каждый спинор определен при помощи 2^ν составляющих ($n = 2\nu + 1$ или 2ν). Спиноры четырехмерного пространства входят в знаменитое уравнение Дирака для электрона, причем четыре волновых функции являются ни чем иным, как составляющими спинора.

Теория спиноров в римановом пространстве-времени общей теории относительности была развита в работах [3]–[5]. Симметрический тензор энергии-импульса для спинорных полей с произвольными функциями Лагранжа был получен Л. Розенфельдом в 1940 г. [6]. В работе Розенфельда рассуждения при применении теоремы Нётер к построению законов сохранения не носят ковариантный характер, ковариантная запись законов сохранения достигается с помощью остроумных преобразований. Ковариантное построение симметрического тензора энергии-импульса для спинорных полей получено в [7] путем применения производной Ли спиноров, предложенной И. Косман [8] и обоснованной с теоретико-групповой точки зрения в [9]. Теоретико-групповое обоснование производной Ли спиноров требует рассмотрения спиноров в произвольных неортогональных реперах. Поэтому возникает проблема построения спинорного анализа в произвольных реперах, в первую очередь проблема построения ковариантной производной и производной Ли в произвольных реперах.

1. Группа Spin(4) [10]

Рассмотрим пространство-время Минковского, отнесенное к некоторой ортогональной декартовой системе координат, и обозначим через $\eta_{\alpha\beta}$ ($\eta_{\alpha\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$; $\eta_{00} = 1$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1$) его метрический тензор. Здесь и далее все индексы, кроме заглавных латинских, принимают значения 0, 1, 2, 3; заглавные латинские — 1, 2, 3, 4. Введем систему четырех 4×4 матриц Дирака γ_α с комплексными элементами $\gamma_\alpha = ({\gamma_\alpha}^A{}_B)$, ($\gamma^\alpha = \eta^{\alpha\beta}\gamma_\beta$), удовлетворяющих соотношению

$$\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_\alpha = 2\eta_{\alpha\beta}I,$$

где I — единичная 4×4 матрица. Матрицы Дирака определяются с точностью до выбора базиса в 4-мерном комплексном пространстве и в теоретической физике их обычно выбирают в виде

(представление Дирака)

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Матрицы I, γ_α, $\gamma_\alpha\gamma_\beta$, $\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma$, $\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta$ $(\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta)$ линейно независимы; в их линейной оболочке над полем вещественных чисел совокупность неособенных матриц образует группу Ли Γ относительно обычного умножения матриц. Подмножество $G \subset \Gamma$, порожденное матрицами Λ с $\det \Lambda = 1$, для которых линейная оболочка M матриц γ_α с вещественными коэффициентами остается инвариантной при преобразовании $\Lambda M \Lambda^{-1} = M$, тоже представляет группу Ли, она называется группой $\mathrm{Spin}(4)$. Если положить $\Lambda\gamma_\alpha\Lambda^{-1} = A^\beta_\alpha\gamma_\beta$, то матрица $A = (A^\beta_\alpha)$ представляет преобразование Лоренца в $L(4)$. Группы $L(4)$ и $\mathrm{Spin}(4)$ локально изоморфны, группа $\mathrm{Spin}(4)$ гомоморфна группе $L(4)$, ядро гомоморфизма состоит из матриц $\pm I$, в итоге группа $\mathrm{Spin}(4)$ дважды накрывает группу $L(4)$. Если преобразование Лоренца L из связной компоненты единицы имеет вид $L = \exp(K)$, $K - \eta$ — кососимметрическая матрица: $\eta K = -K^T\eta$, то соответствующее преобразование Λ из $\mathrm{Spin}(4)$ имеет вид $\Lambda = \pm\exp(\gamma_\alpha\gamma^\beta K^\alpha_\beta)$. При выборе матриц Дирака в виде (1) для временного и пространственного отражений в пространстве Минковского соответствующие преобразования соответственно имеют вид $\eta(T)\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ и $\eta(P)\gamma^0$, где $\eta^2(T) = \pm 1$, $\eta^2(P) = \pm 1$.

