ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 8 (435)

УДК 517.546

Г.Н. КАМЫШОВА

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МОКАНУ

В данной работе решена задача об оценке модуля отношения однолистной функции и ее производной, заданных в двух различных вещественных точках круга $E = \{z : |z| < 1\}$. При решении использованы вариационный метод Г.М.Голузина и сочетание метода параметрических представлений Левнера с принципом максимума Л.С. Понтрягина.

Обозначим через S класс всех голоморфных однолистных в круге E функций $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$.

В 1966 г. П. Мокану на конференции по аналитическим функциям в г. Лодзь (Польша) поставил экстремальную задачу, сводящуюся к задаче о максимуме

$$I(f) = \left|\frac{f'(z_1)}{f(z_2)}\right|, \quad f \in S.$$

В 1974 г. П. Мокану, М. Рид, Е. Злоткевич [1] оценили $I(f)$ для типично вещественных f и вещественных z_1, z_2. Позднее эти результаты были обобщены Д. Рипеану для комплексных z_1, z_2 из специальных областей в E. Так как экстремальные функции в [1] однолистны, то тем самым решена одновременно задача о максимуме $I(f)$ при вещественных z_1, z_2 в классе $S_R \subset S$ однолистных функций с вещественными коэффициентами. Для более общей задачи об экстремуме $f'(r_1)$ при фиксированных значениях $f(r_1)$, $f(r_2)$ были построены в [2] точные мажоранты с помощью метода модулей семейств кривых.

Начиная со статьи [3], в теории однолистных функций успешно применяются методы оптимального управления. Глубокие результаты в этом направлении были получены Д.В. Прохоровым, который предложил рассматривать множества значений систем функционалов в качестве областей достижимости для управляемых систем, индуцированных уравнением Левнера–Куфарева. Полученные результаты наиболее полно отражены в статье [4] и монографии [5]. Однако задачи об оценках функционалов, сводящиеся к построению проекций множеств достижимости на различные гиперплоскости, приводят к краевым задачам для управляемых систем. Избежать трудностей позволяет применение наряду с методом оптимального управления вариационного метода. Это сочетание было предложено в [6] и позволило сводить краевые задачи к задачам Коши. Вариационным методом и методом оптимального управления в данной работе решена задача об оценке $I(f)$ в классе S для вещественных z_1, z_2.

1. Дифференциальные уравнения для экстремальных функций

Пусть $f(z)$ — функция, доставляющая максимум функционалу $I(f)$. С помощью вариационной формулы Г.М. Голузина ([7], с. 120) устанавливаем, что $f(z) \in S$ отображает круг E на плоскость с кусочно-аналитическими разрезами и, будучи непрерывно продолженной на замыкание $\overline{E}$ круга E, удовлетворяет в $\overline{E}$ дифференциальному уравнению:

$$\frac{w(2w_1 - w_2) - w_1^2}{w(w_1 - w)^2(w_2 - w)} dw^2 = \frac{R(z)}{z} dz^2, \tag{1}$$

где $w = f(z)$, $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$,

$$R(z) = \frac{A}{z_1 - z} - \frac{z}{(z_1 - z)^2} - \frac{B}{z_2 - z} + \frac{\overline{Bz_2}}{1 - z\overline{z_2}} - \frac{\overline{Az_1}}{1 - z\overline{z_1}} - \frac{\overline{z_1}(2 - z\overline{z_1})}{(1 - z\overline{z_1})^2} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{4} C_k z^k}{(z_1 - z)^2(1 - z\overline{z_1})^2(z_2 - z)(1 - z\overline{z_2})}, \quad (2)$$

$A = f''(z_1)z_1/f'(z_1)$, $B = f'(z_2)z_2/f(z_2)$, C_k — константы, зависящие от A, B, z_1, z_2,

$$C_0 = (A - \overline{A}|z_1|)z_1 z_2 - (B - \overline{B}|z_2|)z_1^2 - 2|z_1|z_1 z_2,$$

$$C_4 = (A - \overline{A}|z_1|)\overline{z_1 z_2} - (B - \overline{B}|z_2|)\overline{z_1}^2 - 2|z_1|\overline{z_1 z_2} + (\operatorname{Im} B)(\overline{z_2}(1 + |z_1|) - \overline{z_1}(1 + |z_2|)).$$

