И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 7 (506)

УДК 517.956

Ф.Г. АВХАДИЕВ

НОВЫЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МОМЕНТОВ ОБЛАСТЕЙ И ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ

1. Введение

Основная цель данной статьи — распространение на случай пространственных областей двух классических изопериметрических неравенств (см. [1], [2]) и недавних результатов автора [3]–[5]. В работе также решается задача [6] о конформных моментах нечетных степеней для плоских односвязных областей.

Опишем кратко базовые результаты, развитию которых посвящена данная работа. Пусть Ω — односвязная область на плоскости, $P(\Omega)$ — коэффициент жесткости кручения упругой балки с поперечным сечением Ω. Известно ([1], [2]), что

$$P(\Omega) = \sup_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \left(2 \int_\Omega u(x)dx \right)^2 \Big/ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $dx = dx_1 dx_2$, $C_0^\infty(\Omega)$ — пространство гладких функций с компактным носителем в Ω.

Классические приближенные формулы Кулона, Коши и Сен-Венана выражают $P(\Omega)$ через площадь Ω и моменты инерции Ω относительно центра масс и главных осей. Экспериментально и теоретически было обнаружено ([1], [7]), что эти формулы справедливы лишь для узких классов областей. Поэтому математическая теория развивалась по пути создания точных утверждений, выражаемых изопериметрическими неравенствами. В 1924 г. Е. Николаи доказал, что для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$

$$P(\Omega) \le I_2(\Omega), \tag{2}$$

где $I_2(\Omega)$ — момент инерции области Ω относительно ее центра масс, т. е.

$$I_2(\Omega) = \int_\Omega |x|^2 dx,$$

если центр масс области находится в начале координат. Это неравенство придало точный смысл формуле Кулона $P(\Omega) \approx I_2(\Omega)$. Отметим, что равенство в (2) имеет место лишь для круга. В 1948 г. Пойа доказал справедливость классической гипотезы Сен-Венана

$$P(\Omega) \le \frac{|\Omega|^2}{2\pi}, \tag{3}$$

где $|\Omega|$ — площадь односвязной области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Как и в (2), равенство в (3) имеет место лишь для круга. Как показано в [1], аналогичная обработка приближенной формулы Сен-Венана

$$P(\Omega) \approx \frac{|\Omega|^4}{4\pi^2 I_2(\Omega)}$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 02-01-00168 и 03-01-00015).

невозможна, т. е. отношение $I_2(\Omega)P(\Omega)/|\Omega|^4$ не отделено ни от нуля, ни от бесконечности на множестве всех односвязных областей. Кроме того, как показано в [1], неравенства (2) и (3) являются лишь односторонними, т. е.

$$\inf_{\Omega} P(\Omega)/I_2(\Omega) = \inf_{\Omega} P(\Omega)/|\Omega|^2 = 0.$$

Геометрический функционал, эквивалентный $P(\Omega)$ на всем множестве односвязных областей Ω, был найден автором (см. [3]–[5]): для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$

$$\int_{\Omega} R^2(x,\Omega)dx \le P(\Omega) \le 4\int_{\Omega} R^2(x,\Omega)dx, \tag{4}$$

где $R(x,\Omega)$ — конформный радиус области Ω в точке $x=(x_1,x_2)$. В силу классической леммы Шварца и теоремы Кебе об 1/4 (см. [8])

$$\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \le R(x,\Omega) \le 4\operatorname{dist}(x,\partial\Omega), \tag{5}$$

где $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ — расстояние от точки $x=(x_1,x_2)$ до границы $\partial\Omega$ односвязной области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Поэтому неравенства (4) и (5) позволяют записать универсальный аналог формулы Кулона с использованием момента инерции Ω относительно границы, т. е. величины

$$\int_{\Omega} \operatorname{dist}^2(x,\partial\Omega)dx. \tag{6}$$

Моменты областей, фигурирующие в (4) и (6), оказались новыми понятиями. Их свойства и приложения изучались, например, в ([3]–[6], [9], [10]). Особо отметим результат статьи [10]: для любой плоской односвязной области Ω

$$\frac{3}{2}\int_{\Omega} R^2(x,\Omega)dx \le P(\Omega),$$

причем для круга имеет место равенство.

