Известия вузов. Математика
2017, № 12, с. 46–56
http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Ю.К. САБИТОВА

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация. В прямоугольной области изучена первая граничная задача для телеграфного уравнения. Установлен критерий единственности. Решение задачи построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей. В связи с этим установлены оценки об отделенности от нуля знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые и позволили обосновать существование регулярного решения и доказать его устойчивость в зависимости от граничных функций.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, задача Дирихле, спектральный метод, критерий единственности, ортогональный ряд, малые знаменатели, устойчивость.

УДК: 517.956

Введение

Пусть $D = \{(x,y) \mid 0 < x < l,\ 0 < y < T\}$, где l, T — заданные положительные постоянные, есть прямоугольная область плоскости переменных x, y. В этой области рассмотрим телеграфное уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} - u_{yy} - b^2 u = 0, \tag{1}$$

где $b = \text{const} > 0$. Для уравнения (1) в области D поставим первую граничную задачу.

Задача Дирихле. *Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D); \tag{2}$$

$$Lu \equiv 0, \quad (x,y) \in D; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(l,y) = 0, \quad 0 \le y \le T; \tag{4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Как известно, задача Дирихле для уравнений гиперболического типа является некорректно поставленной. Первыми работами по исследованию задачи Дирихле для уравнения струны являются работы Ж. Адамара [1], А. Губера [2], Д. Манжерона [3]. Впоследствии данная задача привлекла внимание многих ученых [4]–[15]. Анализ результатов работ, посвященных данной тематике, можно найти в работах В.И. Арнольда [12], [13], Ю.М. Березанского [16], В.Г. Мазьи, Т.О. Шапошниковой [17].

Приведем здесь только те работы, в которых задача Дирихле исследовалась в прямоугольной области. П. Буржен и Р. Даффин [4], [5] исследовали задачу Дирихле для уравнения $u_{yy} - u_{xx} = 0$ в прямоугольнике $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$. Они доказали с помощью

Поступила 06.07.2016

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – Поволжье, № 14-01-97003.

преобразований Лапласа, что в случае иррациональности отношения b/a справедлива теорема единственности в классе непрерывно дифференцируемых функций.

К.Б. Сабитовым [15] доказано, что иррациональность отношения сторон T/l прямоугольной области D является необходимым и достаточным условием единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны. В случаях, когда число T/l является алгебраическим или иррациональным числом с ограниченными элементами, решение задачи Дирихле построено им в виде суммы ряда и приведено обоснование сходимости в классе регулярных решений. Если число T/l является иррациональным числом с неограниченными элементами, то решение задачи в виде суммы ряда не существует.

В работе Б.В. Капитонова [14] показано, как на основе задачи Дирихле для уравнения (1) исследуются двумерные модельные задачи для уравнений малых колебаний вращающейся жидкости. В.И. Арнольд ([18], с. 131–136) указал на связь изучения вопросов неустойчивых колебаний (резонансов колебаний в жидкости внутри тонкостенных баков ракет с собственными колебаниями) с задачей Дирихле для гиперболических уравнений.

В данной работе, используя идеи работ [15], [19], установим критерий единственности, докажем теорему существования и устойчивости решения задачи (2)–(5) для уравнения (1).

1. Единственность решения задачи Дирихле

В уравнении (1), разделяя переменные $u(x,y)=X(x)Y(y)$, относительно $X(x)$ получим

$$X''(x)+\mu^2X(x)=0,\quad 0<x<l, \tag{6}$$

$$X(0)=X(l)=0, \tag{7}$$

где μ — постоянная разделения. Решение спектральной задачи (6), (7) имеет вид

$$X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_n x,\quad \mu_n=\frac{\pi n}{l},\quad n=1,2,\dots\ . \tag{8}$$

Система $\{X_n(x)\}_{n\geq 1}$ ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2[0,l]$.

