ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 11 (474)

УДК 517.983

А.В. ГЛУШАК

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В банаховом пространстве E рассматривается абстрактная задача Коши

$$v'(t) = Av(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$v(0) = v_0, \tag{2}$$

где A — линейный замкнутый оператор с плотной в E областью определения $D(A)$ и такой, что при $k > 0$, $\gamma > 0$ равномерно корректна задача Коши

$$u''(t) + \gamma k \operatorname{cth} \gamma t u'(t) + \left(\frac{\gamma k}{2}\right)^2 u(t) = Au(t), \tag{3}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \tag{4}$$

Класс таких операторов A, следуя ([1], п. 1.9; [2]), обозначим через G_k^γ, а разрешающий оператор задачи (3), (4) (операторная функция Лежандра (ОФЛ)) — через $P_k^\gamma(t)$. Таким образом, решение задачи (3), (4) имеет вид $u(t) = P_k^\gamma(t) u_0$.

Параметр $\gamma > 0$ введен в уравнение (3), которое будем называть абстрактным уравнением Лежандра, чтобы подчеркнуть, что при $\gamma \to 0$ оно превращается в абстрактное уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) = Au(t). \tag{5}$$

В последнее время в теории стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений получено немало окончательных результатов. Обзор публикаций по данной тематике можно найти в [3], [4]. Эти результаты формулируются в терминах усреднений начальной функции по пространственным переменным, взятым по телам, ограниченным поверхностями уровня фундаментального решения. Указанные усреднения являются решениями соответствующей задачи Коши вида (5), (4) для гиперболического уравнения, что позволило исследовать в [5]–[7] вопросы поведения решения абстрактной задачи Коши (1), (2) при $t \to \infty$ в предположении равномерной корректности задачи (5), (4). Найденные критерии стабилизации сформулированы в терминах разрешающего оператора задачи (5), (4), названного автором операторной функцией Бесселя (ОФБ), и являются абстрактными аналогами известных результатов для параболических уравнений.

В отличие от работ [8], [9], где условия стабилизации решения задачи (1), (2) формулируются в терминах равномерно ограниченной полугруппы, порожденной оператором A, в [5]–[7] именно за счет сужения класса операторов A с множества генераторов полугруппы до множества генераторов ОФБ, получается интегральное представление решения задачи Коши (1), (2), которое лежит в основе критерия стабилизации и позволяет рассматривать задачу (1), (2) и с генератором растущей при $t \to \infty$ полугруппы.

В данной работе вместо разрешающего оператора (ОФБ) задачи (5), (4) будет использован разрешающий оператор (ОФЛ) задачи (3), (4), что в применении к уравнениям в частных производных соответствует использованию вместо средних Пуассона других средних по пространственным переменным. Новые условия стабилизации решения задачи (1), (2) лучше приспособлены, например, к уравнению теплопроводности в случае, когда A — оператор Лапласа, записанный в координатах вытянутого эллипсоида ([10], с. 138), а также к изучаемому в [11] уравнению теплопроводности в пространстве S_n отрицательной кривизны, равной $(-\gamma^2)$, в этом случае $A = \Delta_2 + \gamma^2(n-1)^2/4$, где Δ_2 — оператор Лапласа–Бельтрами. Соответствующие примеры приведены в конце статьи.

Отметим, что, как доказано в ([1], п. 1.9; [2]), множества G_k^γ и G_k операторов A, с которыми равномерно корректны задачи (3), (4) и (5), (4), совпадают, а в [12] приводятся необходимые и достаточные условия на резольвенту оператора A, обеспечивающие равномерную корректность задач (3), (4) и (5), (4). В этой же работе доказано, что если $A \in G_k$, то с этим оператором задача (1), (2) также равномерно корректна, и ее решение может быть выражено через ОФБ.

В дальнейшем нам понадобится выражение решения задачи (1), (2) через ОФЛ $P_k^\gamma(t)$. В ([1], п. 1.9) установлено, что если $A \in G_k^\gamma$, то решение задачи (1), (2) может быть записано в виде

$$v(t) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\sqrt{t}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma s}\frac{d}{ds}\right)^{k/2}\left(\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\right)^{k-1} P_k^\gamma(s)v_0\right)ds, \tag{6}$$

где $v_0 \in D(A^{[k/2]+1})$.