Пусть $z^* = z\,e^{i\theta}$, тогда вместе с $f(z)$ классу S принадлежит функция

$$f^*(z) = e^{-i\theta} f(z^*) = f(z) + i\theta(zf'(z) - f(z)) + O(\theta^2).$$

Пользуясь этой вариационной формулой, устанавливаем, что

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B. \quad (3)$$

Используем еще одну вариационную формулу в классе S ([8], с. 149)

$$f^*(z) = f(z) + h\left(f(z) - zf'(z)\frac{1 + ze^{i\theta}}{1 - ze^{i\theta}}\right) + O(h^2), \quad 0 \le \theta < 2\pi,\ h > 0,\ f \in S.$$

С помощью нее получаем, что для экстремальной функции $f(z)$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\theta} R(e^{-i\theta})\right) \le 0. \quad (4)$$

Так как экстремальная функция $f(z)$ отображает E на плоскость с разрезом, имеющим по крайней мере одну конечную концевую точку, то $R(z)$ имеет по крайней мере один двойной нуль η_1, $|\eta_1| = 1$. Если $\eta_2 \in E$ — простой нуль $R(z)$, то из равенства $z^2 R(z) = \overline{R(1/\overline{z})}$ следует, что $1/\overline{\eta}_2$ также является простым нулем $R(z)$. С учетом выше сказанного запишем

$$R(z) = \frac{\mu(z - \eta_1)^2(z - \eta_2)(z - 1/\overline{\eta}_2)}{(z_1 - z)^2(1 - z\overline{z}_1)^2(z_2 - z)(1 - z\overline{z}_2)}.$$

Используя условие (4), получаем $\mu = C(\eta_1\eta_2)^{-1}$, $C \ge 0$. Таким образом,

$$R(z) = \frac{C(\eta_1\eta_2)^{-1}(z - \eta_1)^2(z - \eta_2)(z - 1/\overline{\eta_2})}{(z_1 - z)^2(1 - z\overline{z}_1)^2(z_2 - z)(1 - z\overline{z}_2)}. \quad (5)$$

Вычисляя коэффициенты при степенях z, получим $C_0 = \overline{C_4}$. Из этого равенства с учетом условия (3) получаем $[(1 - z_1)(z_1(1 + |z_2|^2) - z_2(1 + |z_1|^2))] \cdot \operatorname{Im} B = 0$. Выражение в квадратных скобках не равно нулю, следовательно, $\operatorname{Im} B = 0$ и отсюда делаем вывод, что константы A, B действительны.

Имеет место следующая система уравнений,связывающая параметры A, B с η_1, η_2

$$C(z_1 - \eta_1)^2(z_1 - \eta_2)(z_1 - 1/\overline{\eta_2}) = z_1(1 - |z_1|^2)^2(z_1 - z_2)(1 - z_1\overline{z_2})\eta_1\eta_2, \quad (6)$$

$$C(z_2 - \eta_1)^2(z_2 - \eta_2)(z_2 - 1/\overline{\eta_2}) = -B(1 - |r_2|^2)(z_1 - z_2)^2(1 - z_2\overline{z_1})^2\eta_1\eta_2, \quad (7)$$

$$C\eta_1/\overline{\eta_2} = Az_1 z_2(1 - |z_1|^2) - Bz_1^2(1 - |r_2|^2) - 2z_1|z_1|^2 z_2, \quad (8)$$

которая получается из (2), (5) при стремлении z соответственно к z_1, z_2, 0.

Теорема 1. *Экстремальные функции в задаче о* $\max I(f)$, $f \in S$, $z_1, z_2 \in E$, *удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$\frac{w(2w_1 - w_2) - w_1^2}{w(w_1 - w)^2(w_2 - w)} dw^2 = \frac{R(z)}{z} dz^2 \tag{9}$$

с $R(z)$ *в форме* (5) *и отображают единичный круг на плоскость с разрезами, имеющими не более двух концевых конечных точек.*