Пусть $u(x,y)$ – решение этой задачи. Рассмотрим, следуя [20], [15], функции

$$u_n(y)=\int_0^l u(x,y)X_n(x)dx,\quad 0\leq y\leq T,\quad n=1,2,\dots\ . \tag{9}$$

В дальнейшем предположим, что частная производная $u_x(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to 0+}u_x(x,y)X_n(x)=\lim_{x\to l-}u_x(x,y)X_n(x)=0,\quad 0\leq y\leq T. \tag{10}$$

На основании (9) введем функции

$$u_{\varepsilon,n}(y)=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}u(x,y)X_n(x)dx,\quad n=1,2,\dots, \tag{11}$$

где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число. Дифференцируя (11) два раза по $y\in(0,T)$ с учетом уравнения (1), получим

$$u''_{\varepsilon,n}(y)=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}u_{yy}(x,y)X_n(x)dx=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}u_{xx}(x,y)X_n(x)dx-b^2\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}u(x,y)X_n(x)dx.$$

Проинтегрируем по частям два раза в первом интеграле правой части последнего выражения, затем, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ с учетом условий (4), (7) и (10), получим дифференциальное уравнение

$$u''_n(y)+\lambda_n^2u_n(y)=0,\quad \lambda_n^2=\mu_n^2+b^2. \tag{12}$$

Общее решение уравнения (12) определяется по формуле

$$u_n(y) = a_n \cos \lambda_n y + b_n \sin \lambda_n y, \tag{13}$$

где a_n и b_n — произвольные постоянные.

Для нахождения неизвестных постоянных a_n и b_n воспользуемся граничными условиями (5) и формулой (9):

$$u_n(0) = \int_0^l u(x,0)X_n(x)dx = \int_0^l \varphi(x)X_n(x)dx = \varphi_n, \tag{14}$$

$$u_n(T) = \int_0^l u(x,T)X_n(x)dx = \int_0^l \psi(x)X_n(x)dx = \psi_n. \tag{15}$$

Удовлетворив функции (13) граничным условиям (14) и (15), при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\delta(n) = \sin \lambda_n T \neq 0, \tag{16}$$

найдем коэффициенты

$$a_n = \varphi_n, \quad b_n = \frac{\psi_n - \varphi_n \cos \lambda_n T}{\sin \lambda_n T}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в формулу (13), найдем окончательный вид функций

$$u_n(y) = \varphi_n \cos \lambda_n y + \frac{\psi_n - \varphi_n \cos \lambda_n T}{\sin \lambda_n T} \sin \lambda_n y. \tag{18}$$

Теорема 1 (критерий единственности решения)**.** *Если существует решение задачи* (2)–(5)*, удовлетворяющее условиям* (10)*, то для его единственности необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (16) *при всех* $n \in \mathbb{N}$*.*

Доказательство. Необходимость. Пусть существует единственное решение задачи (2)–(5). Покажем, что выполняются условия (16) при всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\delta(p) = \sin(\lambda_p T) = 0$ при некотором p. Тогда однородная задача (2)–(5), где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$, имеет ненулевое решение

$$u_p(x,y) = \sin \mu_p x \sin \lambda_p y. \tag{19}$$

Достаточность. Пусть $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$ на $[0,l]$ и выполнены условия (16) при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\varphi_n \equiv 0$, $\psi_n \equiv 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, согласно формуле (18) $u_n(y) \equiv 0$ при $y \in [0,T]$ и в силу (9)

$$\int_0^l u(x,y)X_n(x)dx = 0, \quad n = 1, 2, \ldots\ . \tag{20}$$

Отсюда в силу полноты системы синусов $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_n x\right\}_{n \geq 1}$ в пространстве $L_2[0,l]$ следует, что функция $u(x,y) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $y \in [0,T]$. Поскольку в силу (2) функция $u(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Следовательно, задача (2)–(5) имеет единственное решение. □

Отметим, что условия (10) определяют поведение производной u_x вблизи боковых сторон прямоугольника D, т.е. производная u_x при $x \to 0+0$ и $x \to l-0$ может обращаться в бесконечность, но чтобы выполнялись условия (10).