В случае, когда дробная часть $\{k/2\} \neq 0$, дробная степень оператора $\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}$ при $\alpha > 0$ определяется равенствами

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} s)^{\alpha-1}\operatorname{sh} s f(s)ds,$$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{\alpha} f(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]+1}\left(\frac{1}{\operatorname{sh} t}\frac{d}{dt}\right)^{\{\alpha\}-1} f(t).$$

Если $\{k/2\} = 0$, то равенство (6) можно записать в виде

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\sqrt{t}} \int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\right)^k \left(-\frac{\gamma}{2\operatorname{sh}\gamma s}\frac{d}{ds}\right)^{k/2} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right) P_k^\gamma(s)v_0\, ds. \tag{7}$$

Исследование стабилизации решения задачи (1), (2) будет опираться на следующую теорему, вытекающую из тауберовской теоремы 4.21.3 из ([13], с. 172).

Теорема 1 ([1], теорема 2.2.10). *Для непрерывной ограниченной функции $u_0(t)$ и $p > 0$ предел* (*слабый предел*)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2^{-p}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)t^{p/2+1/2}}\int_0^\infty s^p \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)u_0(s)ds = l$$

существует только тогда, когда существует предел (*слабый предел*)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t u_0(s)ds = l.$$

Сформулируем теперь критерии стабилизации решения задачи (1), (2), которые будут зависеть от числа $k/2$, точнее от того, целое это число или дробное.

Теорема 2. *Пусть $A \in G_k^\gamma$, $k/2 \in N$, $v_0 \in D(A)$ и функция $K_k^\gamma(t)P_k^\gamma(t)v_0$, где*

$$K_k^\gamma(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2t\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\right)^k\left(-\frac{\gamma}{2\operatorname{sh}\gamma t}\frac{d}{dt}\right)^{k/2-1}\frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma t},$$

ограничена. Тогда для того чтобы существовал предел (слабый предел)

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = l \tag{8}$$

решения задачи (1), (2), *необходимо и достаточно, чтобы существовал предел (слабый предел)*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K_k^\gamma(s)P_k^\gamma(s)v_0\,ds = l. \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть* $A \in G_k^\gamma$, $\{k/2\} \neq 0$, $v_0 \in D(A)$ *и функция* $K_{2[k/2]+2}^\gamma(t)P_{2[k/2]+2}^\gamma(t)v_0$ *ограничена. Тогда для того чтобы существовал предел (слабый предел)* (8), *необходимо и достаточно, чтобы существовал предел (слабый предел)*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K_{2[k/2]+2}^\gamma(t)P_{2[k/2]+2}^\gamma(t)v_0\,ds = l. \tag{10}$$

Доказательство теоремы 2. Используя равенство

$$\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\right)^{2n}\left(\frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma s}\frac{d}{ds}\right)^n Z(s) = \sum_{i=1}^n a_{i,n}(\operatorname{ch}\gamma s)\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\right)^i Z^{(i)}(s),$$

где $a_{i,n}(\operatorname{ch}\gamma s)$ — такие коэффициенты разложения, что

$$\lim_{s\to\infty}\frac{a_{i,n}(\operatorname{ch}\gamma s)}{\exp((n-i)\gamma s)} = \alpha_{i,n}2^{i-n},$$

функцию $v(t)$ в (7) запишем в виде

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma(k/2+1/2)(-2)^{k/2}\sqrt{t}}\sum_{i=1}^n\int_0^\infty a_{i,n}(\operatorname{ch}\gamma s)\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\right)^i\frac{\partial^i Z(t,s)}{\partial s^i}P_k^\gamma(s)v_0ds, \tag{11}$$

где $n = k/2$, $Z(t,s) = \exp\big(-s^2/(4t)\big)$.

Заметим, что при сделанных предположениях об ограниченности функции $K_k^\gamma(s)P_k^\gamma(s)v_0$ поведение решения $v(t)$ при $t\to\infty$ определяется слагаемым, содержащим

$$\frac{\partial Z(t,s)}{\partial s} = -\frac{s}{2t}\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right),$$

т. к. при дальнейшем дифференцировании функции $\partial Z(t,s)/\partial s$ будут появляться слагаемые, содержащие либо дополнительный множитель s/t, либо меньшую степень s. Эти слагаемые в силу теоремы 1 будут иметь предел, равный нулю (см. пояснение к случаю $k=4$ после доказательства теоремы), поэтому из (8) и (11) имеем

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Gamma(k/2+1/2)(-2)^{k/2}\sqrt{t}}\int_0^\infty a_{1,n}(\operatorname{ch}\gamma s)\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\frac{\partial Z(t,s)}{\partial s}P_k^\gamma(s)v_0ds =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Gamma(k/2+1/2)\sqrt{t}}\int\limits_0^\infty\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\right)^k\left(-\frac{\gamma}{2\operatorname{sh}\gamma s}\frac{d}{ds}\right)^{k/2-1}\frac{-\gamma}{2\operatorname{sh}\gamma s}\frac{\partial Z(t,s)}{\partial s}P_k^\gamma(s)v_0ds =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty s^2\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)K_k^\gamma(s)P_k^\gamma(s)v_0\,ds. \tag{12}$$