2. Римановы и спинорные многообразия

Пусть V есть пространственно-временное риманово многообразие с метрикой $ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$ сигнатуры $(+,-,-,-)$ в локальных координатах x^α. Через $E(V)$ обозначим главное расслоение линейных реперов многообразия V, а через $O(V)$ — главное расслоение ортонормированных реперов с группой $L(4)$ в качестве структурной группы. Предполагаем, что V ориентируемо, т.е. $O(V)$ допускает сужение структурной группы $L(4)$ до $L_0(4)$-связной компоненты единицы в $L(4)$. Репер в точке x на V будем обозначать $e(x)$, он задается четырьмя линейно независимыми векторными полями, имеющими в локальных координатах вид ${e_a}^\alpha(x)$, где α — координатный индекс, a — номер вектора репера. Наряду с репером $({e_a}^\alpha)$ рассматриваем и корепер ${e^a}_\alpha(x)$, которому соответствует базис $\Theta^a = {e^a}_\alpha(x)dx^\alpha$ в пространстве 1-форм. Если репер $e = ({e_a}^\alpha)$ ортонормированный, то ${e_a}^\alpha {e_b}^\beta g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{ab}$, где $\eta_{ab} = (1,-1,-1,-1)$. Локальные координаты в $E(V)$ можно построить следующим образом. Репер $({e_a}^\alpha)$ называется натуральным, если линейные операторы ${e_a}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ имеют вид ${e_a}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^a}$, т.е. ${e_a}^\alpha = \delta^\alpha_a$. Для произвольного репера $e(x)$ получим ${e(x)_a}^\alpha = \delta^\alpha_b A^b_a$, и локальные координаты репера $e(x)$ будут иметь вид (x, A), где $A = (A^b_a)$. Для натурального репера будем использовать обозначение ∂x. Если ∂y — натуральный репер для карты с координатами y^α, то $\partial y = \frac{\partial y}{\partial x}\partial x$, где $\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$ — якобиева матрица. Если в новой карте "отсчет" реперов начинать снова с натурального, то в области пересечения двух карт с локальными координатами x и y в координатах y имеем $e(x) \to (y(x), A(y(x)))$, т.е. функции перехода ψ_{yx} представляют собой постоянные единичные 4×4 матрицы I. В случае $O(V)$ тоже можно подобрать атлас, для которого функции перехода равны единичной матрице, если в $O(V)$ существует сечение $l_o : V \to O(V)$, $x \to l_o(x)$ такое, что на пересечении карт имеем $l_o(y) \to \frac{\partial y}{\partial x} l_o(x)$. К каждому ортонормированному реперу отнесем также матрицы Дирака, внешние индексы которых уже будем обозначать строчными буквами латинского алфавита.

Наряду с главным расслоением $O(V)$ ортонормированных реперов можно ввести главное расслоение $S(V)$ спинорных реперов со структурной группой $\mathrm{Spin}(4)$, которое можно получить из $O(V)$ путем расширения $O(V)$. Поэтому расслоение спиноров можно считать ассоциированным с расслоением $O(V)$ ортогональных реперов или с расслоением $S(V)$ спинорных реперов.

3. Ковариантная производная спиноров

Ковариантная производная от спинора впервые получена В.А. Фоком в [3]. Для получения ковариантной производной спинора использовался тот факт, что билинейные комбинации спиноров $A_i = \overline{\psi}\alpha_i\psi$, где $\alpha_0 = I$, $\alpha_i = \gamma^5\gamma^i\gamma^0$ $(i = 1, 2, 3)$, $\alpha_4 = -i\gamma^2$, $\alpha_5 = \gamma^0\gamma^2$, образуют один четырехвектор $(i = 0, 1, 2, 3)$ и два инварианта $i = 4, 5$, для которых закон параллельного переноса при бесконечно малых преобразованиях известен. Предполагая, что приращение спинора при таком преобразовании пропорционально исходному спинору с некоторой матрицей пропорциональности и дифференциалу смещения, т. е. $\delta\psi = \sum e_l C_l ds_l \psi$, где C_l — матрица пропорциональности, ds_l — ортогональные компоненты смещения (и неявно предполагая выполнения правила Лейбница), сравнивая законы преобразования A_i с законом преобразования вектора и инварианта, получим систему матричных уравнений на матрицу пропорциональности. ${C^+}_l\alpha_i + \alpha_i C_l = \sum e_k \gamma_{ikl}\alpha_k$ $(i = 0–3)$ и ${C^+}_l\alpha_i + \alpha_i C_l = 0$ (для $i = 4, 5$). Общее решение этих уравнений содержит наряду с хорошо известной связностью Фока аддитивный член, пропорциональный единичной матрице, который интерпретируется Фоком как потенциал электромагнитного поля. Этот произвол в определении ковариантной производной спинора устраняется путем наложения следующего требования: ковариантная производная метрического спинора в пространстве спиноров должна быть равна нулю [11].

