ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

УДК 517.55

Ю.В. ПЕДАН

К НАХОЖДЕНИЮ ВЫЧЕТОВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ЦИКЛАМ, СООТВЕТСТВУЮЩИМ РАЗРЕЗАМ

Введение

В данной статье вычеты рациональных функций двух переменных по циклам, соответствующим разрезам, выражаются через вычеты по циклам в окрестностях точек, которые уже найдены. Это позволяет находить вычеты рациональных функций двух переменных по ним и произвольному циклу, если известны разложения по некоторым системам образующих соответствующих групп гомологий.

1. Сведения

Вычетом рациональной функции двух переменных называется интеграл

$$J = \int_\Gamma \frac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} dz_1\, dz_2.$$

Пусть P и Q — полиномы с комплексными коэффициентами, зависящие от двух комплексных переменных z_1, z_2 и не равные тождественно нулю; Γ — двумерный сингулярный кубический цикл, не пересекающийся с особенностями $S = \{z : Q(z_1, z_2) = 0\}$ вычета. Обозначим через $C^2(z_1, z_2)$ пространство значений двух комплексных переменных z_1, z_2; через $H_2(C^2 - S)$ — группу сингулярных кубических гомологий размерности два с коэффициентами в поле комплексных чисел множества $C^2 - S$. По теореме Коши–Пуанкаре вычет J равен линейной комбинации с комплексными коэффициентами вычетов по какой-либо системе образующих группы гомологий $H_2(C^2 - S)$.

Напомним, что пространство C^2 топологически стягиваемо в точку, поэтому его гомологии совпадают с гомологиями точки. По теореме 1 и замечанию 2 ([1], п.°8) группа гомологий $H_2(C^2 - S)$ равна прямой сумме групп $\delta H_1(\widetilde{A})$, $\delta H_1(M(S))$. По определению прямой суммы объединение их систем образующих является системой образующих группы $H_2(C^2 - S)$. По следствиям 2, 1 теоремы 1 [1] группа $\delta H_1(\widetilde{A})$ образована циклами $\delta_\varepsilon A_j^k$, где A_j^k — одномерный цикл, лежащий в окрестности j-й точки W_j самопересечения S на представителе S_{jk} k-го неприводимого ростка $\widetilde{S}_{jk}$ множества S в точке W_j, δ_ε — оператор кограницы ([2], сс. 41, 42), порождающий гомоморфизмы δ групп гомологий $H_1(\widetilde{A})$, $H_1(M(S))$ в группу гомологий $H_2(C^2 - S)$. По замечанию 4 ([1], п.°8) и замечанию к следствию 2 теоремы 1 группа $\delta H_1(M(S))$ образована действием оператора δ_ε на "окружности" c_i с центрами в бесконечно удаленных точках римановой поверхности $\overline{M}$ полинома Q и объединение систем образующих групп гомологий $H_1(\overline{M}_l)$, где $\overline{M}_l$ — римановы поверхности неприводимых множителей Q_l полинома Q. Вычеты по циклам прямой суммы групп $\delta H_1(\overline{M}_l)$ называются вычетами по циклам, соответствующим разрезам.

Вычеты по циклам $\delta_\varepsilon A_j^k$ можно найти, понижая степень неприводимого множителя полинома Q в окрестности точки W_j, нулям которого принадлежит цикл A_j^k, используя конструкцию из ([3], сс. 88, 89), простую формулу вычетов Лере ([2], с. 44) и разложение коэффициента ее формы-вычета в ряд Лорана по локальной униформизующей ростка $\widetilde{S}_{jk}$. Конструкция из [3] применима, когда особенности вычета на комплексном аналитическом многообразии состоят из регулярных точек и имеют уравнения в целом, поэтому ею надо пользоваться в малых окрестностях точек W_j, из которых выброшены представители S_{jk} других неприводимых ростков. Напомним, что в нашем случае S_{jk} пересекаются по изолированным точкам и имеют изолированные особые точки S. Задание S_{jk} в целом в окрестности точки W_j позволяет распространить конструкцию из [3] на всю окрестность точки W_j. Вычеты по циклам $\delta_\varepsilon c_i$ находятся аналогично, если координаты z_k, обращающиеся в бесконечность, заменить на z_k^{-1}.

