

Р.В. НАММ, Г.И. ЦОЙ

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КВАЗИВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА СИНЬОРИНИ

Аннотация. Для решения полукоэрцитивного квазивариационного неравенства Синьорини, соответствующего контактной задаче теории упругости с трением, рассматривается метод последовательных приближений. Возникающие на каждом внешнем шаге итеративного процесса вспомогательные задачи с заданным трением решаются методом Удзавы с итеративной проксимальной регуляризацией модифицированного функционала Лагранжа. Исследуется стабилизация последовательности вспомогательных конечно-элементных решений на внешних шагах метода последовательных приближений. Приводятся результаты численных расчетов.

Ключевые слова: контактная задача теории упругости, функционал Лагранжа, седловая точка, метод Удзавы, проксимальная регуляризация, метод конечных элементов.

УДК: 519.626

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается квазивариационное неравенство Синьорини, соответствующее контактной задаче теории упругости с трением между упругим телом Ω и абсолютно твердой опорой [1]–[3]. Для решения данной задачи применяется метод последовательных приближений. На каждом внешнем шаге данного метода возникает вспомогательная контактная задача с заданным трением. Для решения полукоэрцитивной вспомогательной задачи рассматривается итерационный метод Удзавы, основанный на модифицированном функционале Лагранжа, исследованный в работе [4].

Для преодоления проблемы вырожденности (полукоэрцитивности) в работе [5] исследуется метод итеративной проксимальной регуляризации модифицированного функционала Лагранжа. В данной работе рассматривается конечно-элементное решение задачи. На численном примере исследуется сходимость метода последовательных приближений.

1. ПОСТАНОВКА КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ТРЕНИЕМ

Пусть $\Omega \in R^2$ — ограниченная область с достаточно регулярной границей Γ , $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_0 , Γ_1 , Γ_2 — непустые открытые попарно непересекающиеся подмножества Γ (см. рис. 1). Рассмотрим контактную задачу теории упругости с трением между упругим телом Ω и абсолютно твердой опорой.

Поступила 21.05.2015

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Дальневосточного отделения Российской Академии наук, № 15-I-4-075.

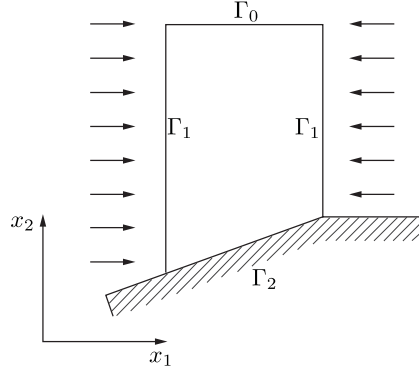


Рис. 1. Контакт между упругим телом и абсолютно твердой опорой

Для вектора перемещений $v = (v_1, v_2)$ определим тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2,$$

и тензор напряжений¹ $\sigma_{ij}(v) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(v)$, где c_{ijkl} — ограниченные измеримые функции в Ω , удовлетворяющие условиям симметрии $c_{ijkl} = c_{jilm} = c_{kmlj}$, $i, j, k, m = 1, 2$.

Пусть заданы $f = (f_1, f_2)$ — объемная сила, $p = (p_1, p_2)$ — боковое усилие, F — коэффициент трения, $F \geq 0$ на Γ_2 . Тогда краевая постановка данной задачи будет следующей [1]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= f_i \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \\ u_n &= 0, \quad \sigma_t = 0 \quad \text{на } \Gamma_0, \\ \sigma_{ij}n_j &= p_i \quad \text{на } \Gamma_1, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

В зоне контакта Γ_2 между упругим телом и абсолютно твердой опорой задаются краевые условия

$$\begin{aligned} u_n \leq 0, \quad \sigma_n \leq 0, \quad u_n \sigma_n &= 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \\ |\sigma_t| \leq F|\sigma_n|, \quad (F|\sigma_n| - \sigma_t)u_t &= 0, \quad u_t \sigma_t \leq 0 \quad \text{на } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали границы Γ , u_n и u_t — нормальная и тангенциальная составляющие вектора перемещений u , $\sigma_i = \sigma_{ij}n_j$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_n = \sigma_{ij}n_i n_j$, $\sigma_t = \sigma - \sigma_n n$.