В силу (12) и теоремы 1 при $p=2$ равенство (8) равносильно равенству (9). $\square$

В частности, если $k=2$, то

$$K_2^\gamma(t) = \frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma t},\quad v(t) = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty s^2\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma s}P_2^\gamma(s)v_0\,ds,$$

и равенство (9) имеет вид

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma s}P_2^\gamma(s)v_0\,ds = l, \tag{13}$$

что совпадает с необходимым и достаточным условием стабилизации, записанным в терминах ОФБ $Y_2(t)$ (см. [1], теорема 2.2.10; [7]), т. к. в этом случае в силу теоремы 1.9.13 из [1]

$$\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma t}P_2^\gamma(t) = Y_2(t).$$

Если $k=4$, то решение задачи (1), (2) имеет вид

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{1}{12t^2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty s^3\exp\Big(-\frac{s^2}{4t}\Big)\frac{1}{s}\Big(\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\Big)^2 P_4^\gamma(s)v_0\,ds\,- \\ -\frac{1}{6t\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty s\exp\Big(-\frac{s^2}{4t}\Big)\frac{1}{s}\Big(\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\Big)^2 P_4^\gamma(s)v_0\,ds\,+ \\ +\frac{1}{6t\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty s^2\exp\Big(-\frac{s^2}{4t}\Big)\frac{\operatorname{sh}\gamma s\operatorname{ch}\gamma s}{\gamma s}P_4^\gamma(s)v_0\,ds. \end{aligned} \tag{14}$$

В этом случае

$$K_4^\gamma(t) = \frac{\operatorname{sh}\gamma t\operatorname{ch}\gamma t}{3\gamma t}$$

и поведение решения при $t\to\infty$ определяется третьим слагаемым, стоящим в правой части формулы (14), поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{t\sqrt{t}}\int_0^\infty s\exp\Big(-\frac{s^2}{4t}\Big)ds = \frac{2}{\sqrt{t}}\to 0 \qquad &\text{при}\ \ t\to\infty, \\ \frac{1}{t^2\sqrt{t}}\int_0^\infty s^3\exp\Big(-\frac{s^2}{4t}\Big)ds = \frac{8}{\sqrt{t}}\int_0^\infty x\exp(-x)dx\to 0 \quad &\text{при}\ \ t\to\infty. \end{aligned}$$

Из равенства (14) также видно, что если наложить менее жесткие ограничения, чем в условии теоремы, т. е. если требовать ограниченность функции

$$\Big(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma t}\Big)^2 P_4^\gamma(t)v_0,$$

то третье слагаемое, как следует из теоремы 1, вообще говоря, не обязано иметь предел (оно может иметь предел после деления на $\sqrt{t}$).

Отметим также отличие рассматриваемого случая $\gamma>0$ от предельного случая $\gamma=0$. Если разрешающий оператор для задачи (5), (4) при $k=4$ равномерно ограничен, то в случае $\gamma=0$ все три слагаемых дают вклад в поведение решения, когда $t\to\infty$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $v_0\in D(A^{[k/2]+1})$. Воспользовавшись в (6) выражением для дробной степени оператора $\frac{1}{\operatorname{sh}t}\frac{d}{dt}$, запишем решение $v(t)$ в виде

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{1}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(1-\{k/2\})2^{k/2}\sqrt{t}}\int_0^\infty \exp\Big(-\frac{s^2}{4t}\Big)\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\Big(\frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma s}\frac{d}{ds}\Big)^{[k/2]+1}\times \\ \times\Big(\int_0^s\Big(\frac{\operatorname{ch}\gamma s-\operatorname{ch}\gamma\tau}{\gamma^2}\Big)^{-\{k/2\}}\Big(\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\Big)^k P_k^\gamma(\tau)v_0\,d\tau\Big)ds. \end{aligned} \tag{15}$$

Применяя в (15) формулу сдвига по параметру в ОФЛ ([1], теорема 1.9.3), после интегрирования по частям получим

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma([k/2]+3/2)\sqrt{t}} \times$$
$$\times \int_0^\infty \exp\Big(-\frac{s^2}{4t}\Big)\Big(\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\Big)^{2[k/2]+2}\Big(-\frac{\gamma}{2\operatorname{sh}\gamma s}\frac{d}{ds}\Big)^{[k/2]+1} P^\gamma_{2[k/2]+2}(s)v_0\,ds. \quad (16)$$

Это равенство в силу плотности $D(A^{[k/2]+1})$ в E ([1], теоремы 1.9.13, 1.1.30) справедливо и для $v_0 \in D(A)$.