2. Основные результаты

Пусть Ω — область (т. е. открытое связное множество) в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \ge 2$. Через $P(\Omega)$ будем обозначать функционал, определенный для Ω формулой (1):

$$P(\Omega) = \sup_{u\in C_0^\infty(\Omega)} \left(2\int_{\Omega} u(x)dx\right)^2 \Big/ \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

где $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega$, $dx = dx_1\ldots dx_n$ — дифференциальный элемент объема. Кроме того, будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $|x| = (x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$, ω_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$, т. е.

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)},$$

где Γ — гамма функция Эйлера.

Изопериметрические неравенства Е. Николаи (2) и Сен-Венана (3) для односвязных плоских областей допускают следующее обобщение.

Теорема 1. *Для любой области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \ge 2)$ и любого $p \ge 0$ имеет место неравенство*

$$P(\Omega) \le \frac{4\omega_n}{n(n+2)} \left(\frac{n+p}{n\omega_n}\int_{\Omega} |x|^p\,dx\right)^{\frac{n+2}{n+p}}. \tag{7}$$

Если Ω — шар с центром в начале координат, то в (7) имеет место равенство.

Из теоремы 1 при $p = 2$ и $p = 0$ вытекают прямые аналоги (2) и (3) для произвольной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$:

$$P(\Omega) \leq \frac{4}{n^2} \int_\Omega |x|^2 dx, \tag{8}$$

$$P(\Omega) \leq \frac{4}{n(n+2)\omega_n^{2/n}} |\Omega|^{1+2/n}. \tag{9}$$

Неравенство вида (9) с худшей константой обосновано в [11]. Отметим также, что (9) можно вывести из результатов работы [12] по изопериметрически монотонным функционалам. Тем не менее мы приведем ниже короткое доказательство (9), основанное на тех же идеях, что и доказательство Пойа классического неравенства (3).

Пусть теперь Ω — область в $\mathbf{R}^n$, в которой существует метрика Пуанкаре с линейным элементом $\lambda_\Omega(x)|dx|$, превращающая Ω в пространство Лобачевского постоянной отрицательной кривизны. Следуя терминологии, принятой в теории функций для областей на плоскости, такую область будем называть гиперболической. Для гиперболической области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ определена положительная в Ω функция

$$R(x, \Omega) := \frac{1}{\lambda_\Omega(x)}, \quad x \in \Omega,$$

называемая гиперболическим радиусом. Известно [13], что функция $R(x, \Omega)$ является вещественно аналитической в Ω и удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$2R\Delta R = n|\nabla R|^2 - 4n, \tag{10}$$

где $R = R(x, \Omega)$, $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$. Для плоских односвязных областей $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ гиперболический радиус совпадает с классическим конформным радиусом Ω в точке $x \in \Omega$ (см. [8], [13]).

Следующее утверждение распространяет на пространственный случай соответствующие результаты автора из [3] и [4].

Теорема 2. *Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^1. Тогда для любого $\alpha > -1$*

$$\int_\Omega R^\alpha(x, \Omega) dx = \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha+1}{2n}\right) \int_\Omega R^\alpha(x, \Omega) |\nabla R(x, \Omega)|^2 dx, \tag{11}$$

и, кроме того,

$$|\partial\Omega| := \int_{\partial\Omega} dS = -\frac{1}{2} \int_\Omega \Delta R(x, \Omega) dx. \tag{12}$$

Отметим, что из (11) при $\alpha = 0$ следует формула для евклидова объема области Ω:

$$|\Omega| := \int_\Omega dx = \frac{n+2}{4n} \int_\Omega |\nabla R(x, \Omega)|^2 dx. \tag{13}$$

В теореме 1 приведены точные оценки сверху для функционала $P(\Omega)$. С использованием теоремы 2 можно получить следующую точную оценку $P(\Omega)$ снизу.

Теорема 3. *Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с границей класса C^1. Тогда имеет место точное неравенство*

$$\left(\int_\Omega R(x, \Omega) dx\right)^2 \leq \frac{n}{n+2} |\Omega| P(\Omega), \tag{14}$$

равенство в котором достигается в случае, когда Ω — шар.