Основной сложностью при исследовании и построении численных алгоритмов решения данной нелинейной краевой задачи является зависимость силы трения $F|\sigma_n(u)|$ от искомого решения u .

Определим множества

$$V = \{v \in [W_2^1(\Omega)]^2 : v_n \equiv v_2 = 0 \text{ на } \Gamma_0\}, \quad K = \{v \in V : v_n \leq 0 \text{ на } \Gamma_2\}.$$

Пусть $f \in [L_2(\Omega)]^2$, $p \in [L_2(\Gamma_1)]^2$. Предположим, что решение $u \in K$ краевой задачи (1), (2) существует и принадлежит классу $[W_2^2(\Omega)]^2$, тогда u удовлетворяет квазивариационному неравенству [1], [2]

$$a(u, v - u) + \int_{\Gamma_2} F|\sigma_n(u)|(|v_t| - |u_t|) d\Gamma \geq \int_{\Omega} f \cdot (v - u) d\Omega + \int_{\Gamma_1} p \cdot (v - u) d\Gamma \quad \forall v \in K, \quad (3)$$

¹Здесь и везде в дальнейшем по повторяющимся индексам производится суммирование.

где

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega \quad (4)$$

— билинейная форма, определенная на $[W_2^1(\Omega)]^2 \times [W_2^1(\Omega)]^2$.

Квазивариационные неравенства появляются во многих областях механики и экономики, поэтому исследование и разработка методов их решения является актуальной и важной [2], [6]–[8].

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ КВАЗИВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА

Для решения квазивариационного неравенства (3) применим метод последовательных приближений [1], [2]:

- 1) зададим начальную силу трения $g^0 \in W_2^{1/2}(\Gamma_2)$, $g^0 \geq 0$;
- 2) найдем u^k как решение вспомогательного вариационного неравенства

$$a(u^k, v - u^k) + \int_{\Gamma_2} g^k (|v_t| - |u_t^k|) d\Gamma \geq \int_{\Omega} f \cdot (v - u^k) d\Omega + \int_{\Gamma_1} p \cdot (v - u^k) d\Gamma \quad \forall v \in K; \quad (5)$$

- 3) вычислим приближение $g^{k+1} = F|\sigma_n(u^k)|$.

Метод выглядит естественным, но вопрос о сходимости вырабатываемой последовательности u^k к решению квазивариационного неравенства (3) остается открытым. Существование самого решения доказано в коэрцитивном случае при малых коэффициентах трения [1].

Вариационное неравенство (5) называется задачей с заданным трением [1]. Она эквивалентна следующей задаче минимизации недифференцируемого функционала:

$$I(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + \int_{\Gamma_2} g^k |v_t| d\Gamma - \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_1} p \cdot v d\Gamma \rightarrow \min, \quad v \in K. \quad (6)$$

Минимизируемый функционал $I(v)$ не коэрцитивен на $W_2^1(\Omega)$. С другой стороны, для существования решения (6) достаточно коэрцитивности $I(v)$ на K ([1], [2]). В работе [4] показано, что из условия $\int_{\Omega} f_1 d\Omega + \int_{\Gamma_1} p_1 d\Gamma > 0$ следует $I(v) \rightarrow +\infty$ при $\|v\|_{[W_2^1(\Omega)]^2} \rightarrow \infty$ $\forall v \in K$, т.е. имеет место коэрцитивность функционала на K , что означает существование решения v^* задачи (6).

3. КЛАССИЧЕСКИЙ И МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ФУНКЦИОНАЛЫ ЛАГРАНЖА

Для решения (6) определим на множестве $V \times L_2(\Gamma_2)$ функционал Лагранжа

$$L(v, l) = I(v) + \int_{\Gamma_2} l v_n d\Gamma.$$

Обозначим через $(L_2(\Gamma_2))^+$ множество неотрицательных на Γ_2 функций, интегрируемых с квадратом.