Изящный способ построения ковариантной производной спиноров предложен А. Лихнеровичем [10]. На римановом многообразии существует связность, определяемая символами Кристоффеля от метрического тензора и называемая римановой связностью. Связность на расслоении линейных реперов называется линейной связностью, а на расслоении ортогональных реперов — лоренцевой. Лоренцева связность тогда и только тогда является римановой связностью, когда ассоциированная с ней линейная связность обладает нулевым кручением и 1-форма $\omega = ({\omega^a}_b)$ при заданном сечении $e_o(x)$ на главном расслоении $O(V)$ имеет вид

$${\omega^a}_b(\xi) = -{c^a}_{bc}\xi^c,$$

где c_{abc} — коэффициенты вращения Риччи, ξ^α — векторное поле. А. Лихнерович этой форме связности на $O(V)$ ставит в соответствие спинорную связность σ на $S(V)$ по закону $\sigma(V_z) = p'^{-1}\omega(pV_z)$, где $p(V_z)$ — проекция на $O(V)$ касательного вектора V_z к z на $S(V)$ и p' — изоморфизм алгебры Ли группы $\mathrm{Spin}(4)$ на алгебру Ли $L(4)$. После введения некоторого локального сечения в $S(V)$ форма связности σ оказывается равной

$$\sigma = \frac{1}{4}{\omega^a}_b\gamma_a\gamma^b.$$

Если M — некоторое 4-мерное комплексное векторное пространство, на котором действует $\mathrm{Spin}(4)$, то контравариантный 1-спинор ψ в точке $x \in V$ определяется как отображение $z \to \psi(z)$ из $\pi^{-1}(x)$ в M такое, что

$$\psi(z\Lambda^{-1}) = \Lambda\psi(z) \quad (\Lambda \in \mathrm{Spin}(4)).$$

Ковариантная производная спинора $\xi^\alpha\nabla_\alpha\psi$ в направлении вектора ξ^α определяется формулой

$$\xi^\alpha\nabla_\alpha\psi = \xi^\alpha\partial_\alpha\psi + \frac{1}{4}{\omega^a}_b(\xi)\gamma_a\gamma^b\psi. \tag{2}$$

В дальнейшем, следуя [12], будем рассматривать спиноры как элементы спинорного расслоения, ассоциированного с главным расслоением $O(V)$ ортогональных реперов. Ассоциированное расслоение со стандартным слоем M, на котором группа $\mathrm{Spin}(4)$, как представление группы $L(4)$, действует правосторонним образом

$$L \in L(4), \quad L: \ M \to M, \quad \psi \to \Lambda^{-1}(L)\psi = \psi \cdot L,$$

определяется как фактор-пространство тензорного произведения $O(V) \times M$ относительно действия группы $L(4)$. Пусть для каждого $x \in V$ представитель класса эквивалентности выбран в виде $(x, L(x), \psi)$, где $L(x)$ задает некоторое поле реперов, а $\psi \in M$. Если ψ пробегает M, то $(x, L(x), \psi)$ будет определять слой M_x в точке x. Каждый элемент $z = (x, L_1) \in O(V)$ порождает отображение

$$M \to M_x, \quad \psi \to z \cdot \psi = (x, L(x), \psi \cdot ({L_1}^{-1}L(x))).$$

Кривая

$$t \to (x(t), L(x(t))(1 - t\omega(\xi)) \cdot \psi(x) = (x, L(x(t), \psi \cdot (1 + t\omega(\xi))) = \Big(x, L(x(t)), \Big(1 - \frac{t}{4}\omega^a{}_b(\xi)\gamma_a\gamma^b\Big)\Big)\psi$$

представляет собой горизонтальный путь в ассоциированном расслоении и определяет параллельный перенос $\psi(x)$ из точки x в точку $x(t)$. Поэтому ковариантная производная $\nabla_\xi\psi$ в направлении вектора ξ есть

$$\nabla_\xi\psi = \lim_{t\to 0}\frac{\psi(x(t)) - \psi(x)\cdot(1 + t\omega(\xi))}{t} = \xi^\alpha\partial_\alpha\psi + \frac{1}{4}\omega^a{}_b(\xi)\gamma_a\gamma^b\psi.$$

Мы приходим к тому же результату (2).