Из соотношений (9) и (14) непосредственно получается изопериметрическое неравенство

$$\int_\Omega R(x,\Omega)dx \le \frac{2}{(n+2)\omega^{1/n}}|\Omega|^{1+1/n}. \tag{15}$$

Другим следствием (14) является оценка снизу жесткости кручения через объем $|\Omega|$ и статический момент области Ω относительно ее границы:

$$\frac{n+2}{n|\Omega|}\left(\int_\Omega \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)dx\right)^2 \le P(\Omega), \tag{16}$$

где $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$ — расстояние от точки $x\in\Omega$ до границы Ω. Отметим, что неравенства (14)–(16) являются новыми и в случае $n=2$.

Следующее утверждение было известно лишь для четных показателей m (см. [6]).

Теорема 4. *Пусть m — натуральное число, Ω — плоская односвязная область с конечной площадью $|\Omega|$, $R(x,\Omega)$ — конформный радиус Ω в точке $x=(x_1,x_2)\in\Omega$. Тогда*

$$\int_\Omega R^m(x,\Omega)dx \le \frac{|\Omega|^{1+m/2}}{(m+1)\pi^{m/2}}. \tag{17}$$

Равенство в (17) *имеет место тогда и только тогда, когда Ω — круг.*

Отметим, что теоремы 3 и 4 были анонсированы автором в [14].

3. Доказательства теорем 1–4

Приведем сначала несколько вспомогательных фактов, которые нам понадобятся в доказательствах теорем 1 и 3.

Следующее утверждение хорошо известно (см., напр., [2]). Если $P(\Omega) < +\infty$, то

$$P(\Omega) = 2\int_\Omega v(x)dx = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx, \tag{18}$$

где v — принадлежащее пространству Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ обобщенное решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta v &= -2 \quad \text{в} \quad \Omega,\\ v &= 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{19}$$

В частности, для шара $B_\rho(0)$ с центром в начале координат и радиуса $\rho>0$ решение задачи (19) имеет вид

$$v(x) = \frac{\rho^2-|x|^2}{n}, \quad x\in B_\rho(0)\subset \mathbf{R}^n.$$

Пользуясь (18) и непосредственными вычислениями, получаем

$$P(B_\rho(0)) = \frac{2}{n}\int_{B_\rho(0)}(\rho^2-|x|^2)dx = \frac{4\omega_n}{n(n+2)}\rho^{n+2}. \tag{20}$$

Нам потребуется утверждение о монотонности $P(\Omega)$ по отношению к Ω и об аппроксимации $P(\Omega)$ значениями этого функционала на подобластях Ω.

Лемма 1. а) *Пусть Ω' и Ω'' — области в $\mathbf{R}^n$. Если $\Omega'\subset\Omega''$, то $P(\Omega')\le P(\Omega'')$.*

б) *Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ и пусть (Ω_j) — неубывающая последовательность подобластей Ω, причем $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\Omega_j$. Тогда $P(\Omega)=\lim\limits_{j\to\infty}P(\Omega_j)$.*

Доказательство. Утверждение а) является простым следствием вариационного определения $P(\Omega)$ в виде (1). Действительно, если $\Omega' \subset \Omega''$, то, очевидно, $C_0^\infty(\Omega') \subset C_0^\infty(\Omega'')$. Поэтому для любого функционала $I(u)$ супремум по $u \in C_0^\infty(\Omega')$ не больше, чем супремум по $u \in C_0^\infty(\Omega'')$. В частности, $P(\Omega') \le P(\Omega'')$.

Для обоснования утверждения б) заметим сначала, что

$$0 \le P(\Omega_1) \le P(\Omega_2) \le \cdots \le P(\Omega_j) \le P(\Omega)$$

согласно п. а) леммы. Следовательно, существует конечный или бесконечный предел

$$l = \lim_{j\to\infty} P(\Omega_j),$$

причем $l \le P(\Omega)$.