В случае, когда $z_1 = r_1$, $z_2 = r_2$ вещественны, конкретизируем вид $R(z)$, а также явно выразим некоторые параметры задачи через r_1, r_2. Имеет место равенство $C_0 = C_4 = A(1 - r_1^2)r_1 r_2 - B(1 - r_2^2)r_1^2 - 2r_1^3 r_2$. Отсюда и из соотношений $C_0 = (C\eta_1)/\overline{\eta_2} = C/(\eta_1\eta_2) = C_4$ делаем вывод, что $\arg\eta_2 = -\arg\eta_1$. Таким образом, $\eta_1 = e^{i\varphi}$, $\eta_2 = r_0 e^{-i\varphi}$, $r_0 = |\eta_2|$, $0 \le r_0 < 1$. Система (6)–(8) перепишется в виде

$$C(r_1 - \eta_1)^2(r_1 - \eta_2)(r_1 - 1/\overline{\eta_2}) = r_1(1 - r_1^2)^2(r_1 - r_2)(1 - r_1 r_2)\eta_1\eta_2, \tag{10}$$

$$C(r_2 - \eta_1)^2(r_2 - \eta_2)(r_2 - 1/\overline{\eta_2}) = -B(1 - r_2^2)(r_1 - r_2)^2(1 - r_1 r_2)^2\eta_1\eta_2, \tag{11}$$

$$C\eta_1/\overline{\eta_2} = A r_1 r_2(1 - r_1^2) - B r_1^2(1 - r_2^2) - 2r_1^3 r_2. \tag{12}$$

Выражая B из уравнения (11) с учетом того, что $\operatorname{Im} B = 0$, получаем условие

$$(r_2^2 - 1)r_2(r_0 - 1)^2 \sin\varphi = 0.$$

Отсюда либо $r_0 = 1$, либо $\varphi = 0, \pi$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Экстремальные функции в задаче о* $\max I(f)$, $f \in S$, *при* $z_1 = r_1$, $z_2 = r_2$, $0 < r_1, r_2 < 1$, *удовлетворяют дифференциальному уравнению* (9) *с функцией* $R(z)$ *одного из трех видов*:

$$R(z) = \frac{C(z - \eta_1)^2(z - \overline{\eta}_1)^2}{z(r_1 - z)^2(1 - zr_1)^2(r_2 - z)(1 - zr_2)}, \quad |\eta_1| = 1,$$

$$R(z) = \frac{(C/r_0)(z - 1)^2(z - \eta_2)(z - 1/\eta_2)}{z(r_1 - z)^2(1 - zr_1)^2(r_2 - z)(1 - zr_2)}, \quad \eta_2 \in (-1, 1),$$

$$R(z) = \frac{(C/r_0)(z + 1)^2(z + \eta_2)(z + 1/\eta_2)}{z(r_1 - z)^2(1 - zr_1)^2(r_2 - z)(1 - zr_2)}, \quad \eta_2 \in (-1, 1).$$

2. Формализация задачи

В дальнейшем будем полагать $z_1 = r_1$, $z_2 = r_2$. Перейдем к формализации задачи о максимуме $I(f)$ в классе S как задачи оптимального управления. Известно, что любая функция класса S представима в виде

$$f(z) = \lim_{t \to \infty} w(z, t), \tag{13}$$

где $w(z, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Левнера–Куфарева

$$\frac{dw}{dt} = w(1 - P(w, t))$$

с начальным условием $w(z, 0) = z$. Здесь $P(w, t)$ — аналитическая при фиксированном t функция, $P(0, t) = 1$, которая при почти всех (п. в.) $t \in [0, \infty)$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} P(w, t) > 0$.

Обозначим $x_1(t) = \log|w(r_1,t)|$, $x_2(t) = \arg w(r_1,t)$, $x_3(t) = \log|w(r_2,t)|$, $x_4(t) = \arg w(r_2,t)$, $x_5(t) = |w'_z(r_1,t)/w(r_2,t)|$ и выбираем непрерывную по t ветвь $\arg w(r_j,t)$, $j = 1,2$, так, что при $t = 0$ значение аргумента равно нулю. Тогда

$$\frac{dx_1}{dt} = 1 - \operatorname{Re} P(e^{x_1+ix_2},t) = b_1(t,P,x_1,x_2), \qquad x_1(0) = \log r_1, \tag{14}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -\operatorname{Im} P(e^{x_1+ix_2},t) = b_2(t,P,x_1,x_2), \qquad x_2(0) = 0, \tag{15}$$
$$\frac{dx_3}{dt} = 1 - \operatorname{Re} P(e^{x_3+ix_4},t) = b_3(t,P,x_3,x_4), \qquad x_3(0) = \log r_2, \tag{16}$$
$$\frac{dx_4}{dt} = -\operatorname{Im} P(e^{x_3+ix_4},t) = b_4(t,P,x_3,x_4), \qquad x_4(0) = 0, \tag{17}$$
$$\begin{aligned}\frac{dx_5}{dt} &= \operatorname{Re}(P(e^{x_3+ix_4},t) - P(e^{x_1+ix_2},t)- \\ &\quad - e^{x_1+ix_2}P'_w(e^{x_1+ix_2},t)) = b_5(t,P,x_1,x_2,x_3,x_4), \quad x_5(0) = -\log r_2.\end{aligned} \tag{18}$$