4. Производная Ли спинора

Производную Ли спинорных полей будем строить по аналогии с производными Ли векторных полей ([12], с. 36). С помощью бесконечно малого преобразования координат $x \to x' = x + t\xi$ векторному полю $A^\alpha(x - t\xi)$ в точке $x - t\xi$ можно сопоставить увлеченное векторное поле в точке x по правилу $\widetilde{A}^\alpha(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}A^\beta(x - t\xi)$. Производная Ли векторного поля A^α вдоль векторного поля $X = \xi^\alpha\partial_\alpha$ определяется формулой

$$L_X A^\alpha = \lim_{t\to 0}(A^\alpha(x) - \widetilde{A}^\alpha(x))/t = [X, A]^\alpha,$$

где $A = A^\alpha\partial_\alpha$. При эквивалентном определении производной Ли векторного поля на языке реперов реперу $e(x - t\xi)$ в точке $x - t\xi$ нужно сопоставить увлеченный репер в точке x

$$\widetilde{e}(x) = (\widetilde{e}_a{}^\alpha), \quad \widetilde{e}_a{}^\alpha = e_a{}^\beta(x - t\xi)\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = (\delta^b_a + tK_a{}^b + \cdot)e_b{}^\alpha(x), \quad K_a{}^b = -e^b{}_\alpha L_X e_a{}^\alpha.$$

В матричных обозначениях $\widetilde{e} = e(1 + tK + \cdot)$. Нужно считать, что при переходе от $e(x - t\xi)$ к $\widetilde{e}(x)$ реперные компоненты не изменяются, увлеченные значения $\widetilde{A}^a(x)$ получаются с помощью преобразования $(1 + tK + \cdot)$ при переходе от $\widetilde{e}(x)$ к $e(x)$

$$\widetilde{A}^a(x) = A^b(x - t\xi)(\delta^a_b + tK_b{}^a + \cdot).$$

Если положить

$$L_x A^a = \lim_{t\to 0}(A^a(x) - \widetilde{A}^a(x))/t,$$

то получим

$$L_X A^a = \xi^\alpha\partial_\alpha A^a - K_b{}^a A^b = X(A^a) - K_b{}^a A^b = e^a{}_\alpha L_X A^\alpha. \qquad (3)$$

Следует заметить, что при таком подходе к определению производных Ли вектора производные Ли векторов репера оказываются равными нулю. Векторы репера $e_a{}^\alpha$ характеризуются двумя индексами различной природы, каждому из которых нужно сопоставлять соответствующие операции производной Ли, а их суммарное действие приводит в итоге к нулевому значению. Если $e(x)$ — ортрепер, то соответствующее преобразование $(1+tK+\cdot)$ в общем случае произвольного вектора ξ^α не является преобразованием Лоренца, поэтому, чтобы получить производную Ли спинора, И. Косман [8] использует преобразование $K_A = (K - K^*)/2$, где K^* — η-сопряженное преобразование к K. Матрица K в (3) для случая спиноров заменяется на $-\frac{1}{4}K_{Ab}{}^a\gamma_a\gamma^b$. Тогда для производной Ли спинора получается выражение

$$L_X\psi = X(\psi) - \frac{1}{4}K_{Ab}{}^a\gamma_a\gamma^b\psi. \tag{4}$$

При таком определении производной Ли спиноров невозможно проводить последовательно строгие рассуждения по применению теоремы Нётер к выводу законов сохранения для спинорных полей. Нужно уметь преобразовывать спиноры при нелоренцевых преобразованиях репера или, что то же самое, уметь рассматривать спиноры в произвольных, неортонормированных реперах.

5. Спиноры в произвольных реперах

Для того чтобы иметь возможность рассматривать спиноры в произвольных реперах, необходимо задавать закон преобразования спиноров при переходе от одного репера к другому с помощью произвольного линейного преобразования A, т. е. необходимо представление группы Лоренца $L(4)$ в пространстве спиноров расширить до представления полной линейной группы $GL(4)$. Для этого воспользуемся полярным разложением в пространстве Минковского [9]: всякое неособенное линейное преобразование A в пространстве Минковского единственным образом представимо в виде произведения симметрического преобразования S ($S^T\eta = \eta S$) и преобразования Лоренца L или в виде произведения симметрических преобразований T и S и преобразования Лоренца L. Преобразование S имеет то же самое корневое подпространство, что и преобразование $\eta^{-1}A^T\eta A$, собственные значения преобразования S положительны или имеют положительную вещественную часть. Матрица преобразования T в каноническом базисе преобразования $\eta^{-1}A^T\eta A$ имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $e = (e_a{}^\alpha)$ — произвольный репер в пространстве Минковского, то $g_{ab} = e_a{}^\alpha e_b{}^\beta\eta_{\alpha\beta}$ — реперные компоненты метрического тензора. Если репер e ортонормированный, то в этом случае будем применять для g_{ab} обозначение η_{ab}.

Для каждого репера e в пространстве Минковского, характеризуемого метрическим тензором, существует единственное преобразование P, которое есть или симметрическое преобразование или произведение симметрических преобразований T и S и которое удовлетворяет условию $P^TgP = \eta$.