Определение. Пара $(v^*, l^*) \in V \times (L_2(\Gamma_2))^+$ называется *седловой точкой* функционала Лагранжа $L(v, l)$, если выполнено двустороннее неравенство

$$L(v^*, l) \leq L(v^*, l^*) \leq L(v, l^*) \quad \forall (v, l) \in V \times (L_2(\Gamma_2))^+.$$

В [4] показано, что если решение \bar{u} вспомогательной задачи (6) принадлежит пространству $[W_2^1(\Omega)]^2$ и $\text{mes}\{x \in \Gamma_2 : \sigma_n(\bar{u}) < 0\} > 0$, то \bar{u} является единственным решением задачи (6), а пара $(\bar{u}, -\sigma_n(\bar{u}))$ — единственной седловой точкой функционала Лагранжа $L(v, l)$.

Тот факт, что вторая компонента седловой точки есть величина $-\sigma_n(u)$, позволяет нам найти силу трения на следующем шаге метода последовательных приближений.

Однако применение алгоритмов с классическим функционалом Лагранжа $L(v, l)$ в полуконъюнктивном случае не приводит к сходимости к седловой точке итерационного процесса [9], [10].

Для преодоления этого затруднения в работах [11], [12] на пространстве $[W_2^1(\Omega)]^2 \times L_2(\Gamma_K)$ был рассмотрен модифицированный функционал Лагранжа

$$M(v, l) = I(v) + \frac{1}{2r} \int_{\Gamma_2} \{(l + rv_n)^+\}^2 - l^2 \} d\Gamma,$$

где $(l + rv_n)^+ \equiv \max\{0, l + rv_n\}$, $r > 0$ — const.

Известно, что множества седловых точек классического и модифицированного функционалов Лагранжа совпадают [4], [13], [14].

4. АЛГОРИТМ ПОИСКА СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ ВО ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ЗАДАННЫМ ТРЕНИЕМ

Для отыскания седловой точки модифицированного функционала $M(v, l)$ применим метод, основанный на комбинировании метода Удзавы и итеративной проксимальной регуляризации [3], [5].

Последовательность $\{(u^m, l^m)\}$ согласно этому методу генерируется следующим образом:

- 1) зададим начальное приближение $(u^0, l^0) \in V \times W_2^{1/2}(\Gamma_2)$;
- 2) найдем u^{m+1} из критерия

$$\|u^{m+1} - \bar{u}^{m+1}\|_{[W_2^1(\Omega)]^2} \leq \delta_m, \quad (7)$$

где

$$\bar{u}^{m+1} = \arg \min_{v \in V} \left\{ M(v, l^m) + \frac{1}{2} \|v - u^m\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2 \right\}, \quad (8)$$

$$\delta_m > 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m < \infty; \quad (9)$$

- 3) вычислим приближение двойственной переменной

$$l^{m+1} = (l^m + ru_n^m)^+. \quad (10)$$

Критерий (7) означает, что вместо точного решения \bar{u}^{m+1} берется его приближенное значение u^{m+1} , получаемое, например, при численном решении задачи (8) методом конечных элементов. Параметр δ_m в таком случае играет роль погрешности численного решения.

Регуляризирующая добавка $\frac{1}{2} \|v - u^m\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2$ обеспечивает сильную выпуклость в V минимизируемых функционалов (8), что гарантирует единственность решения вспомогательных задач (5).

Отметим, что в работе [15] построен и исследован широкий класс устойчивых итеративных методов решения полуконъюнктивных вариационных неравенств, включающий в себя и метод итеративной проксимальной регуляризации.

5. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Для решения задачи (5) применим метод поиска седловой точки (7)–(10). Реализуем данный алгоритм с помощью метода конечных элементов на последовательности разбиений F_{h_m} области Ω , где h_m — параметр разбиения F_{h_m} . Область Ω выбиралась в виде трапеции (рис. 1) с размерами 2, 1, 1, $\sqrt{2}$.

Для этого триангулируем область Ω равнобедренными прямоугольными треугольниками T_k так, что $\Omega = \bigcup_1^{N_t} T_k$, где N_t — количество треугольников. Таким образом, получаем конечный элемент, состоящий из шести треугольников, имеющих общую вершину в узле.