Возникают следующие вопросы: 1) при каких T, l, b и $n \in \mathbb{N}$ $\delta(n) = 0$; 2) если имеются нули выражения $\delta(n)$, то сколько их и как они расположены; 3) если нулей счетное множество, то существуют ли положительные числа T, l, b и постоянные C_0, n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}$) такие, что при всех $n > n_0$ выражение $\delta(n)$ отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Чтобы ответить на эти вопросы, представим $\delta(n)$ в виде

$$\delta(n) = \sin \pi n \widetilde{T} \widetilde{\lambda}_n, \tag{21}$$

где $\widetilde{T} = T/l$, $\widetilde{\lambda}_n = \sqrt{1 + (b\,l/\pi n)^2}$. В силу представления (21) выражение $\delta(n) = 0$ относительно $\widetilde{T}$ только в том случае, когда

$$\widetilde{T} = \frac{k}{n\widetilde{\lambda}_n}, \quad k, n \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Обозначим через $M{=}\{m_{kn}{=}k/(n\widetilde{\lambda}_n) \mid k, n \in \mathbb{N}\}$ множество нулей уравнения $\delta(n) = 0$ относительно $\widetilde{T}$, т.е. если $\widetilde{T} = m_{kn}$ при некоторых k и n, то $\delta(n) = 0$. Поскольку $\widetilde{T}$ — любое положительное число, то оно, не будучи элементом множества M, может принимать значения, сколь угодно близкие к нулям $\delta(n)$. Поэтому при больших n выражение $\delta(n)$ при таких $\widetilde{T}$ может стать достаточно малым, т.е. возникнет проблема “малых знаменателей” [13], [15]. Чтобы такой ситуации не было, докажем существование чисел $\widetilde{T} > 0$ и положительных постоянных C_0 и n_0 таких, что выражение $\delta(n)$ будет отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Лемма 1. *Если выполнено одно из следующих условий*: 1) $\widetilde{T}$ *является произвольным натуральным числом*; 2) $\widetilde{T} = p/q$ *является произвольным рациональным числом, где* $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, $p/q \notin \mathbb{N}$, *то существуют положительные постоянные* C_0 *и* n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}$) *такие, что при всех* $n > n_0$ *справедлива оценка*

$$|\delta(n)| \geq \frac{C_0}{n} > 0. \tag{23}$$

Доказательство. Выражение $\widetilde{\lambda}_n$, которое зависит от $b\,l$, при условии

$$\frac{b\,l}{\pi} < 1 \quad \text{или} \quad n > \frac{b\,l}{\pi} = n_1 \tag{24}$$

можно представить в виде

$$\widetilde{\lambda}_n = \left(1 + \left(\frac{b\,l}{\pi n}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \theta_n, \tag{25}$$

при этом для θ_n справедлива оценка

$$\frac{3}{8}\left(\frac{b\,l}{\pi n}\right)^2 < \theta_n < \frac{1}{2}\left(\frac{b\,l}{\pi n}\right)^2. \tag{26}$$

Тогда соотношение (21) с учетом (25) принимает вид

$$\delta(n) = \sin\left(\pi n\,\widetilde{T} + \widetilde{T}\widetilde{\theta}_n\right), \quad \widetilde{\theta}_n = \pi n \theta_n. \tag{27}$$

1) Пусть $\widetilde{T} = p$, $p \in \mathbb{N}$, тогда выражение (27) примет вид

$$|\delta(n)| = \left|\sin\left(\pi n\, p + p\widetilde{\theta}_n\right)\right| = \left|\sin\left(p\widetilde{\theta}_n\right)\right|. \tag{28}$$

Поскольку последовательность $\widetilde{\theta}_n$ в силу оценок (26) является бесконечно малой при $n \to \infty$, то существует число $n_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $n > n_2$

$$0 < p\widetilde{\theta}_n < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда в силу известного неравенства

$$|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|, \quad 0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2}, \tag{29}$$

на основании (26), (28) при $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ получим

$$|\delta(n)| > \frac{2}{\pi} p\widetilde{\theta}_n \geq \frac{2p}{\pi}\frac{3}{8}\frac{(b\,l)^2}{\pi n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{3b^2p}{4\pi^2} \geq \frac{\widetilde{C}_1}{n} > 0. \tag{30}$$

2) Пусть $\widetilde{T} = p/q$, $(p,q) = 1$. Разделив np на q с остатком $np = sq + r$, s, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < q$, представлению (27) придадим вид

$$\delta(n) = (-1)^s \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \widetilde{T}\widetilde{\theta}_n\right). \tag{31}$$

Если $r = 0$, то данный случай рассмотрен выше. Пусть $r > 0$. Тогда ясно, что $1 \leq r \leq q-1$, $q \geq 2$. Поскольку выражение $\delta(n) = \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \widetilde{T}\widetilde{\theta}_n\right)$ имеет конечный предел при $n \to \infty$, то существует натуральное число n_3 такое, что при всех $n > n_3$ из представления (31) будем иметь

$$|\delta(n)| \geq \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi r}{q}\right| \geq \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{q}\right| \geq \widetilde{C}_2 \geq \frac{\widetilde{C}_2}{n} > 0. \tag{32}$$