Для того чтобы расширить представление группы Лоренца $L(4)$ до представления $GL(4)$, следуя [9], спинор ψ (пусть для определенности это контравариантный спинор типа $(1,0)$), приписанный к реперу e, будем рассматривать вместе с преобразованием P, которое метрический тензор g, приписанный к тому же реперу, переводит в η : $P^TgP = \eta$. Таким образом, спинор ψ, отнесенный к реперу e, будет характеризоваться индексом P : ψ_P, что будем обозначать с помощью пары (ψ, P). Если теперь преобразование A переводит репер $e' = (e'_a{}^\alpha)$ в репер $e = (e_a{}^\alpha)$: $e = e'A$, $e_a{}^\alpha = e'_b{}^\alpha A_a{}^b$, то действие преобразования, соответствующего линейному преобразованию A, на пару (P,ψ), обозначаемое как $A \cdot (P,\psi)$, определено следующим образом:

$$A \cdot (P,\psi) = (P',\psi'),$$

где преобразование P' приписано к реперу e', $\psi' = \Lambda(L)\psi$, $L = P'^{-1}AP$, а $\Lambda(L)$ — спин-преобразование, соответствующее преобразованию Лоренца L.

Мы получили представление полной линейной группы $GL(4)$ в пространстве пар (P, ψ). Чтобы убедиться в этом, нужно показать, что при рассмотрении перехода $e' \to e'' \cdot B$ выполняется соотношение

$$B \cdot (A \cdot (P, \psi)) = (BA) \cdot (P, \psi). \tag{5}$$

Положим

$$B \cdot (P', \psi') = (P'', \psi''),$$

где, по определению, P'' соответствует реперу e'', а $\psi'' = \Lambda(L')\psi'$ при $L' = P''^{-1}BP$. Имеем

$$e = e''(BA),$$

$$\psi'' = \Lambda(L')\psi' = \Lambda(L')\Lambda(L) = \Lambda(L'L)\psi = \Lambda(P''^{-1}BP'^{-1}P'AP)\psi = \Lambda(P''^{-1}(BA)P)\psi,$$

что означает (5). Если ограничиться рассмотрением только ортонормированных реперов e, e', то $P = P' = 1$ (1 — тождественное преобразование в пространстве Минковского), $A = L$, т. е. A есть преобразование Лоренца, и мы получаем обычное представление группы Лоренца в пространстве спиноров

$$A \cdot (1, \psi) = (1, \Lambda(A)\psi).$$

Закон преобразования сопряженных (ковариантных) спиноров при преобразовании $e' \to e = e'A$ будет иметь вид

$$\overline{\psi}' = \overline{\psi}\Lambda^{-1}(L).$$

Каждому реперу e приписываются и матрицы γ^a (их снова назовем матрицами Дирака), преобразующиеся по закону

$$\gamma'^a = A_b{}^a\Lambda(L)\gamma^b\Lambda^{-1}(L)$$

и удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2g^{ab} \cdot 1.$$

Величины $\overline{\psi}\gamma^a\psi$ при преобразованиях реперов преобразуются по векторному закону

$$\overline{\psi}'\gamma'^a\psi' = A_b{}^a\overline{\psi}\gamma^b\psi.$$

Но мы к каждому реперу будем приписывать обычные матрицы Дирака (1), т. к. в дальнейшем матрицы Дирака используются только при рассмотрении таких спин-преобразований, в которых матрицы Дирака считаются обычными.

6. Ковариантная производная спиноров в произвольных реперах

Пусть $E(V)$ — главное расслоение линейных реперов со связностью ω, ассоциированной с римановой связностью на $O(V)$ и соответствующей локальному сечению $z(x) = (x, A(x))$, $x \in V$, $A(x) \in GL(4)$. Если $x(t) = x + t\xi$ — путь в V, порожденный векторным полем ξ^α, то соответствующий горизонтальный путь для малых значений t будет представлять собой кривую $t \to (x(t), A(x(t)) \cdot (1 - t\omega(\xi)))$. Присоединенное расслоение со стандартным слоем F, на котором $GL(4)$ действует правосторонним образом:

$$A \in GL(4), \quad A : F \to F, \quad \Psi \to \Psi \cdot A,$$

определяется как фактор-пространство тензорного произведения относительно действия группы $GL(4)$. Пусть для каждого $x \in V$ представитель класса эквивалентности выбран в виде