Для нахождения $\max I(f)$ сначала рассмотрим задачу о нахождении границы множества достижимости для управляемой динамической системы (14)–(18). Следуя принципу максимума Л.С. Понтрягина [9], рассмотрим функцию

$$H(t,P,\overline{x},\overline{\psi}) = \sum_{k=1}^{5} \psi_k b_k, \quad \overline{\psi} = (\psi_1,\dots,\psi_5), \quad \overline{x} = (x_1,\dots,x_5),$$

где функции ψ_j, $j = \overline{1,5}$, являются решением сопряженной гамильтоновой системы

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1,5}.$$

Запишем сопряженную гамильтонову систему в виде

$$\begin{aligned}\frac{d(\psi_1 - i\psi_2)}{dt} &= (\psi_1 - i\psi_2 + 2)P'_w w|_{z=r_1} + w^2 P''_w|_{z=r_1}, \\ \frac{d(\psi_3 - i\psi_4)}{dt} &= (\psi_3 - i\psi_4 + 1)P'_w w|_{z=r_2}.\end{aligned}$$

Задача об оценке $I(f)$ эквивалентна поиску проекции множества достижимости $\overline{x}(\infty)$ на прямую $x_5(\infty)$. Вектор $\overline{\psi}(\infty)$ является ортогональным к опорной плоскости для этого множества достижимости, следовательно, в задаче на $\max I(f)$, не уменьшая общности, можно положить $\psi_5 = 1$. В этом случае возникают условия трансверсальности на правом конце $\psi_k(\infty) = 0$, $k = \overline{1,4}$.

Из дифференциального уравнения Левнера–Куфарева получаем

$$wP'_w = \frac{d}{dt}\log\frac{w}{w'_z}; \quad w^2 P''_w = \frac{w}{w'_z}\frac{d}{dt}\left(\frac{2w'_z}{w} - \frac{w''_z}{w'_z}\right).$$

Делая замену и решая данную систему с учетом условий трансверсальности, находим

$$\begin{gathered}\psi_1 - i\psi_2 = \left(\frac{f''(r_1)}{f'(r_2)} - \frac{w''_z}{w'_z}\right)\frac{w}{w'_z}\Big|_{z=r_1}, \quad \psi_3 - i\psi_4 = -\frac{f'(r_2)w}{f(r_2)w'_z}\Big|_{z=r_2} + 1, \quad \psi_5 = 1, \\ (\psi_1 - i\psi_2)(0) = A, \quad (\psi_3 - i\psi_4)(0) = -B + 1.\end{gathered} \tag{19}$$

Из теоремы 2 следует, что экстремальная функция отображает единичный круг на плоскость с разрезами, имеющими не более двух концевых конечных точек, а прообраз концевой конечной точки является двойным нулем соответствующего квадратичного дифференциала в правой части дифференциального уравнения теоремы 2. Следовательно, функция $P(w,t)$ в уравнении Левнера–Куфарева имеет один из двух видов:

$$P(w,t) = \frac{1+k(t)e^{-t}w}{1-k(t)e^{-t}w}, \quad |k(t)| = 1, \tag{20}$$

$$P(w,t) = (1-\lambda)\Big(\frac{1+k_1(t)e^{-t}w}{1-k_1(t)e^{-t}w}\Big) + \lambda\Big(\frac{1+k_2(t)e^{-t}w}{1-k_2(t)e^{-t}w}\Big), \quad 0<\lambda<1. \tag{21}$$

Будем понимать непрерывные функции $k(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$, $t\in[0,\infty)$, как управления. Существование оптимальных управлений гарантируется существованием экстремальной функции $f(z)$. Тогда из теоремы 2 и геометрического смысла управлений следует, что возможны лишь три случая: а) $k^*(0)=1$, б) $k^*(0)=-1$, в) $k_1^*(0)=\overline{k_2^*(0)}$.