Равенство (16) аналогично равенству (7), если вместо параметра k записать параметр $2[k/2]+2$, поэтому дальнейшее доказательство теоремы 3 повторяет (с соответствующей заменой параметра k) доказательство теоремы 2. $\square$

В частности, если $0 < k/2 < 1$, то критерий стабилизации решения задачи (1), (2) имеет вид (13), т. е. совпадает с критерием стабилизации для $k/2 = 1$. Для $1 < k/2 < 2$ критерий стабилизации такой же, как для $k/2 = 2$ и т. д.

Используя уже упоминавшуюся формулу сдвига по параметру в ОФЛ, критерий стабилизации (10) можно записать в терминах ОФЛ $P^\gamma_k(t)$.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда критерий стабилизации решения задачи (1), (2) имеет вид

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t L^\gamma_k(t,y)P^\gamma_k(y)v_0\,dy = l,$$

где

$$L^\gamma_k(t,y) = \frac{2^{-k/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(1+[k/2]-k/2)}\Big(\frac{\operatorname{sh}\gamma y}{\gamma}\Big)^k \times$$
$$\times \int_y^t \frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma s}\Big(\frac{\operatorname{ch}\gamma s - \operatorname{ch}\gamma y}{\gamma^2}\Big)^{[k/2]-k/2}\Big(-\frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma s}\frac{d}{ds}\Big)^{[k/2]}\frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma s}ds.$$

В случае, когда начальное условие v_0 обладает повышенной гладкостью, можно указать еще один критерий стабилизации, который является непосредственным следствием теоремы 1, примененной к равенству (6).

Теорема 4. *Пусть $A \in G^\gamma_k$, $v_0 \in D(A^{[k/2]+1})$ и функция*

$$\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\Big(\frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma t}\frac{d}{dt}\Big)^{k/2}\Big(\Big(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\Big)^{k-1}P^\gamma_k(t)v_0\Big)$$

ограничена. Тогда критерий стабилизации решения задачи (1), (2) *имеет вид*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2+1/2)2^{k/2}t}\int_0^t \frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\Big(\frac{\gamma}{\operatorname{sh}\gamma t}\frac{d}{dt}\Big)^{k/2}\Big(\Big(\frac{\operatorname{sh}\gamma t}{\gamma}\Big)^{k-1}P^\gamma_k(t)v_0\Big)ds = l.$$

Пример 1. Пусть $E = f(x) : |f(x)\operatorname{sh}\gamma x| \le M$, $x \in [0,\infty)$,

$$\|f(x)\| = \sup_{x\ge 0}|f(x)\operatorname{sh}\gamma x|, \quad A = \frac{d^2}{dx^2} + 2\gamma\operatorname{cth}\gamma s\frac{d}{ds} + \gamma^2,$$
$$D(A) = (f(x) \in E : Af(x) \in E).$$

Тогда ОФЛ, порождаемая оператором A, имеет вид

$$P^\gamma_2(t)v_0(x) = \frac{\gamma^2 tx}{\operatorname{sh}\gamma t\operatorname{sh}\gamma x}T^t_x\Big(\frac{\operatorname{sh}\gamma x}{\gamma x}v_0(x)\Big),$$

где $T_x^t v_0(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi v_0\big(\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\varphi}\,\big)\sin\varphi\,d\varphi$ — оператор обобщенного сдвига.

Проверим выполнение условий теоремы 2 для $k=2$. Имеем

$$\|K_2^\gamma(t)P_2^\gamma(t)v_0\| = \sup_{x\geq 0}\bigg|x/2\int_0^\pi v_0\big(\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\varphi}\,\big)(x^2+t^2-2xt\cos\varphi)^{-1/2}\times$$
$$\times\operatorname{sh}\gamma\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\varphi}\,\sin\varphi\,d\varphi\bigg| \leq$$
$$\leq \sup_{x\geq 0} Mx/2\int_{-1}^1 (x^2+t^2-2xty)^{-1/2}dy = \frac{M}{2t}\sup_{x\geq 0}(|x+t|-|x-t|) \leq M.$$

По теореме 2 необходимое и достаточное условие стабилизации решения задачи

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av, \quad v(0,x) = v_0(x)$$

имеет вид

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\gamma x}{t\operatorname{sh}\gamma x}\int_0^t T_x^y\Big(\frac{\operatorname{sh}\gamma x}{\gamma x}v_0(x)\Big)dy = l(x),$$

где под сходимостью понимается либо сходимость по норме E, либо слабая сходимость в E, которая означает равномерную ограниченность последовательности функций и сходимость в каждой точке $x\in[0,\infty)$.