$(x, A(x), \Psi)$, где $A(x)$ задает некоторое поле реперов, $\Psi \in F$. Если Ψ пробегает F, то $\{(x, A(x), \Psi)\}$ будет представлять собой слой F_x в точке x. Каждый элемент $z = (x, B)$ порождает отображение

$$F \to F_x, \quad \Psi \to z \cdot \Psi = (x, A(x), \Psi \cdot (B^{-1}A(x))).$$

Кривая

$$t \to (x(t), A(x(t))(1 - t\omega(\xi))).\Psi(x) = (x(t), A(x(t)), \Psi(x) \cdot (1 + t\omega(t)))$$

является горизонтальным путем в присоединенном расслоении и определяет параллельный перенос $\Psi(x)$ из точки x в точку $x(t)$. Поэтому ковариантная производная $\nabla_\xi \Psi$ в направлении вектора ξ есть

$$\nabla_\xi \Psi = \lim_{t\to 0} \frac{\Psi(x(t)) - \Psi(x) \cdot (1 + t\omega(\xi))}{t} = \xi^\alpha \partial_\alpha \Psi - \Psi(x) \cdot \omega(\xi).$$

В нашем случае $\Psi = (P, \psi)$. Левое действие $A : \Psi \to A \cdot \Psi$ преобразуется в правое по правилу $A : \Psi \to A^{-1} \cdot \Psi = \Psi'$, $\Psi' = (P', \psi')$, $g' = A^T g A$, $P'^T g' P' = \eta$, $\psi' = \Lambda(L')\psi$, $L' = P'^{-1} A^{-1} P$. Пусть P — симметрическое преобразование. Если предположить, что при преобразовании $e' = e(1 + t\omega)$ имеет место $g' = (1 + t\omega)^T g(1 + t\omega) = g + t(\omega^T g + g\omega)$, т. е. $\delta g = \omega^T g + g\omega = \partial_\xi g$, $P' = P + t\delta P$, где δP — η-симметрическое преобразование, то δP должно удовлетворять уравнению

$$(\delta P)^T g P + P^T g \delta P = -P^T \delta g P.$$

Если учесть, что $P^T g P = \eta$, то это уравнение запишется в виде

$$P\delta P + \delta P P = \delta Q, \tag{6}$$

где $\delta Q = -P^2 \eta^{-1} \delta g P^2$ — симметрическое преобразование. Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\delta P = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}(P - 1)^m \delta Q (P - 1)^n,$$

где $a_{mn} = a_{nm}$. Симметричность a_{mn} по индексам m и n обеспечивает η-симметричность δP. Для a_{mn} получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} 2a_{00} = 1, \\ 2a_{m0} + a_{m-1\ 0} = 0, \quad m \geq 1, \\ 2a_{mn} + a_{m-1\ n} + a_{m\ n-1} = 0, \quad m, n \geq 1, \end{gathered}$$

решение которой имеет вид

$$a_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n+1}} C^m_{m+n}.$$

Для $L' = 1 + t\delta L$, $\psi' = \Lambda(L') = \psi + t\delta\psi$ находим

$$\delta L = -P^{-1}\delta P - P^{-1}\omega P, \quad \delta\psi = \frac{1}{4}\gamma_a \gamma^b (\delta L)^a{}_b \psi.$$

В итоге для ковариантной производной от $\Psi = (P, \psi)$ получаем

$$\nabla_\xi P = \xi^\alpha \partial_\alpha P - \delta P = \xi^\alpha \partial_\alpha P - \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{2^{m+n+1}} C^m_{m+n} (P - 1)^m \delta Q (P - 1)^n,$$

$$\nabla_\xi \psi = \xi^\alpha \partial_\alpha \psi + \frac{1}{4}\gamma_a \gamma^b (P^{-1}\delta P + P^{-1}\omega P)^a{}_b \psi.$$

В ортонормированном репере, где $P = I$, $g = \eta$ и $\partial_\xi g = 0$, имеем $\nabla_\xi P = 0$, а $\nabla_\xi \psi$ определяется формулой (2). Оказывается, вообще, $\nabla_\xi P = 0$ ввиду того, что $\partial_\xi P = \delta P$. Действительно, из $P^T g P = \eta$, дифференцируя по направлению ξ^α, получаем уравнение $\partial_\xi P P^{-1} + P^{-1}\partial_\xi = -P\eta^{-1}\partial_\xi g P$, которое эквивалентно уравнению (6), поэтому $\partial_\xi P = \delta P$.