Докажем обратное неравенство $l \ge P(\Omega)$. Стандартные рассуждения показывают, что для любого компакта $K \subset \Omega$ найдется такой номер N, что $K \subset \Omega_j$ для всех $j \ge N$. Поэтому если $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и компакт K является носителем этой функции, то $u \in C_0^\infty(\Omega_j)$ для всех $j \ge N$. Следовательно, для этой функции

$$I(u;\Omega) := \left(2\int_\Omega u(x)\,dx\right)^2 \Big/ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \le P(\Omega_j)$$

для всех $j \ge N$. Так как $P(\Omega_j) \le l$ для любого натурального j, то для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ будем иметь неравенство $I(u;\Omega) \le l$, что влечет требуемое утверждение $P(\Omega) \le l$. $\square$

Доказательство теоремы 1. В теории функций имеется ряд способов построения аппроксимирующей последовательности Ω_j из п. б) леммы, когда $\partial\Omega_j$ обладают некоторыми свойствами гладкости. Очевидно, можно считать, что Ω_j — объединение конечного числа параллелепипедов или шаров, и $\partial\Omega$ — кусочно-гладкая гиперповерхность размерности $(n-1)$. Тогда в Ω_j существует классическое решение краевой задачи (19) $v_j \in C^2(\Omega_j) \cap C(\overline{\Omega_j})$ и применима формула Грина. Поэтому согласно лемме 1 неравенство (7) достаточно доказать лишь для подобластей с кусочно-гладкими границами. Достаточно рассмотреть случай, когда Ω — область с кусочно-гладкой границей и в Ω существует классическое решение краевой задачи (19) $v = v(x),\ \ x \in \Omega$. В силу классических результатов функция v является неотрицательной, принадлежит классу $C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и обращается в нуль на $\partial\Omega$.

Докажем сначала неравенство (9) — частный случай теоремы 1.

Для обоснования (9) в общем случае, следуя [1], рассмотрим симметризацию Шварца для Ω и функции v. Хорошо известно (n-мерный случай см. в [2], сс. 49, 55), что

$$\int_\Omega v(x)dx = \int_{B_\rho(0)} v^*(x)dx,$$
$$\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \ge \int_{B_\rho(0)} |\nabla v^*(x)|^2 dx,$$

где $\omega_n\rho^n = |\Omega|$, т. е. $B_\rho(0)$ — шар того же объема, что и Ω, v^* — функция, полученная из v симметризацией по Шварцу. Пользуясь этими соотношениями для v и v^*, вариационным определением $P(\Omega)$ и равенствами (18), получаем

$$P(\Omega) = I(v;\Omega) \le I(v^*; B_\rho(0)) \le \sup\{I(u; B_\rho(0)) : u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B_\rho(0))\} = P(B_\rho(0)).$$

С учетом равенств $\omega_n\rho^n = |\Omega|$ и (20) имеем

$$P(\Omega) \le \frac{4\omega_n}{n(n+2)}\rho^{n+2} = \frac{4}{n(n+2)\omega_n^{2/n}}|\Omega|^{1+2/n},$$

что совпадает с неравенством (9).

Таким образом, неравенство (9) обосновано. Напомним, что (9) получается из доказываемого неравенства (7) при $p = 0$. Покажем, что верно и обратное: (7) при любом $p \ge 0$ следует из (9).

Для $p = 2$ и $n = 2$ или 3 этот факт обоснован в [1] и [2]. В общем случае применяем [15], теорема 1 при $f \equiv 1$ будет сформулирована следующим образом:

если $-n < p_1 < p_2 < \infty$, *то*

$$\left(\frac{p_1 + n}{n\omega_n} \int_\Omega |x|^{p_1} dx\right)^{1/(n+p_1)} \leq \left(\frac{p_2 + n}{n\omega_n} \int_\Omega |x|^{p_2} dx\right)^{1/(n+p_2)}. \tag{21}$$

Действительно, полагая $p_1 = 0$ и $p_2 = p > 0$, из (21) получаем

$$\frac{|\Omega|}{\omega_n} \leq \left(\frac{n+p}{n\omega_n} \int_\Omega |x|^p dx\right)^{n/(n+p)}. \tag{22}$$

Очевидно, неравенство (7) следует из (9) и (22).