3. Решение экстремальной задачи

Для $0<r_1<r_2<1$ случай в) места не имеет, т. к. при этом правая часть равенства (10)

$$C|r_1-\eta_1|^2 = r_1(1-r_1^2)^2(r_1-r_2)(1-r_1r_2)$$

строго отрицательна, что приводит к противоречию. Таким образом, в этом случае экстремальная функция отображает единичный круг на плоскость с разрезом, имеющим одну концевую конечную точку. Тогда $P(w,t)$ имеет вид (20), т. е. вместо дифференциального уравнения Левнера–Куфарева рассматриваем дифференциальное уравнение Левнера. Исходя из принципа максимума Л.С. Понтрягина, для таких $P(w,t)$ и экстремальных k^* имеем

$$\frac{\partial H}{\partial k}\Big|_{k=k^*} = 0.$$

Таким образом,

$$\mathrm{Re}\Big((\psi_1-i\psi_2)\frac{w}{(1-e^{-t}wk^*)^2}\Big|_{z=r_1} + \frac{2w}{(1-e^{-t}wk^*)^3}\Big|_{z=r_1} + (\psi_3-i\psi_4-1)\frac{w}{(1-e^{-t}wk^*)^2}\Big|_{z=r_2}\Big) = 0.$$

Отсюда при $t=0$, а также учитывая $k^*(0)=\eta_1$ и (19), получим уравнение

$$\mathrm{Re}\Big(A\frac{r_1}{(1-r_1\eta_1)^2} + \frac{2r_1}{(1-r_1\eta_1)^3} - B\frac{r_2}{(1-r_2\eta_1)^2}\Big) = 0. \tag{22}$$

Параметры A и B зависят от значения $k^*(0)=\eta_1$, которое определяется условием а) или б). Рассмотрим систему (10)–(12), (22) при $k^*(0)=\eta_1=1$, $\eta_2=r_0$, обозначая при этом $A=A_0$, $B=B_0$,

$$(C/r_0)(r_1-1)^2(r_1-r_0)(r_1-1/r_0) = r_1(1-r_1^2)^2(r_1-r_2)(1-r_1r_2), \tag{10'}$$

$$(C/r_0)(r_2-1)^2(r_2-r_0)(r_2-1/r_0) = -B_0(1-r_2^2)(r_1-r_2)^2(1-r_1r_2)^2, \tag{11'}$$

$$C/r_0 = A_0r_1r_2(1-r_1^2) - B_0r_1^2(1-r_2^2) - 2r_1^3r_2, \tag{12'}$$

$$\mathrm{Re}\Big(A_0\frac{r_1}{(1-r_1)^2} + \frac{2r_1}{(1-r_1)^3} - B_0\frac{r_2}{(1-r_2)^2}\Big) = 0. \tag{22'}$$

Из уравнения (10$'$) находим

$$\frac{C}{r_0} = \frac{r_1(1+r_1)^2(r_1-r_2)(1-r_1r_2)}{(r_1-r_0)(r_1-1/r_0)}.$$

Подставляя C/r_0 в (11$'$), имеем

$$B_0 = -\frac{r_1(1+r_1)^2(r_1-r_2)(1-r_1r_2)}{(r_1-r_0)(r_1-1/r_0)}\frac{(r_2-r_0)(r_2-1/r_0)(1-r_2)}{(r_1-r_2)^2(1-r_1r_2)^2(1+r_2)}. \tag{23}$$

Подставляя $C/r_0, B_0$ в $(12')$, получим

$$A_0 = \frac{r_1(1+r_1)^2(r_1-r_2)(1-r_1r_2)}{(r_1-r_0)(r_1-1/r_0)} \times$$
$$\times\left(\frac{1}{r_1r_2(1-r_1^2)} - \frac{(r_2-1)^2r_1(r_2-r_0)(r_2-1/r_0)}{r_2(1-r_1^2)(r_1-r_2)^2(1-r_1r_2)^2}\right) + \frac{2r_1^2}{1-r_1^2}. \quad (24)$$