Докажем, что при любых преобразованиях репера $e = e'A$ ковариантная производная $\nabla_\xi\psi$ тоже есть спинор, т. е. $\nabla_\xi\psi' = \Lambda\nabla_\xi\psi$. Для связности ω при преобразованиях репера имеем закон преобразования

$$\omega' = A\omega A^{-1} + A\partial_\xi A^{-1}.$$

Преобразование Лоренца L и соответствующее спин-преобразование Λ связаны уравнением $\Lambda\gamma\Lambda^{-1} = L^{-1}\gamma$, где $\gamma = (\gamma^a)$. Дифференцируя это уравнение в направлении вектора ξ^α, находим

$$\Lambda^{-1}\partial_\xi\Lambda\gamma - \gamma\Lambda^{-1}\partial_\xi\Lambda = -L^{-1}\partial_\xi L\gamma,$$

откуда

$$\partial_\xi\Lambda = \frac{\Lambda}{4}\gamma^T L^{-1}\partial_\xi L\gamma,$$

где $\gamma^T = (\gamma_a)$. Если воспользоваться тем, что $A = P'LP^{-1}$, то находим

$$\delta L' = -P'^{-1}\partial_\xi P' - P'^{-1}\omega' P' = \partial_\xi LL^{-1} + L\partial_\xi P^{-1}PL^{-1} - LP^{-1}\omega PL^{-1}.$$

Подставляя это выражение в $\nabla_\xi\psi'$, имеем

$$\nabla_\xi\psi' = \Lambda\nabla_\xi\psi + \partial_\xi\Lambda\psi + \frac{\Lambda}{4}\gamma_T\delta L\gamma\psi - \frac{1}{4}\gamma_T(\partial_\xi LL^{-1} + L\partial_\xi P^{-1}PL^{-1} - LP^{-1}\omega P)\gamma\Lambda\psi.$$

В последнем слагаемом правой части, пользуясь уравнениями $\gamma^T L = \Lambda\gamma^T\Lambda^{-1}$ и $\Lambda\gamma\Lambda^{-1} = L^{-1}\gamma$, множитель Λ можно вынести, тогда все слагаемые правой части, начиная со второго, в сумме дают нуль. Это означает $\nabla_\xi\psi' = \Lambda\nabla_\xi\psi$.

7. Производная Ли спиноров в произвольных реперах

Пусть дано некоторое поле репера $e(x) = (e_a{}^\alpha(x))$, к которому привязаны контравариантное спинорное поле 1-го ранга $\psi(x)$ и η — симметрическое преобразование P. Бесконечно малое преобразование $x' = x + t\xi$ точку $x - t\xi$ переводит в точку x, репер $e(x - t\xi)$ — в репер $\widetilde{e}(x) = e(1 + tK + \cdots)$. При этом переходе считаем, что $\psi(x - t\xi)$, $P(x - t\xi)$ и $g(x - t\xi)$ не меняются. Они меняются при переходе от $\widetilde{e}(x)$ к $e(x)$. Образы $\psi(x - t\xi)$, $P(x - t\xi)$ и $g(x - t\xi)$ обозначим через $\widetilde{\psi}(x)$, $\widetilde{P}(x)$ и $\widetilde{g}(x)$. Очевидно, $\widetilde{g}(x) = g(x) - t(K^Tg + \partial_\xi g + gK)$. Тогда в разложении $\widetilde{P}(x) = P(x) + t\delta P(x)$ вариация δP определяется из $\widetilde{P}\widetilde{g}\widetilde{P} = \eta$ как решение уравнения

$$\delta P^T gP + P^T g\delta P = P^T(K^Tg + gK + \partial_\xi g)P,$$

которое эквивалентно уравнению (6) с $\delta Q = P^2\eta^{-1}(K^Tg + gK + \partial_\xi g)P^2$. Преобразование Лоренца L, соответствующее переходу от $\widetilde{e}(x)$ к $e(x)$ вычисляется как

$$L = \widetilde{P}^{-1}(1 + tK)P(x - t\xi) = 1 - tP^{-1}(\delta P + \partial_\xi P - KP).$$

Тогда для производных Ли имеем

$$\begin{aligned} L_\xi g &= \partial_\xi g + K^Tg + gK, \\ L_\xi P &= -\delta P, \\ L_\xi\psi &= \partial_\xi\psi + \frac{1}{4}\gamma^T P^{-1}(\delta P + \partial_\xi P - KP)\gamma\psi. \end{aligned} \tag{7}$$