Если $\Omega = B_\rho(0)$ для некоторого $\rho > 0$, то

$$\frac{n+p}{n\omega_n} \int_{B_\rho(0)} |x|^p dx = \rho^{n+p}.$$

Это соотношение и равенство (20) показывают, что для любого шара $\Omega = B_\rho(0)$ неравенство (7) превращается в равенство. $\square$

Замечание. При $p = 2$ (а значит, и при любом $p \geq 2$ в силу (21)) неравенство (7) можно обосновать и без применения симметризации. Действительно, пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно-гладкой границей, v — классическое решение задачи (19) в Ω. Применяя к функции v и к гармонической функции $\Phi = v + |x|^2/n$ формулу Грина, будем иметь

$$X = \int_\Omega (\nabla v, \nabla \Phi) dx = 0,$$

поэтому

$$P(\Omega) = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = 2X + \int_\Omega \left|\nabla \frac{|x|^2}{n}\right|^2 dx - \int_\Omega |\nabla \Phi|^2 dx = \frac{4}{n^2} \int_\Omega |x|^2 dx - \int_\Omega |\nabla \Phi|^2 dx.$$

Отсюда получаем неравенство (8), причем равенство возможно лишь в том случае, когда $|\nabla \Phi| \equiv 0$, т. е. $\Phi(x) \equiv \mathrm{const}$. Поскольку $v(x) \geq 0$ в Ω и $v(x) = 0$ на $\partial\Omega$, то эта постоянная должна быть положительной, т. е. $v(x)$ имеет вид $(\rho^2 - |x|^2)/n$ для некоторого $\rho > 0$. Таким образом, если Ω имеет кусочно-гладкую границу, то равенство в (7) при любом $p \geq 2$ возможно лишь для некоторого шара $\Omega = B_\rho(0)$.

Нетрудно показать, что равенство в (7) возможно и для областей вида $\Omega = B_\rho(0) \setminus E$, где E — множество, состоящее из конечного числа точек. По-видимому, для любого $p > 0$ равенство в (7) возможно тогда и только тогда, когда $\Omega = B_\rho(0) \setminus E$ для некоторого шара $B_\rho(0)$, где E — множество, обладающее свойством: любая ограниченная функция Φ, гармоническая в $B_\rho(0) \setminus E$, имеет гармоническое продолжение в $B_\rho(0)$. Полного доказательства этого факта пока нет.

Доказательство теоремы 2. Известно [13], что область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с гладкой границей является гиперболической, причем гиперболический радиус

$$R(\cdot, \Omega) \in C^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$$

удовлетворяет граничным условиям

$$R(x, \Omega) = 0, \quad \frac{\partial R(x, \Omega)}{\partial n} = -2, \quad x \in \partial\Omega, \tag{23}$$

где n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Пусть $\alpha > -1$. Пользуясь уравнением Лиувилля (10) для функции $R = R(x,\Omega)$, легко получаем

$$\frac{\Delta R^{2+\alpha}}{2+\alpha} = (1+\alpha+\tfrac{n}{2})R^{\alpha}|\nabla R|^2 - 2nR^{\alpha}, \quad x \in \Omega. \tag{24}$$

По формуле Грина будем иметь

$$\int_{\Omega} \Delta R^{2+\alpha} dx = (2+\alpha)\int_{\partial\Omega} R^{1+\alpha}\frac{\partial R}{\partial n} dS. \tag{25}$$

Подставляя вместо $\Delta R^{2+\alpha}$ выражение из (24) и учитывая (23), находим равенство

$$(1+\alpha+\tfrac{n}{2})\int_{\Omega} R^{\alpha}|\nabla R|^2 dx = 2n\int_{\Omega} R^{\alpha} dx,$$

что равносильно доказываемому соотношению (11).

Второе утверждение теоремы 2 также вытекает из (24) и (25). Действительно, если $\alpha = -1$, то (25) принимает вид

$$\int_{\Omega} \Delta R\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial R}{\partial n} dS.$$

Правая часть равна $-2\int\limits_{\partial\Omega} dS = -2|\partial\Omega|$ в силу второго граничного условия из (23). Тем самым, доказано равенство (12). $\square$

Доказательство теоремы 3. По условию теоремы область Ω имеет гладкую границу. Поэтому

$$R(\cdot,\Omega) \in C^{\infty}(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}), \quad R(x,\Omega) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

следовательно, $R(\cdot,\Omega) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. Таким образом,

$$P(\Omega) = \sup\{I(u;\Omega) : u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\} \geq I(R;\Omega) = \left(2\int_{\Omega} R(x,\Omega)dx\right)^2 \Big/ \int_{\Omega} |\nabla R(x,\Omega)|^2 dx.$$

Пользуясь формулой (11) теоремы 2 при $\alpha = 0$, т. е. формулой (13), получаем неравенство (14).