В статье доказывается, что вычеты по циклам некоторой системы образующих $\delta\gamma$ группы $\delta H_1(\overline{M}_l)$ равны линейной комбинации с целыми коэффициентами вычетов по циклам $\delta_\varepsilon A_j^k$, $\delta_\varepsilon c_i$. Следовательно, вычет по циклу, соответствующему разрезам, можно найти, если известно его разложение по системе образующих $\delta\gamma$ прямой суммы групп $\delta H_1(\overline{M}_l)$. Таким образом, вычет по произвольному циклу Γ найдем, если известно его разложение по системе образующих $\delta_\varepsilon A_j^k$, $\delta_\varepsilon c_i$, $\delta\gamma$ группы $H_2(C^2 - S)$. Отметим, что для этого используем разложение Γ по базису группы $H_2(C^2 - S)$ в ([3], с. 107–111), выразив его часть, соответствующую разрезам, через образующие $\delta\gamma$ при помощи блочной структуры триангуляции поверхностей $\overline{M}_l$ ([4], § 7, п.°1). Отметим, что блочная структура позволяет найти цикл, гомологичный любому циклу, лежащий над построенной дальше системой разрезов E.

Рассмотрим группу гомологий $\delta H_1(\overline{M}_l)$. Линейной однородной заменой переменных z_k добьемся того, чтобы все неприводимые множители Q_l полинома Q зависели от двух переменных. Это можно сделать, используя какие-либо не равные тождественно нулю однородные полиномы полиномов Q_l. Выберем новую систему координат так, чтобы комплексные направления, лежащие на нулях новых переменных, не лежали на нулях этих однородных полиномов, являющихся комплексными конусами. Сохраним за новыми переменными прежние обозначения. Обозначим через z^j точки ветвления римановой поверхности $\overline{M}_l$, включая бесконечно удаленные. Их конечное число. Они проектируются в точки z_2^j комплексной плоскости $C^1(z_2)$, пополненной бесконечно удаленной точкой до сферы Римана. Перенумеруем точки z_2^j. Соединим первую из них с другими разрезами E_j, $j > 1$. Положим множество E равным объединению E_j. Обозначим через $\overline{E}$ поднятие E на $\overline{M}_l$. Как было доказано в ([4], § 7, п.°1), любая система образующих группы $H_1(\overline{E})$ является системой образующих группы $H_1(\overline{M}_l)$. Локальные униформизующие $\overline{M}_l$ для конечной точки z_2^j имеют вид $(z_2 - z_2^j)^{1/\nu}$, где ν — целое число. Если точка z_2^j бесконечно удалена, то надо z_2 заменить на z_2^{-1}. По построению $\overline{M}_l$ порядок склеивания листов один и тот же вдоль всего разреза. Следовательно, в качестве системы образующих группы гомологий $H_1(\overline{M}_l)$ можно взять циклы γ, являющиеся поднятием на два листа поверхности $\overline{M}_l$ разрезов E_j. По определению гомоморфизма групп любые представители классов гомологий группы $H_2(C^2 - S)$, являющиеся образами для гомоморфизма δ классов гомологий циклов γ на $\overline{M}_l$, представляют собой систему образующих группы $\delta H_1(\overline{M}_l)$. Обозначим их через $\delta\gamma$. По теореме Коши–Пуанкаре вычеты по циклам $\delta\gamma$ не зависят от произвола в выборе. На цикле γ могут быть нерегулярные точки множества S, поэтому нельзя определить цикл $\delta_\varepsilon\gamma$. В [1] доказано, что и в этом случае в качестве циклов $\delta\gamma$ можно взять циклы, получающиеся действием оператора кограницы.

2. Циклы γ

Теорема. *Вычет по циклу $\delta\gamma$ является линейной комбинацией с целыми коэффициентами вычетов по циклам $\delta_\varepsilon A_j^k$, $\delta_\varepsilon c_i$.*

Доказательство. Напомним, что форма-вычет простой формулы вычетов Лере замкнута на комплексном многообразии $\overline{M}_l - V$, где V — объединение конечного числа точек V_q. Точки z^j являются точками V_q. Выберем разрезы E_j так, чтобы множества $\overline{E}$ и V не пересекались вне z^j.

Перенумеруем листы римановой поверхности $\overline{M}_l$ так, чтобы листы, слипающиеся в точках z^1, z^j цикла γ, после обхода против часовой стрелки точек z_2^1, z_2^j претерпевали циклическую перестановку, а цикл γ лежал на первом и m-м листах.