В ортрепере, когда $g = \eta$ и $P = 1$, находим

$$\begin{aligned} L_\xi\eta &= 2\eta K_C, \quad K_C = \frac{1}{2}(\eta^{-1}K^T\eta + K), \\ L_\xi 1 &= -K_C, \\ L_\xi\psi &= \partial_\xi\psi - \frac{1}{4}\gamma^T K_A\gamma\psi. \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет производную Ли спинора (4), найденную И. Косман. Соотношения (7) можно переписать в виде

$$L_\xi g_{ab} = \nabla_b \xi_a + \nabla_a \xi_b,$$
$$L_\xi P = -\delta P,$$
$$L_\xi \psi = \nabla_\xi \psi + \frac{1}{4}\gamma^T P^{-1}(\delta P - \nabla\xi P)\gamma\psi,$$

где $\nabla\xi = (\nabla_b \xi^a)$, а уравнение, которому удовлетворяет δP, можно записать в виде

$$P\delta P + \delta P P = P^2 \eta^{-1} L_\xi g P^2.$$

Чтобы утверждать, что $L_\xi\psi$ снова есть спинор, необходимо сначала доказать, что $\frac{1}{4}\gamma^T P^{-1}\delta P\gamma\psi$ есть спинор, однако каково поведение этого выражения при произвольных преобразованиях реперов, выяснить не удается. Удается однако объяснить, почему для спинорных полей не выполняется свойство производных Ли для векторных и тензорных полей, заключающееся в том, что коммутатор производных Ли есть производная Ли вдоль коммутатора.

Если рассмотреть еще векторное поле μ^α и обозначить $M = -e^{-1}L_\mu e$, $N = -e^{-1}L_{[\xi,\mu]}e$, то можно показать, что

$$[L_\xi, L_\mu]\psi = \partial_{[\xi,\psi]}\psi + \frac{1}{4}\gamma^T(\partial_\mu K_A - \partial_\xi M_A + [K_A, M_A])\gamma\psi,$$
$$L_{[\xi,\mu]}\psi = \Big\{[L_\xi, L_\mu] + \frac{1}{4}\gamma^T[K_C, M_C]\gamma\Big\}\psi. \tag{8}$$

Появление второго слагаемого в правой части последнего соотношения можно объяснить следующим образом. Возьмем $P = 1+tL_\mu 1 = 1-tM_C$ и по формуле (7) сосчитаем $L_\xi(\psi+tL_\mu\psi)|_{P=1-tM_C}$. Через $L_\xi\{L_\mu\psi\}$ будем обозначать значение производной этого выражения по t при $t=0$. Если теперь коммутатором двух производных Ли для ψ считать $L_\xi\{L_\mu\psi\} - L_\mu\{L_\xi\psi\}$, то для него мы в точности получим правую часть (8).

Литература

1. Картан Э. *Теория спиноров.* – М.: ГИИЛ, – 1947. – 224 с.
2. Van der Waerden B.L. *Spinoranalyse* // Nachr. Acad. Wiss. Göttingen: Math.-phusik. kl. – 1929. – S. 100–109.
3. Fock V.A. *Geometrisierung der Diracshen Theorie des Elektrons* // Zeitschz. f. Physik. – 1929. – Bd. 57. – S. 261–277.
4. Fock V.A., Ivanenko D.D. *Geometrie quantique lineaire et deplacement parallele* // Compt. Rend. Acad. Sci. – Paris, 1929. – V. 188. – P. 1470–1472.
5. Infeld L., Van der Vaerden B.L. *Die Welengliechungen des Elektrons in der allgemeinen Relativitatstheorie* // Sitzber. Preuss. Acad. Wiss. Physik.-math. k1. – 1933. – V. 9. – P. 380–401.
6. Rosenfeld L. *Sur le tenseur d'impulsion–energy* // Mem. Acad. Roy. Belgique. – 1940. – V. 18. – fasc. 6. – P. 1–30.
7. Билялов Р.Ф. *Законы сохранения для спинорных полей на римановых пространственно-временных многообразиях* // Теор. и матем. физика. – 1996. – Т. 108. – № 2. – С. 306–314.
8. Kosmann Y. *Derivees de Lie des spineurs* // Ann. math. pura ed appl. – 1972. – T. 91. – № 4. – P. 317–395.
9. Билялов Р.Ф. *Симметрический тензор энергии-импульса спинорных полей* // Теор. и матем. физика. – 1992. – Т. 90. – № 3. – С. 369–379.
10. Lichnerowicz A. *Champ de Dirac, champ de neitrino et transformation C, P, T sur en espace–temps courbe* // Ann. Inst. H. Poincare. – 1964. – V. 1. – № 3. – P. 233–290.

11. Желнорович В.А. *Теория спиноров и ее применение в физике и механике.* – М.: Наука, 1982. – 270 с.
12. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* – Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.

Казанский государственный университет

Поступила
10.12.1996