Подставляя найденные таким образом A_0, B_0 в уравнение $(22')$, после соответствующих вычислений получим относительно r_0 уравнение $r_0 + 1/r_0 = M/N$, где

$$M = \frac{(1+r_1)(r_1-r_2)(1-r_1r_2)}{r_2(1-r_1)^3} + \frac{(r_2^2+1)(1+r_1)^2}{(r_1-r_2)(1-r_1r_2)} \times$$
$$\times\left(\frac{r_2}{1-r_2^2} - \frac{r_1^2(r_2-1)^2}{r_2(1-r_1^2)(1-r_1)^2}\right) + \frac{2(r_1^2+1)(r_1^2+r_1+1)}{(1-r_1)^3(1+r_1)},$$
$$N = \frac{r_2(1+r_1)^2}{(r_1-r_2)(1-r_1r_2)}\left(\frac{r_2}{1-r_2^2} - \frac{r_1^2(r_2-1)^2}{r_2(1-r_1^2)(1-r_1)^2}\right) + \frac{2r_1(r_1^2+r_1+1)}{(1-r_1)^3(1+r_1)}.$$

Тогда

$$\frac{C}{r_0} = \frac{r_1(1-r_1^2)(1-r_1r_2)(1-r_2^2)N}{(1+r_1r_2)}$$

и

$$\frac{(r_2^2+1)N - r_2M}{N} = \frac{(r_1-r_2)(1-r_1r_2)(1+r_1^2)}{(1-r_1)^3(1+r_1)N}.$$

Подставляя найденные выражения в (23), (24), после соответствующих вычислений получим

$$B_0 = -\frac{r_1(1-r_2)^2(1+r_1^2)}{(1+r_1r_2)(r_1-r_2)(1-r_1)^2},$$
$$A_0 = \frac{(1+r_1)^2r_2}{(1+r_1r_2)(r_1-r_2)} - \frac{2r_1(1-r_2^2)(r_1^2+r_1+1)}{(1+r_1r_2)(r_1-r_2)(1-r_1^2)} + \frac{2r_1^2}{1-r_1^2}.$$

Далее рассмотрим систему (10)–(12), (22) при $k^*(0) = \eta_1 = -1$, $\eta_2 = -r_0$, обозначая при этом $A = A_\pi$, $B = B_\pi$,

$$(C/r_0)(r_1+1)^2(r_1+r_0)(r_1+1/r_0) = r_1(1-r_1^2)^2(r_1-r_2)(1-r_1r_2), \quad (10'')$$
$$(C/r_0)(r_2+1)^2(r_2+r_0)(r_2+1/r_0) = -B_\pi(1-r_2^2)(r_1-r_2)^2(1-r_1r_2)^2, \quad (11'')$$
$$C/r_0 = A_\pi r_1r_2(1-r_1^2) - B_\pi r_1^2(1-r_2^2) - 2r_1^3r_2, \quad (12'')$$
$$\mathrm{Re}\left(A_\pi\frac{r_1}{(1+r_1)^2} + \frac{2r_1}{(1+r_1)^3} - B_\pi\frac{r_2}{(1+r_2)^2}\right) = 0. \quad (22'')$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, из системы $(10'')$–$(12'')$, $(22'')$ находим

$$B_\pi = -\frac{r_1(1+r_2)^2(1+r_1^2)}{(1+r_1r_2)(r_1-r_2)(1+r_1)^2},$$
$$A_\pi = \frac{(1-r_1)^2r_2}{(1+r_1r_2)(r_1-r_2)} - \frac{2r_1(1-r_2^2)(r_1^2-r_1+1)}{(1+r_1r_2)(r_1-r_2)(1-r_1^2)} + \frac{2r_1^2}{1-r_1^2}.$$

Выбор начальных условий A_0, B_0 или A_π, B_π зависит от знака разности

$$H(0,1,\overline{x},(A_0,B_0)) - H(0,-1,\overline{x},(A_\pi,B_\pi)).$$

Второе заключение принципа максимума Понтрягина состоит в том, что

$$H(t,k^*(t),\overline{x},\overline{\psi}) = \int_\infty^t \left[\sum_{k=1}^5 \psi_k \frac{\partial b_k}{\partial t}\right] dt.$$

Отсюда при $t = 0$ получаем

$$H(k^*(0), \overline{x}, \overline{\psi}) = \mathrm{Re}\Big(\int_0^\infty \Big((\psi_1 - i\psi_2 + 1)\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial w P'_w}{\partial t} + (\psi_3 - i\psi_4 - 1)\frac{\partial P}{\partial t} \Big) dt \Big) =$$
$$= A(k^*(0)) - B(k^*(0)) + 1.$$

Таким образом,

$$H(0, 1, \overline{x}, (A_0, B_0)) - H(0, -1, \overline{x}, (A_\pi, B_\pi)) = A_0 - A_\pi + B_\pi - B_0.$$

Подставляя A_0, B_0, A_π, B_π, найденные ранее, запишем

$$H(k^*(0), \overline{x}, (A_0, B_0))\big|_{k^*(0)=1} - H(k^*(0), \overline{x}, (A_\pi, B_\pi))\big|_{k^*(0)=-1} = \frac{8r_1^2(r_1 - r_2)}{(1 + r_1 r_2)(1 - r_1^2)^2} < 0.$$

Следовательно, при $0 < r_1 < r_2 < 1$ $k^*(0) = -1$.