Тогда из неравенств (30) и (32) следует справедливость оценки (23) при всех $n > n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. $\square$

Пусть число $\widetilde{T}$ является квадратическим иррациональным числом. В этом случае соотношение (27) представим в виде

$$\delta(n) = (-1)^k \sin\left[\pi n\left(\widetilde{T} - k/n\right) + \widetilde{T}\widetilde{\theta}_n\right], \tag{33}$$

где k — произвольное натуральное число.

Отметим, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ существует $k \in \mathbb{N}$ [21] такое, что

$$\left|\widetilde{T} - \frac{k}{n}\right| < \frac{1}{2n}. \tag{34}$$

Число k возьмем таким, чтобы в силу неравенства (34) выполнялось неравенство

$$\left|\pi n\left(\widetilde{T} - k/n\right)\right| < \pi/2. \tag{35}$$

Если $\widetilde{T}$ является алгебраическим числом степени два, т. е. является квадратическим иррациональным числом, то в силу теоремы Лиувилля ([22], с. 60) существует положительное число δ, зависящее от $\widetilde{T}$ и такое, что при любых целых n и k, $n > 0$, выполняется неравенство

$$\left|\widetilde{T} - k/n\right| \geq \delta/n^2. \tag{36}$$

В силу оценок (26) имеем

$$0 < \widetilde{T}\widetilde{\theta}_n < \frac{\widetilde{T}}{2}\frac{(b\,l)^2}{\pi n} = \frac{\widetilde{C}_3}{n}, \tag{37}$$

где постоянная

$$\widetilde{C}_3 = \frac{\widetilde{T}(b\,l)^2}{2\pi} < \frac{\pi}{2}. \tag{38}$$

Тогда из (35) и (37) возможны два случая:

$$1)\quad \pi/2 \leq \pi k\left(\widetilde{T} - k/n\right) + \widetilde{T}\widetilde{\theta}_n < \pi/2 + \widetilde{C}_3 < \pi,$$

$$2)\quad -\pi/2 \leq \pi k\left(\widetilde{T} - k/n\right) + \widetilde{T}\widetilde{\theta}_n < \pi/2.$$

В случае 1)

$$\left|\sin\left[\pi n\left(\widetilde{T}-\frac{k}{n}\right)+\widetilde{T}\widetilde{\theta}_n\right]\right| \geq \sin\left(\frac{\pi}{2}+\widetilde{C}_3\right)=\cos\widetilde{C}_3 \geq \frac{C_4}{n}. \tag{39}$$

В случае 2) с учетом неравенств (29) и (36) имеем

$$\left|\sin\left[\pi n\left(\widetilde{T}-\frac{k}{n}\right)+\widetilde{T}\widetilde{\theta}_n\right]\right| > \frac{2}{\pi}\left|\pi n\left(\widetilde{T}-\frac{k}{n}\right)+\widetilde{T}\widetilde{\theta}_n\right| \geq$$

$$\geq 2n\left|\widetilde{T}-\frac{k}{n}\right|-\left(\widetilde{T}\widetilde{\theta}_n\right)\frac{2}{\pi} \geq \frac{2\delta}{n}-\frac{2\widetilde{C}_3}{n\pi}=\frac{2}{n}\left(\delta-\frac{\widetilde{C}_3}{\pi}\right). \tag{40}$$

Теперь потребуем, чтобы постоянные $\widetilde{T}$, l, b и δ удовлетворяли неравенству

$$\delta-\frac{\widetilde{T}}{2}\left(\frac{bl}{\pi}\right)^2>0, \tag{41}$$

которое, например, при малых l или b, или T всегда имеет место.