Обозначим через γ_0 цикл, получающийся поднятием разреза E_j, пройденного в двух направлениях, на первый лист поверхности $\overline{M}_l$. Заменим цикл γ_0 гомологичным ему на $\overline{M}_l$ циклом γ_0^1, заменив его возле точек z^1, z^j поднятием малых окружностей с центрами в точках z_2^1, z_2^j, пройденными в двух направлениях. Обозначим через γ_0^2 цикл, получающийся из цикла γ_0^1 тем, что обход в одном направлении заменен поднятием на второй лист. Циклы γ_0^1, γ_0^2 лежат на множестве $\overline{M}_l - V$, состоящем из регулярных точек S, поэтому определены циклы $\delta_\varepsilon\gamma_0^1$, $\delta_\varepsilon\gamma_0^2$. Рассмотрим вычет J_1 по циклу $\delta_\varepsilon\gamma_0^2 - \delta_\varepsilon\gamma_0^1$ и применим к нему простую формулу вычетов Лере. Ее форма-вычет замкнута на $\overline{M}_l - V$, поэтому по общей теореме Стокса циклы γ_0^2, γ_0^1 можно менять, не меняя вычета J_1, заменяя им гомологичными на $\overline{M}_l - V$. Непрерывно деформируя обход цикла γ_0^1 в часть цикла γ_0^2 при неподвижной другой части цикла γ_0^1, убедимся в том, что вычет J_1 равен вычету по циклу $\delta_\varepsilon c_1 + \delta_\varepsilon c_j$, где c_1, c_j — "окружности" возле точек z^1, z^j на $\overline{M}_l$ с соответствующей ориентацией. Цикл γ_0^1 гомологичен нулю на $\overline{M}_l - V$, поэтому по определению гомоморфизма групп цикл $\delta_\varepsilon\gamma_0^1$ гомологичен нулю в $C^2 - S$. По теореме Коши–Пуанкаре вычет по циклу $\delta_\varepsilon\gamma_0^1$ равен нулю, поэтому вычет по циклу $\delta_\varepsilon\gamma_0^2$ равен вычету по циклу $\delta_\varepsilon c_1 + \delta_\varepsilon c_j$. По построению c_1, c_j совпадают с A_j^k, c_i, если среди точек z^1, z^j нет конечных точек, не являющихся точками самопересечения S. Если такие точки есть, то по следствию 1 к теореме 1 из [1], применимой к произвольной точке S, циклы $\delta_\varepsilon c_1$, $\delta_\varepsilon c_j$, не совпадающие с $\delta_\varepsilon A_j^k$, гомологичны нулю. По теореме Коши–Пуанкаре вычет по ним равен нулю, поэтому вычет по циклу $\delta_\varepsilon\gamma_0^2$ является линейной комбинацией с целыми коэффициентами вычетов по циклам $\delta_\varepsilon A_j^k$, $\delta_\varepsilon c_i$. Последовательно повторяя конечное число раз эти рассуждения для цикла γ_0^2, получим цикл γ_0^m, гомологичный на $\overline{M}_l$ циклу γ. Гомоморфизм δ переводит гомологичные циклы в гомологичные, поэтому цикл $\delta_\varepsilon\gamma_0^m$ можно взять в качестве цикла $\delta\gamma$. Таким образом, вычет по циклу $\delta\gamma$ равен линейной комбинации с целыми коэффициентами вычетов по циклам $\delta_\varepsilon A_j^k$, $\delta_\varepsilon c_i$. $\square$

Как отмечалось выше, теорема позволяет находить вычет по циклу, соответствующему разрезам, если известно его разложение по системе образующих $\delta\gamma$ прямой суммы групп $\delta H_1(\overline{M}_l)$. Это позволяет при известном разложении произвольного цикла Γ по системе образующих $\delta_\varepsilon A_j^k$, $\delta_\varepsilon c_i$, $\delta\gamma$ группы гомологий $H_2(C^2 - S)$ найти вычет по нему. Комбинируя теорему, результаты из [3] и блочную структуру триангуляций поверхностей $\overline{M}_l$, это разложение можно найти.

Литература

1. Педан Ю.В. *Об одном уточнении для двух комплексных переменных теоремы о разложении Фруассара* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – Харьков, 1974, вып. 19. – С. 33–44.
2. Лере Ж. *Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии.* – М.: Ин. лит., 1961. – 140 с.
3. Южаков А.П. *Элементы теории многомерных вычетов.* – Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1975. – 182 с.
4. Педан Ю.В. *Исследование римановых поверхностей некоторых двукратных интегралов, зависящих от одного комплексного параметра.* II. *Риманова поверхность элемента* $I_\tau(t)$ // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 12. – С. 66–76.

Ростовский государственный университет

Поступила 20.10.1995