Рассмотренные критерии стабилизации решения задачи (1), (2) требовали достаточно быстрого стремления к нулю функции $P_k^\gamma(t)v_0$. В дальнейшем на эту функцию будет наложено только условие ограниченности, но при этом в уравнении (1) мы совершим сдвиг оператора A, зависящий от параметров k и γ.

Рассмотрим задачу Коши

$$V'(t) = AV(t) - h(k,\gamma)V(t), \quad t>0, \tag{17}$$
$$V(t) = v_0, \tag{18}$$

решение которой имеет вид $V(t) = \exp(-th(k,\gamma))v(t)$, где $v(t)$ определена равенством (6). Сформулируем вначале достаточные условия стабилизации.

Теорема 5. *Пусть $A\in G_k^\gamma$, $k/2\in N$, $h(k,\gamma) = (\gamma k/2)^2$, $v_0\in D(A)$. Тогда, если существует предел (сильный или слабый)*

$$\lim_{t\to\infty} P_k^\gamma(t)v_0 = l, \tag{19}$$

то решение задачи (17), (18) при $t\to\infty$ также стремится (сильно или слабо) к l, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = l. \tag{20}$$

Теорема 6. *Пусть $A\in G_k^\gamma$, $\{k/2\}\neq 0$, $h(k,\gamma) = \gamma^2([k/2]+1)^2$, $v_0\in D(A)$. Тогда, если существует предел (сильный или слабый)*

$$\lim_{t\to\infty} P_{2[k/2]+2}^\gamma(t)v_0 = l,$$

то справедливо равенство (20).

Доказательство теоремы 5. Используя равенство (11) и ограниченность функции $P_k^\gamma(t)v_0$, после очевидных преобразований получим

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \frac{\exp\Big(-(\gamma n)^2 t\Big)}{(-2)^n\Gamma(k/2+1/2)} \sum_{i=1}^{n} \lim_{t\to\infty} t^{-1/2}\int_0^\infty a_{i,n}(\operatorname{ch}\gamma s)\Big(\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}\Big)^i\Big(-\frac{s}{2t}\Big)^i \times$$

$$\times \exp\Big(-\frac{s^2}{4t}\Big)P_k^\gamma(s)v_0\,ds = \frac{(-1)^n}{2^k\Gamma(k/2+1/2)}\sum_{i=1}^{n}\lim_{t\to\infty}\alpha_{i,n}t^{-1/2}\int_0^\infty\Big(-\frac{s}{2\gamma t}\Big)^i\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{s^2}{4t}+\gamma ns-(\gamma n)^2t\Big)P_k^\gamma(s)v_0\,ds =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{k-1}\Gamma(k/2+1/2)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}\lim_{t\to\infty}\int_{-\gamma n\sqrt{t}}^{\infty}\exp\Big(-x^2\Big)\Big(-n-\frac{x}{\gamma\sqrt{t}}\Big)^iP_k^\gamma\Big(2x\sqrt{t}+2\gamma nt\Big)v_0\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{k-1}\Gamma(k/2+1/2)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,n}(-n)^i\lim_{t\to\infty}\int_{-\gamma n\sqrt{t}}^{\infty}\exp(-x^2)P_k^\gamma(2x\sqrt{t}+2\gamma nt)v_0\,dx, \quad (21)$$

где $2n=k$. Интеграл в правой части (21) представим в виде суммы $J_1(t)+J_2(t)$, где в $J_1(t)$ интегрирование ведется по интервалу $(-\gamma n\sqrt{t},-\ln t)$, а в $J_2(t)$ — по $(-\ln t,\infty)$. В силу ограниченности $P_k^\gamma(t)v_0$ и сходимости рассматриваемого интеграла

$$\lim_{t\to\infty} J_1(t)=0. \quad (22)$$

Поскольку на интервале $(-\ln t,\infty)$, очевидно, $2x\sqrt{t}+2\gamma nt > 2\gamma nt-2\sqrt{t}\ln t\to\infty$ при $t\to\infty$, то, используя предположение (19), получим

$$\lim_{t\to\infty} J_2(t)=l. \quad (23)$$

Из (21)–(23) вытекает равенство

$$\lim_{t\to\infty} V(t)=\delta_k l, \quad (24)$$

где постоянная

$$\delta_k=\frac{(-1)^{k/2}\sqrt{\pi}}{2^{k-1}\Gamma(k/2+1/2)}\sum_{i=1}^{k/2}\alpha_{i,k/2}(-k/2)^i$$

не зависит от оператора A, входящего в уравнение (17).