Уточним число δ из оценки (41). По условию $\widetilde{T}$ является алгебраическим числом степени два. Тогда оно является корнем многочлена второй степени $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ с целыми коэффициентами, при этом $a_2>0$. Тогда

$$f(x)=(x-\widetilde{T})f_1(x), \tag{42}$$

где $f_1(x)=a_2(x-\widetilde{T}_1)=a_2(x+\widetilde{T}+a_1/a_2)=a_2x+a_2\widetilde{T}+a_1$, при этом $f_1(\widetilde{T})>0$, т. е. $a_1+2a_2\widetilde{T}>0$. Поскольку $f_1(\widetilde{T})\neq 0$, то существует окрестность $(\widetilde{T}-\varepsilon,\,\widetilde{T}+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, такая, что $f_1(x)>0$. Пусть n и k — любая пара натуральных чисел; если $|\widetilde{T}-k/n|<\varepsilon$, то $f_1(k/n)>0$. Тогда из равенства (42) при $x=n/k$ имеем

$$\frac{k}{n}-\widetilde{T}=\frac{f(k/n)}{f_1(k/n)}=\frac{n^2a_0+a_1nk+a_2k^2}{k^2f_1(k/n)}. \tag{43}$$

Числитель дроби (43) есть целое число, отличное от нуля. Следовательно, этот числитель по абсолютной величине не меньше единицы. Обозначим через M верхнюю грань функции $f_1(x)$ на интервале $(\widetilde{T}-\varepsilon,\,\widetilde{T}+\varepsilon)$. Тогда из равенства (43) получим

$$\left|\widetilde{T}-\frac{k}{n}\right| \geq \frac{1}{n^2M}. \tag{44}$$

В случае же $|\widetilde{T}-k/n|\geq\varepsilon$, поскольку $n\geq 1$, имеем

$$\left|\widetilde{T}-k/n\right| \geq \varepsilon/n^2. \tag{45}$$

Тогда из оценок (44) и (45) находим оценку (36) с $\delta=\min\{\varepsilon,1/M\}$. Выразим δ через коэффициенты многочлена $f(x)$. Выберем ε так, чтобы $f_1(\widetilde{T}-\varepsilon)=2a_2\widetilde{T}-a_2\varepsilon+a_1\geq 0$. Отсюда найдем условие $\varepsilon\leq 2\widetilde{T}+a_1/a_2=(2\widetilde{T}a_2+a_1)/a_2$. Положим $\varepsilon=(2\widetilde{T}a_2+a_1)/(a_2\widetilde{l})$, $\widetilde{l}\geq 1$. Далее найдем

$$M=f_1(\widetilde{T}+\varepsilon)=2a_2\widetilde{T}+a_2\varepsilon+a_1=2a_2\widetilde{T}+\frac{2\widetilde{T}a_2+a_1}{\widetilde{l}}+a_1=\frac{\widetilde{l}+1}{\widetilde{l}}(2a_2\widetilde{T}+a_1)$$

и δ из условия $\varepsilon=1/M$. Отсюда получим уравнение относительно $\widetilde{l}$

$$a_2\widetilde{l}^2-(2\widetilde{T}a_2+a_1)^2\widetilde{l}-(2\widetilde{T}a_2+a_1)^2=0,$$

решение которого имеет вид

$$\widetilde{l} = \frac{(2\widetilde{T}a_2 + a_1)^2 + (2\widetilde{T}a_2 + a_1)\sqrt{(2\widetilde{T}a_2 + a_1)^2 + 4a_2}}{2a_2}. \tag{46}$$

Тогда число δ находится по формуле

$$\delta = \frac{2}{2\widetilde{T}a_2 + a_1 + \sqrt{(2\widetilde{T}a_2 + a_1)^2 + 4a_2}} \tag{47}$$

при условии, когда правая часть равенства (46) не меньше единицы. Это условие выполнено, если

$$2\widetilde{T}a_2 + a_1 \geq \sqrt{a_2/2}. \tag{48}$$

Пусть, например, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, т. е. $\widetilde{T}$ является решением уравнения $x^2 - d = 0$, $d \in \mathbb{N}$, $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$, $\widetilde{T} = \sqrt{d}$, тогда $\widetilde{l} > 2$ и

$$\delta = \frac{1}{\widetilde{T} + \sqrt{\widetilde{T}^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{d} + \sqrt{d+1}}.$$

Таким образом, на основании (39) и (40) приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. *Пусть* $\widetilde{T}$ — *иррациональное алгебраическое число степени два,* $b\,l < \pi$ *и выполнены условия* (38) *и* (41), *где* δ *определяется по формуле* (47) *при условии* (48). *Тогда существует положительная постоянная* C_0, *зависящая от* T, l, b *и такая, что при всех* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место оценка*

$$|\delta(n)| > C_0/n. \tag{49}$$

2. Существование решения задачи Дирихле

Если выполнены оценки (23) или (49), то на основании частных решений (8) и (18) решение задачи Дирихле для уравнения (1) можно представить виде в суммы ряда Фурье

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) X_n(x). \tag{50}$$

Далее покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ сумма $u(x,y)$ ряда (50) удовлетворяет условиям (2) и (3).