Пусть $\Omega = B_{\rho}(0)$. Тогда

$$\int_{B_{\rho}(0)} R(x,B_{\rho}(0))dx = \int_{B_{\rho}(0)} \frac{\rho^2 - |x|^2}{\rho} dx = \frac{2\omega_n \rho^{n+1}}{n+2}.$$

Это соотношение и формула (20) показывают, что в случае $\Omega = B_{\rho}(0)$ неравенство (14) превращается в равенство. $\square$

Доказательство теоремы 4. Докажем сначала утверждение теоремы 4 для $m = 1$. А именно, докажем, что справедлива

Лемма 2. *Пусть Ω — односвязная область на плоскости с конечной площадью $|\Omega|$. Тогда конформный радиус $R(x,\Omega)$, $x = (x_1,x_2) \in \Omega$, удовлетворяет неравенству*

$$\int_{\Omega} R(x,\Omega)dx \leq \frac{|\Omega|\sqrt{|\Omega|}}{2\sqrt{\pi}}. \tag{26}$$

Равенство в (26) имеет место тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Доказательство. Построим стандартную возрастающую последовательность Ω_j односвязных подобластей области Ω. Пусть $f : D \to \Omega$ — конформное отображение круга $D = \{(\xi,\eta) \in \mathbf{R}^2 : \xi^2+\eta^2 < 1\}$ на область Ω. Полагаем

$$\Omega_j = \left\{ f(\xi,\eta) : \sqrt{\xi^2+\eta^2} < \rho_j = \frac{j}{1+j} \right\},$$

где $j = 1, 2, \dots$ Очевидно, $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega_j \subset \dots \subset \Omega$, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \Omega$, для любого натурального j область Ω_j является односвязной областью, ограниченной аналитической кривой. Известно, что с расширением области конформный радиус растет [8], [13]. Следовательно, если $x \in \Omega_j$, то $R(x, \Omega_j) < R(x, \Omega_{j+1}) < R(x, \Omega)$ для любого натурального j. Из теоремы Каратеодори о сходимости областей [8] легко следует, что $\lim\limits_{j\to\infty} R_0(x, \Omega_j) = R(x, \Omega)$ равномерно на любом компакте $K \subset \Omega$, где

$$R_0(x, \Omega_j) = \begin{cases} R(x, \Omega_j), & x \in \Omega_j; \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_j. \end{cases}$$

По теореме 3 $\Big(\int\limits_{\Omega_j} R(x, \Omega_j) dx \Big)^2 \le \frac{|\Omega_j| P(\Omega_j)}{2}$ для любого j. Так как $\Omega_j \subset \Omega$, то $|\Omega_j| \le |\Omega|$ и $P(\Omega_j) \le P(\Omega)$ по лемме 1. Следовательно, для любого j и любого компакта $K \subset \Omega$

$$\left(\int_K R_0(x, \Omega_j) dx \right)^2 \le \frac{|\Omega| P(\Omega)}{2}.$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$ и пользуясь произвольностью компакта $K \subset \Omega$, окончательно имеем

$$\left(\int_\Omega R(x, \Omega) dx \right)^2 \le \frac{|\Omega| P(\Omega)}{2}.$$

Как мы уже показали при доказательстве теоремы 3, для круга это соотношение превращается в равенство.