Рассмотрев оператор $A=\Delta_2+\gamma^2k^2/4$ в пространстве S_{k+1} отрицательной кривизны $-\gamma^2$ и положив $v_0\equiv 1$, получим $P_k^\gamma(t)v_0\equiv 1$ и $V(t,x)\equiv 1$ (см. [11]), откуда следует, что

$$\delta_k=\frac{(-1)^{k/2}\sqrt{\pi}}{2^{k-1}\Gamma(k/2+1/2)}\sum_{i=1}^{k/2}\alpha_{i,k/2}(-k/2)^i=1. \quad (25)$$

Поэтому из (24), (25) вытекает (20). □

Доказательство теоремы 6 обосновывается рассуждениями, аналогичными тем, которые были применены при доказательстве теоремы 3 и в основе которых лежит представление (16).

Переходим теперь к формулировке необходимых условий стабилизации.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 5,

$$\sup_{t\ge 0}\|P_k^\gamma(t)v_0\|\le M \quad (26)$$

и справедливо равенство (20). *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P_k^\gamma(s)v_0\,ds=l. \quad (27)$$

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 6, *неравенство* (26) *и справедливо равенство* (20). *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P^{\gamma}_{2[k/2]+2}(s)v_0\,ds = l.$$

Как и прежде, достаточно доказать только теорему 7. Для определенности рассмотрим сильную сходимость. Воспользовавшись равенством (25), запишем формулу (21) в виде

$$\lim_{t\to\infty}V(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\gamma n\sqrt{t}}^{\infty}\exp(-x^2)P_k^{\gamma}(2x\sqrt{t}+2\gamma nt)v_0\,dx. \tag{28}$$

Введем обозначения

$$w(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\gamma n\sqrt{t}}^{\infty}\exp(-x^2)P_k^{\gamma}(2x\sqrt{t}+2\gamma nt)v_0\,dx,\quad \beta=\gamma n/2.$$

Учитывая предположение (20), из (28) получим $\lim\limits_{t\to\infty}w(t)=l$ и поэтому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t w(\tau)d\tau = l. \tag{29}$$

Проделав элементарные преобразования, получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_0^t w(\tau)d\tau &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}t}\int_0^{2\sqrt{t}} s\int_{-\beta s}^{\infty}\exp(-x^2)P_k^{\gamma}(xs+\beta s^2)v_0\,dx\,ds = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}t}\int_{-2\beta\sqrt{t}}^{0}\exp(-x^2)\int_{-x/\beta}^{2\sqrt{t}} s\,P_k^{\gamma}(xs+\beta s^2)v_0\,ds\,dx + \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}t}\int_0^{\infty}\exp(-x^2)\int_0^{2\sqrt{t}} s\,P_k^{\gamma}(xs+\beta s^2)v_0\,ds\,dx = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}t}\int_{-2\beta\sqrt{t}}^{0}\exp(-x^2)\int_0^{2x\sqrt{t}+4\beta t}\frac{\sqrt{x^2+4\beta y}-x}{2\beta\sqrt{x^2+4\beta y}}P_k^{\gamma}(y)v_0\,dy\,dx + \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}t}\int_0^{\infty}\exp(-x^2)\int_0^{2x\sqrt{t}+4\beta t}\frac{\sqrt{x^2+4\beta y}-x}{2\beta\sqrt{x^2+4\beta y}}P_k^{\gamma}(y)v_0\,dy\,dx = \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}\beta t}\int_{-2\beta\sqrt{t}}^{\infty}\exp(-x^2)\int_0^{2x\sqrt{t}+4\beta t}\frac{\sqrt{x^2+4\beta y}-x}{\sqrt{x^2+4\beta y}}P_k^{\gamma}(y)v_0\,dy\,dx = \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}\beta t}\int_{-2\beta\sqrt{t}}^{\infty}\exp(-x^2)\int_0^{4\beta t}\frac{\sqrt{x^2+4\beta y}-x}{\sqrt{x^2+4\beta y}}P_k^{\gamma}(y)v_0\,dy\,dx + \\
&+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}t}\int_{-2\sqrt{t}}^{\infty}\exp(-x^2)\int_{4\beta t}^{2x\sqrt{t}+4\beta t}\frac{\sqrt{x^2+4\beta y}-x}{\sqrt{x^2+4\beta y}}P_k^{\gamma}(y)v_0\,dy\,dx = \\
&= \frac{1}{4\beta t}\int_0^{4\beta t}P_k^{\gamma}(y)v_0\,dy+\sum_{i=1}^{4}I_i(t),
\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \frac{-1}{4\sqrt{\pi}\beta t}\int_{-\infty}^{-2\beta\sqrt{t}}\exp(-x^2)\int_0^{4\beta t}P_k^{\gamma}(y)v_0\,dy\,dx,\\
I_2(t) &= \frac{-1}{4\sqrt{\pi}\beta t}\int_{-2\beta\sqrt{t}}^{\infty}x\exp(-x^2)\int_0^{4\beta t}\frac{1}{\sqrt{x^2+4\beta y}}P_k^{\gamma}(y)v_0\,dy\,dx,
\end{aligned}$$