Лемма 3. *Если выполнены условия леммы* 1, *то при всех* $n > n_0$ *и* $y \in [0,T]$ *справедливы оценки*

$$|u_n(y)| \leq C_1 n(|\,\varphi_n| + |\psi_n|), \tag{51}$$

$$|u_n''(y)| \leq C_2 n^3(|\,\varphi_n| + |\psi_n|), \tag{52}$$

C_i — *здесь и далее положительные постоянные.*

Справедливость оценок (51) и (52) непосредственно вытекает из формулы (18) на основании оценки (23).

С помощью (49) устанавливается

Лемма 4. *Если выполнены условия леммы* 2, *то справедливы оценки* (51) *и* (52), $n \in \mathbb{N}$.

Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда ряд (50) и ряды из производных второго порядка в замкнутой области $\overline{D}$ на основании оценок (51) и (52) мажорируются числовым рядом

$$C_3 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^3(|\varphi_n| + |\psi_n|). \tag{53}$$

Лемма 5. *Пусть* $\varphi(x), \psi(x) \in C^4[0,l]$, $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = 0$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l) = 0$, $i = 0, 2$. *Тогда справедливы следующие представления*:

$$\varphi_n = \varphi_n^{(4)}/\mu_n^4, \quad \psi_n = \psi_n^{(4)}/\mu_n^4, \tag{54}$$

где

$$\varphi_n^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{(4)}(x) \sin \mu_n x \, dx, \quad \psi_n^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{(4)}(x) \sin \mu_n x \, dx,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\varphi_n^{(4)}|^2 \le \|\varphi^{(4)}(x)\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |\psi_n^{(4)}|^2 \le \|\psi^{(4)}(x)\|^2_{L_2[0,l]}. \tag{55}$$

Доказательство. Проинтегрируем по частям четыре раза в интегралах формул (14) и (15). Затем, учитывая условия леммы, получим равенства (54). По условию леммы функции $\varphi^{(4)}(x)$ и $\psi^{(4)}(x)$ непрерывны на $[0,l]$, тогда из теории рядов Фурье известно, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(4)}|^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(4)}|^2$ сходятся и для них справедливы неравенства Бесселя (55). □

При выполнении условий леммы 5 ряд (53) оценивается числовым рядом

$$C_4 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n} \big(|\varphi_n^{(4)}| + |\psi_n^{(4)}|\big). \tag{56}$$

На основании сходимости ряда (56) в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно ряд (50), а также ряды из производных второго порядка в $\overline{D}$.

Пусть для чисел $\widetilde{T}$ из леммы 1 при некоторых $n = p = n_1, n_2, \ldots, n_m$, где $1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_m \le n_0$, n_i, $i = \overline{1,m}$, m — заданные натуральные числа, $\delta(p) = 0$, тогда для разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi_p \cos \lambda_p T = \psi_p, \quad p = n_1, n_2, \ldots, n_m. \tag{57}$$

В этом случае решение задачи Дирихле для уравнения (1) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{n_1-1} + \cdots + \sum_{n=n_{m-1}+1}^{n_m-1} + \sum_{n=n_m+1}^{+\infty} \right) u_n(y) X_n(x) + \sum_p A_p u_p(x,y), \tag{58}$$

где в последней сумме p принимает значения $n_1, n_2 \ldots, n_m$, A_p — произвольные постоянные, функции $u_p(x,y)$ определяются по формуле

$$u_p(x,y) = (\varphi_p \cos \lambda_p y + b_p \sin \lambda_p y) \sin \mu_p x,$$

где b_p — произвольная постоянная. Если в конечных суммах в правой части (58) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть* $\widetilde{T}$ *удовлетворяет условиям леммы* 1 *и функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы* 5. *Тогда если* $\delta(n) \ne 0$ *при* $n = \overline{1, n_0}$, *то существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения* (1) *и это решение определяется рядом* (50); *если*

$\delta(n) = 0$ при некоторых $n = n_1, n_2, \ldots, n_m \le n_0$, то задача Дирихле для уравнения (1) *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (57), *и решение в этом случае определяется в виде суммы ряда* (58).