Продолжим последнее неравенство, оценивая $P(\Omega)$ сверху согласно (3). Получаем эквивалентное (26) неравенство

$$\left(\int_\Omega R(x, \Omega) dx \right)^2 \le \frac{|\Omega|^3}{4\pi}.$$

Ясно, что равенство в этом неравенстве возможно лишь тогда, когда Ω — круг, т. к. этот факт имеет место для изопериметрического неравенства Сен-Венана (3). $\square$

Завершим теперь доказательство теоремы 4. Для этого потребуется еще одно утверждение [6]:

если $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, то конформный радиус $R(x, \Omega)$ односвязной области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ удовлетворяет неравенству

$$\int_\Omega R^{\alpha+\beta-2}(x, \Omega) dx \le \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\pi(\alpha+\beta-1)} \int_\Omega R^{\alpha-2}(x, \Omega) dx \int_\Omega R^{\beta-2}(x, \Omega) dx. \tag{27}$$

Если правая часть в (27) конечна, то при любых допустимых значениях параметров α и β равенство в (27) имеет место тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Для четных показателей m неравенство (17) обосновано в [6] методом математической индукции с использованием тривиального базового случая $m = 0$ и неравенства (27).

Рассмотрим случай нечетных m. Лемма 2 доказывает теорему 4 при $m = 1$. Для любого нечетного числа $m = 2k + 1 \ge 3$, применяя оценку (27) при $\alpha = 2k$ и $\beta = 3$, имеем

$$\int_\Omega R^{2k+1}(x, \Omega) dx \le \frac{2k-1}{\pi(k+1)} \int_\Omega R^{2k-2}(x, \Omega) dx \int_\Omega R(x, \Omega) dx, \tag{28}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω — круг. Оценивая правую часть в (28) с применением (17) для уже доказанных случаев $m = 1$ и $m = 2k - 2$, получаем неравенство (17) для $m = 2k + 1$, что и требовалось доказать.

Литература

1. Полиа Г., Сеге Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике.* – М. : ГИФ-МЛ, 1962. – 336 с.
2. Bandle C. *Isoperimetric inequalities and applications.* – Boston: Pitman, 1980. – 228 p.
3. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* – Казань: Казанск. фонд “Математика”, 1996. – 216 с.
4. Авхадиев Ф.Г. *Вариационные конформно-инвариантные неравенства и их приложения* // ДАН СССР. – 1998.– Т. 359. – № 6. – С. 727–730.
5. Авхадиев Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сб. – 1998. – Т. 189. – № 12. – С. 3–12.
6. Avkhadiev F.G., Salahudinov R.G. *Isoperimetric inequalities for conformal moments of plane domains* // J. Inequal. Appl. – 2002.– V. 7. – №. 4. – P. 593–601.
7. Timoshenko S.R. *History of the strength of materials.* – London: McGraw-Hill, 1954. – 452 p.
8. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966. – 628 с.
9. Авхадиев Ф.Г. *Геометрические характеристики областей, эквивалентные нормам некоторых операторов вложения* // Материалы междунар. конф. и Чебышевских чтений, посвящ. 175-летию со дня рожд. П.Л. Чебышева. – Москва: МГУ. – 1996. – Т. 1. – С. 12–14.
10. Salahudinov R.G. *Isoperimetric inequality for torsional rigidity in the complex plane* // J. Inequalities and Appl. – 2001. – V. 6. – P. 253–260.
11. Bañuelos M., Berg M. Van Den, Carrol T. *Torsional rigidity and expected lifetime of Brownnian motion* // J. London Math. Soc. – 2002. – V. 66. – № 2. – P. 499–512.
12. Kohler-Jobin M.-Th. *Isoperimetric monotonicity and isoperimetric inequalities of Payne–Rayner type for the first eigenfunction of the Helmholtz problem* // J. Appl. Math. and Phys. – 1981. – V. 32. – P. 625–646.
13. Bandle C., Fluger M. *Harmonic radius and concentration of energy*; *hyperbolic radius and Liouville's equations* $\Delta U = e^U$ *and* $\Delta U = U^{(n+2)/(n-2)}$ // SIAM Rev. – 1996. – V. 38. – № 2. – P. 191-238.
14. Авхадиев Ф.Г. *Изопериметрические неравенства для жесткости кручения и конформных моментов областей* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 2002. – Т. 13. – С. 12–16.
15. Avkhadiev F.G., Kayumov I.R. *Comparison theorems of isoperimetric type for moments of compact set* // Collectanea Math. – 2004. – V. 55. – № 1. – P. 1–9.

Казанский государственный университет

Поступила 03.10.2003