$$I_3(t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\beta t}\int_{-2\beta\sqrt{t}}^{\infty} \exp(-x^2)\int_{4\beta t}^{4\beta t+2x\sqrt{t}} P_k^\gamma(y)v_0\,dy\,dx,$$
$$I_4(t) = \frac{-1}{4\sqrt{\pi}\beta t}\int_{-2\beta\sqrt{t}}^{\infty} x\exp(-x^2)\int_{4\beta t}^{2x\sqrt{t}+4\beta t} \frac{1}{\sqrt{x^2+4\beta y}} P_k^\gamma(y)v_0\,dy\,dx.$$

Рассмотрим далее каждое слагаемое, входящее в $\sum\limits_{i=1}^{4} I_i(t)$. Учитывая неравенство (26), получим

$$\|I_1(t)\| \le \frac{M\|v_0\|}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-2\beta\sqrt{t}} \exp(-x^2)dx \to 0 \ \text{ при } \ t\to\infty,$$
$$\|I_2(t)\| \le \frac{M\|v_0\|}{8\sqrt{\pi}\beta^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} |x|\exp(-x^2)\big(\sqrt{x^2+16\beta^2 t}-|x|\big)dx =$$
$$= \frac{2M\|v_0\|}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|\exp(-x^2)}{\sqrt{x^2+16\beta^2 t}+|x|}\,dx \le$$
$$\le \frac{M\|v_0\|}{2\beta\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} |x|\exp(-x^2)dx \to 0 \ \text{ при } \ t\to\infty,$$
$$\|I_3(t)\| \le \frac{M\|v_0\|}{2\beta\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} |x|\exp(-x^2)dx \to 0 \ \text{ при } \ t\to\infty,$$
$$\|I_4(t)\| \le \frac{M\|v_0\|}{8\sqrt{\pi}\beta^2 t}\int_{-2\beta\sqrt{t}}^{\infty} |x|\exp(-x^2)\Big|\sqrt{x^2+4\beta(2x\sqrt{t}+4\beta t)}-\sqrt{x^2+16\beta^2 t}\Big|dx \le$$
$$\le \frac{M\|v_0\|}{\beta\sqrt{\pi t}}\int_{-2\beta\sqrt{t}}^{\infty} x^2\exp(-x^2)\frac{dx}{\sqrt{x^2+4\beta(2x\sqrt{t}+4\beta t)}+\sqrt{x^2+16\beta^2 t}} \le$$
$$\le \frac{M\|v_0\|}{4\beta^2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\exp(-x^2)dx \to 0 \ \text{ при } \ t\to\infty.$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{4} I_i(t)\to 0$ при $t\to\infty$, то из равенств (29), (30) следует

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{4\beta t}\int_0^{4\beta t} P_k^\gamma(y)v_0\,dy = l$$

и равенство (27). $\square$

Как следует из доказанных теорем 5 и 7 (или 6 и 8), необходимое условие стабилизации не совпадает с достаточным. Если в формуле (28) выделить выражение

$$\frac{1}{t}\int_0^t P_k^\gamma(s)v_0\,ds,$$

которое будем обозначать $\widetilde{P}_k^\gamma(t)$, то получим

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}\exp\left(-\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}-n\gamma\sqrt{t}\right)^2\right)\frac{d}{dy}\int_0^y P_k^\gamma(s)v_0\,ds\,dy =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-n\gamma\sqrt{t}}^{\infty} x^2\exp(-x^2)\widetilde{P}_k^\gamma(2x\sqrt{t}+2n\gamma t)v_0\,dx +$$
$$+\lim_{t\to\infty} 2n\gamma\sqrt{t}\int_{-n\gamma\sqrt{t}}^{\infty} x\exp(-x^2)\widetilde{P}_k^\gamma(2x\sqrt{t}+2n\gamma t)v_0\,dx,$$

из чего следует, что если выполнено (27), то второе слагаемое может, вообще говоря, не иметь предела, в то время как первое слагаемое стремится к l.

Эффект второго слагаемого пропадает в предельном случае $\gamma = 0$.