Итак, P в функции $H(t, P, \overline{x}, \overline{\psi})$ дается формулой (20) и $k^*(t)$ — единственный корень уравнения $\dfrac{\partial H}{\partial k} = 0$, удовлетворяющий условию $k^*(0) = -1$. Пусть $(x_1^*(t), \ldots, x_5^*(t))$ — решение задачи Коши

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = b_1(t, k^*, x_1, x_2), && x_1(0) = \log r_1, && \frac{dx_2}{dt} = b_2(t, k^*, x_1, x_2), \ \ x_2(0) = 0,\\
&\frac{dx_3}{dt} = b_3(t, k^*, x_3, x_4), && x_3(0) = \log r_2, && \frac{dx_4}{dt} = b_4(t, k^*, x_3, x_4), \ \ x_4(0) = 0,\\
&\frac{dx_5}{dt} = b_5(t, k^*, x_1, x_2, x_3, x_4), && x_5(0) = -\log r_2,
\end{aligned}$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}\Big|_{k=k^*}, \quad j = \overline{1,5}, \quad (\psi_1 - i\psi_2)(0) = A_\pi, \quad (\psi_3 - i\psi_4)(0) = -B_\pi + 1, \quad \psi_5(0) = 1.$$

В случае $0 < r_2 < r_1 < 1$ можем записать $\left|\frac{f'(r_1)}{f(r_2)}\right| = \left|\frac{f'(r_1)}{f(r_1)}\right| \left|\frac{f(r_1)}{f(r_2)}\right|$. Оценки функционалов $\left|\frac{f'(r_1)}{f(r_1)}\right|$, $\left|\frac{f(r_1)}{f(r_2)}\right|$ были найдены ранее ([8], сс. 33, 81), а также было показано, что в этом случае экстремальной является функция Кебе $f(z) = z/(1 - z)^2$.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть* $f \in S$, *тогда* а) *если* $0 < r_1 < r_2 < 1$, *то*

$$\left|\frac{f'(r_1)}{f(r_2)}\right| \le x_5^*(\infty),$$

б) *если* $0 < r_2 < r_1 < 1$, *то*

$$\left|\frac{f'(r_1)}{f(r_2)}\right| \le \frac{(1 - r_2)^2(1 + r_1)}{r_2(1 - r_1)^3}.$$

Экстремальные функции в случаях а) *и* б) *отображают единичный круг на плоскость с разрезом, имеющим одну концевую конечную точку, в частности, в случае* б) *это функция Кебе* $f(z) = z/(1 - z)^2$.

Литература

1. Mocanu P., Reade M., Zlotkiewicz E. *On the functional* $[f(z_1)/f'(z_2)]$ *for typically-real functions* // Math. Rev. anal. numer. et teor. approxim. – 1974. – V. 2. – № 2. – P. 209–214.
2. Васильев А.Ю., Камышова Г.Н. *Модули полосообразных областей в решении изопериметрической задачи конформного отображения* // Сиб. матем. журн. – 1996. – Т. 37. – № 1. – С. 60–69.
3. Александров И.А., Попов В.И. *Оптимальные управления и однолистные функции* // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. – 1968–1970. – Ser. A. – Т. 22–24. – P. 13–20.
4. Прохоров Д.В. *Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций* // Матем. сб. – 1990. – Т. 181. – № 12. – С. 1659–1677.
5. Prokhorov D.V. *Reachable set methods in extremal problems for univalent functions.* – Saratov: Saratov Univ., 1993. – 228 p.
6. Васильев А.Ю. *Вариационные методы и изопериметрические теоремы покрытия для однолистных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 1. – С. 14–18.
7. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М: Наука, 1966. – 628 с.
8. Милин И.М. *Однолистные функции и ортонормальные системы.* – М.: Наука. – 1971. – 256 с.
9. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* – М.: Наука, 1976. – 392 с.

Саратовский государственный университет

Поступила 26.09.1995