Аналогично доказательству теоремы 2 на основании леммы 4 устанавливается

Теорема 3. *Пусть число $\widetilde{T}$ удовлетворяет условиям леммы* 2 *и функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы* 5. *Тогда существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения* (1) *и это решение определяется рядом* (50).

Замечание. Отметим, что наличие коэффициента b в уравнении (1) играет важную роль, так как (в отличие от уравнения струны [15]) позволяет доказать теорему единственности и существования решения задачи Дирихле для следующих классов чисел $\widetilde{T} = T/l$: натуральных, рациональных и иррациональных алгебраических чисел степени два.

3. Устойчивость решения задачи Дирихле

Рассмотрим следующие нормы:

$$\|u(x,y)\|_{L_2[0,l]} = \|u(x,y)\|_{L_2} = \left(\int_0^l |u(x,y)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad 0 \le y \le T,$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x,y)|.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *или* 3 *и $\delta(n) \ne 0$ при $n = \overline{1, n_0}$. Тогда для решения задачи* (2)–(5) *справедливы оценки*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \le C_5(\|\varphi'(x)\|_{L_2} + \|\psi'(x)\|_{L_2}), \tag{59}$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} \le C_6(\|\varphi''(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi''(x)\|_{C[0,l]}), \tag{60}$$

где постоянные C_5 и C_6 не зависят от граничных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство. Поскольку система (10) ортонормирована в $L_2[0,l]$, то из формулы (50) и леммы 3 имеем

$$\|u(x,y)\|^2_{L_2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(y) \le C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|\varphi_n| + |\psi_n|)^2 \le 2C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2\varphi_n^2 + n^2\psi_n^2). \tag{61}$$

В силу условий леммы 5 коэффициенты φ_n и ψ_n можно представить в виде

$$\varphi_n = \varphi_n^{(1)}/\mu_n, \quad \psi_n = \psi_n^{(1)}/\mu_n,$$

где

$$\varphi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi'(x) \cos \mu_n x \, dx, \quad \psi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi'(x) \cos \mu_n x \, dx.$$

Тогда из неравенства (61) получим

$$\|u(x,y)\|^2_{L_2} \le \frac{2l^2 C_1^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (|\varphi_n^{(1)}|^2 + |\psi_n^{(1)}|)^2 \le C_5^2 \big(\|\varphi'(x)\|^2_{L_2} + \|\psi'(x)\|^2_{L_2} \big).$$

Отсюда вытекает справедливость оценки (59). $\square$

Пусть (x, y) — произвольная точка из $\overline{D}$. В этом случае снова используя формулу (50) и оценку (51), будем иметь

$$|u(x,y)| \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(y)| \leq C_1 \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} n(|\varphi_n| + |\psi_n|). \tag{62}$$

На основании условий леммы 5

$$\varphi_n = -\varphi_n^{(2)}/\mu_n^2, \quad \psi_n = -\psi_n^{(2)}/\mu_n^2; \tag{63}$$

здесь

$$\varphi_n^{(2)} = \int_0^l \varphi''(x) X_n(x) dx, \quad \psi_n^{(2)} = \int_0^l \psi''(x) X_n(x) dx.$$

Тогда из (62) с учетом представлений (63) получим

$$|u(x,y)| \leq C_1 \left(\frac{l}{\pi}\right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bigl(|\varphi_n^{(2)}| + |\psi_n^{(2)}|\bigr). \tag{64}$$

Из оценки (64) на основании неравенства Коши–Буняковского и равенства $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ будем иметь

$$|u(x,y)| \leq C_1 \left(\frac{l}{\pi}\right)^{3/2} \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(2)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(2)}|^2 \right)^{1/2} \right] =$$

$$= \frac{C_1 l^{3/2}}{\sqrt{6\pi}} \bigl(\|\varphi''(x)\|_{L_2} + \|\psi''(x)\|_{L_2} \bigr) \leq C_6 \bigl(\|\varphi''(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi''(x)\|_{C[0,l]} \bigr), \tag{65}$$

так как

$$\|\varphi''(x)\|_{L_2} \leq \sqrt{l} \max_{0 \leq x \leq l} |\varphi''(x)| \leq \sqrt{l} \|\varphi''(x)\|_{C[0,l]}, \quad \|\psi''(x)\|_{L_2} \leq \sqrt{l} \|\psi''(x)\|_{C[0,l]}.$$

Тем самым из (65) следует оценка (60).