Пример 2. Пусть E — пространство непрерывных и ограниченных функций, заданных на $[0,\infty)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} + k\gamma \operatorname{cth} \gamma x \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, \tag{31}$$

$$V(0,x) = v_0(x). \tag{32}$$

Проверим ограниченность функции $P_2^\gamma(t)v_0(x)$, вид которой указан в примере 1. Имеем

$$|P_2^\gamma(t)v_0(x)| \le \frac{\gamma^2 tx}{2\operatorname{sh}\gamma t \operatorname{sh}\gamma x}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sh}\gamma\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\varphi}}{\gamma\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\varphi}} \times$$
$$\times\, v_0(\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\varphi}\,)\sin\varphi\, d\varphi \le \frac{M\gamma}{2\operatorname{sh}\gamma t \operatorname{sh}\gamma x}\int_{|x-t|}^{x+t} \operatorname{sh}\gamma s\, ds = M.$$

Поэтому для задачи (31), (32) применимы теоремы 5 и 7 для $k=2$ и теоремы 6 и 8 для $0<k/2<1$. При этом все необходимые и достаточные условия стабилизации формулируются в терминах функции $P_2^\gamma(t)v_0(x)$.

Пример 3. Пусть E — пространство непрерывных и ограниченных функций и $A=\Delta_2+\gamma^2$, где Δ_2 — оператор Лапласа–Бельтрами в пространстве S_3 постоянной отрицательной кривизны $-\gamma^2$. В этом случае решение задачи

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \Delta_2 V(t,x), \quad x\in S_3, \quad t>0, \tag{33}$$

$$V(0,x) = v_0(x) \tag{34}$$

имеет вид (см. [5] или, что то же самое, формулу (7))

$$V(t,x) = \frac{\exp(-\gamma^2 t)}{2t\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty s\exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)\frac{\operatorname{sh}\gamma s}{\gamma}P_2^\gamma(s)v_0(x)dx, \tag{35}$$

где $P_2^\gamma(t)v_0(x)$ — среднее функции $v_0(x)$ по геодезической гиперсфере (в смысле метрики в S_3) радиуса t с центром в точке $x\in S_3$. Для задачи (33), (34) справедливы утверждения теорем 5 и 7.

Если $x\in S_2$, то для задачи

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} = \Delta_2 V(t,x) - \frac{3}{4}\gamma^2 V(t,x), \quad x\in S_2, \quad t>0,$$
$$V(0,x) = v_0(x)$$

справедливы утверждения теорем 6 и 8, при этом решение задачи имеет вид (35), где

$$P_2^\gamma(t)v_0(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{2}\operatorname{sh}\gamma t}\int_0^t (\operatorname{ch}\gamma t - \operatorname{ch}\gamma y)^{-1/2}\operatorname{sh}\gamma y P_1^\gamma(y)v_0(x)dy,$$

$P_1^\gamma(t)v_0(x)$ — среднее по сфере (в смысле метрики в S_2) радиуса t с центром в точке $x\in S_2$.

Литература

1. Глушак А.В. *Операторная функция Бесселя, интегральные представления и вопросы стабилизации решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – Москва, 1997. – 226 с.
2. Глушак А.В. *Об абстрактном уравнении Лежандра.* В сб.: Конференция по функциональному анализу и уравнениям математической физики. – Воронеж, 1997. – С. 22.
3. Денисов В.Н., Репников В.Д. *О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений*// Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 1. – С. 20–41.

4. Эйдельман С.Д. *Параболические уравнения* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. – 1990. – Т. 63. – С. 201–313.
5. Глушак А.В., Репников В.Д. *О стабилизации решений задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве* // Докл. РАН. – 1992. – Т. 326. – № 2. – С. 224–226.
6. Глушак А.В. *Об асимптотической близости решений задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка в банаховом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 7. – С. 14–17.
7. Глушак А.В. *Регулярное и сингулярное возмущения абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу* // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66. – № 3. – С. 364–371.
8. Горбачук В.М. *Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторного уравнения первого порядка в банаховом пространстве* // Укр. матем. журн. – 1988. – Т. 40. – № 5. – С. 629–631.
9. Горбачук М.Л., Мацишин И.Т. *Поведение на бесконечности решений параболического дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве* // ДАН СССР. – 1990. – Т. 312. – № 3. – С. 521–524.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 3. – М.: Наука, 1967. – 300 с.
11. Олевский М.Н. *О связях между решениями обобщенного волнового уравнения теплопроводности* // ДАН СССР. – 1955. – Т. 101. – № 1. – С. 21–24.
12. Глушак А.В. *Операторная функция Бесселя* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 352. – № 5. – С. 587–589.
13. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* – М.: Ин. лит., 1962. – 829 с.

Воронежский государственный
технический университет

Поступили
первый вариант 20.12.1999
окончательный вариант 04.12.2000