Литература

[1] Hadamard J. *Equations aux derivees partielles le cas hyperbolique*, L'Enseignement Math. **35** (1), 25–29 (1936).

[2] Huber A. *Die erste Randwertaufgabe für geschlossene Bereiche bei der Gleichung $u_{xy} = f(x, y)$*, Monatsh. Math. und Phys. **39**, 79–100 (1932).

[3] Mangeron D. *Sopra un problema al contorno per un'equazione differeziale alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche realidoppie*, Rend. Accad. sci. fis. mat. Soc. naz. sci. lett. arti Napoli (2), 29–40 (1932).

[4] Bourgin P.G., Duffin R. *The Diriclet problem the virbating string equation*, Bull. Amer. Math. Soc. **45** (12), 851–858 (1939).

[5] Bourgin P.G. *The Diriclet problem the damped wave equation*, Duke. Math. J. (7), 97–120 (1940).

[6] Jonh F. *Diriclet problem for a hyperbolic equation*, Amer. J. Math. **63** (1), 141–154 (1941).

[7] Соболев С.Л. *Пример корректной задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе*, ДАН СССР **73** (4), 707–709 (1956).

[8] Александрян Р.А. *О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге*, ДАН СССР **73** (5), 869–872 (1950).

[9] Вахания Н.Н. *Об одной краевой задаче с данными на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны*, ДАН СССР. **116** (6), 906–909 (1957).

[10] Березанский Ю.М. *О задаче Дирихле для уравнения колебания струны*, Украинск. матем. журн. **12** (4), 363–372 (1960).

[11] Мосолов П.П. *О задаче Дирихле для уравнений в частных производных*, Изв. вузов. Матем., №3, 213–218 (1960).

[12] Арнольд В.И. *Малые знаменатели*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **25**, 21–86 (1961).

[13] Арнольд В.И. *Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике*, УМН **16**. Вып. 6 (114), 91–192 (1963).
[14] Капитонов Б.В. *О разрешимости задачи Дирихле для телеграфного уравнения*, Сиб. матем. журн. **17** (2), 273–281 (1976).
[15] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков*, Матем. заметки **97** (2), 262–276 (2015).
[16] Березанский Ю.М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов* (Наук. Думка, Киев, 1965).
[17] Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. *Жак Адамар — легенда математики* (МЦНМО, М., 2008).
[18] Арнольд В.И. *Математическое понимание природы*. 2 изд. (МЦНМО, М., 2010).
[19] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области*, Докл. РАН **413** (1), 23–26 (2007).
[20] Моисеев Е.И. *О разрешимости одной нелокальной краевой задачи*, Дифференц. уравнения **37** (11), 1565–1567 (2001).
[21] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа*, Матем. заметки **87** (6), 907–918 (2010).
[22] Хинчин А.Я. *Цепные дроби* (Наука, М., 1978).
[23] Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции* (М., 1966).

Ю.К. Сабитова

*Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
пр. Ленина, д. 49, г. Стерлитамак, 453100, Россия,*

`e-mail:` sabitovauk@rambler.ru

Yu.K. Sabitova

The Dirichlet problem for telegraph equation in a rectangular domain

Abstract. We investigate the Dirichlet problem for telegraph equation in rectangular domain. We establish a criterion of uniqueness. The solution to the problem is constructed in the form of the sum of orthogonal series. In substantiation of convergence of the series there appears the problem of small denominators. In connection with this we establish the estimates of separation from zero of denominators with the corresponding asymptotics which allow to substantiate the existence of a regular solution and prove its stability depending on boundary functions.

Keywords: telegraph equation, the Dirichlet problem, spectral method, criterion of uniqueness, small denominators, stability.

Yu.K. Sabitova

*Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
49 Lenin Ave., Sterlitamak, 453100 Russia,*

`e-mail:` sabitovauk@rambler.ru