Пронумеруем узлы триангуляции сверху вниз от 1 до N_{h_m} (N_{h_m} — количество узлов триангуляции). Для каждого узла i определена базисная функция $\varphi_i(x, y)$ такая, что $\varphi_i(x^i, y^i) = 1$, для соседних узлов $j = i_k, k = \overline{1, 6}, \varphi_i(x^j, y^j) = 0$. В качестве базисных функций φ_i возьмем кусочно-линейные функции [16], [17].

Введем следующие обозначения: V_{h_m} — линейная оболочка соответствующих базисных функций $\varphi_i(x, y)$, $u_h = (u_1^h, u_2^h)$ — кусочно-билинейное восполнение точного решения u :

$$u_i^h(x, y) = \sum_{j=1}^{N_{h_m}} t_j^{(i)} \varphi_j(x, y), \quad i = 1, 2, \quad t_j^{(i)} \in R.$$

Отметим, что так как Ω — многоугольник, обеспечено вложение $V_{h_m} \subset V, m = 1, 2, \dots$. Таким образом, заменим задачу (8) конечно-элементной задачей

$$u^{m+1} = \arg \min_{v \in V_{h_m}} \left\{ M(v, l^m) + \frac{1}{2} \|v - u^m\|_{[L_2(\Omega)]^2}^2 \right\}.$$

В работе [18] показано, что для последовательности точных решений $\{\bar{u}^m\}$ справедлива оценка

$$\|u^m - \bar{u}^m\|_{[W_2^1(\Omega)]^2} \leq C h_m^{1/2}, \quad C = \text{const} > 0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

а последовательность конечноэлементных решений $\{u^m\}$ будет сходиться в V к решению вспомогательной задачи (6), если $\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m < \infty$ ($\delta_m = h_m$).

6. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА СИНЬОРИНИ

Приведем результаты численного решения задачи (3). Для решения вспомогательной задачи с заданным трением применим алгоритм (7)–(10), реализация которого с помощью метода конечных элементов рассмотрена в разделе 5.

Расчетная область $\Omega \subset R^2$ выбиралась в виде трапеции (рис. 1) с размерами 2, 1, 1, $\sqrt{2}$. Разбиение области Ω проводилось с помощью построения регулярных сеток на каждой из сторон трапеции с шагом h_m .

Каждая вспомогательная задача с заданным трением решалась на последовательности разбиений области Ω с $h_m = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$. При этом сетка дробилась не на каждом шаге m алгоритма (7)–(10), а на одной сетке проводилось несколько итераций алгоритма. Следует отметить, что решение, полученное на предыдущей сетке, используется в качестве стартового элемента на следующем шаге.

Для решения задачи (8) осуществлялась аппроксимация недифференцируемого граничного интеграла $\int_{\Gamma_K} g|v_t| d\Gamma$ с помощью квадратурной формулы трапеций ([9], с. 72). После этого задача (8) решалась методом поточечной релаксации ([10], с. 86).

Значения параметров брались следующими: объемные силы $f_1 = f_2 = 0$, боковые усилия с левой $p_1|_{\Gamma_1} = 100$ и правой $p_1|_{\Gamma_1} = -50$ сторон, $p_2|_{\Gamma_1} = 0$, коэффициент трения $F = 0.3$, модуль упругости Юнга $E = 2.1 \cdot 10^6$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, константа $r = 10^8$.

Отметим, что задача, рассмотренная в данном разделе, детально исследовалась в работе [1], в которой приводятся результаты численного решения полукоэрцитивного квазивариационного неравенства методом последовательных приближений.

При этом в [1] при решении вспомогательной задачи (6) использовалась иная схема двойственности, в которой для исключения недифференцируемости минимизируемого функционала применялась классическая схема построения функционала Лагранжа, не обеспечивающая, как известно [9], [10], в полукоэрцитивном случае теоретическую сходимость метода Удзавы.

На рис. 2 представлены результаты численного решения поставленной задачи. На графиках видно, что u_n в узлах на границе Γ_2 принимает значение близкое к нулю (меньше, чем точность вычислений $\varepsilon = 10^{-8}$), $u_t > \varepsilon$, т.е. происходит микропроскальзывание между телом Ω и абсолютно твердой опорой.

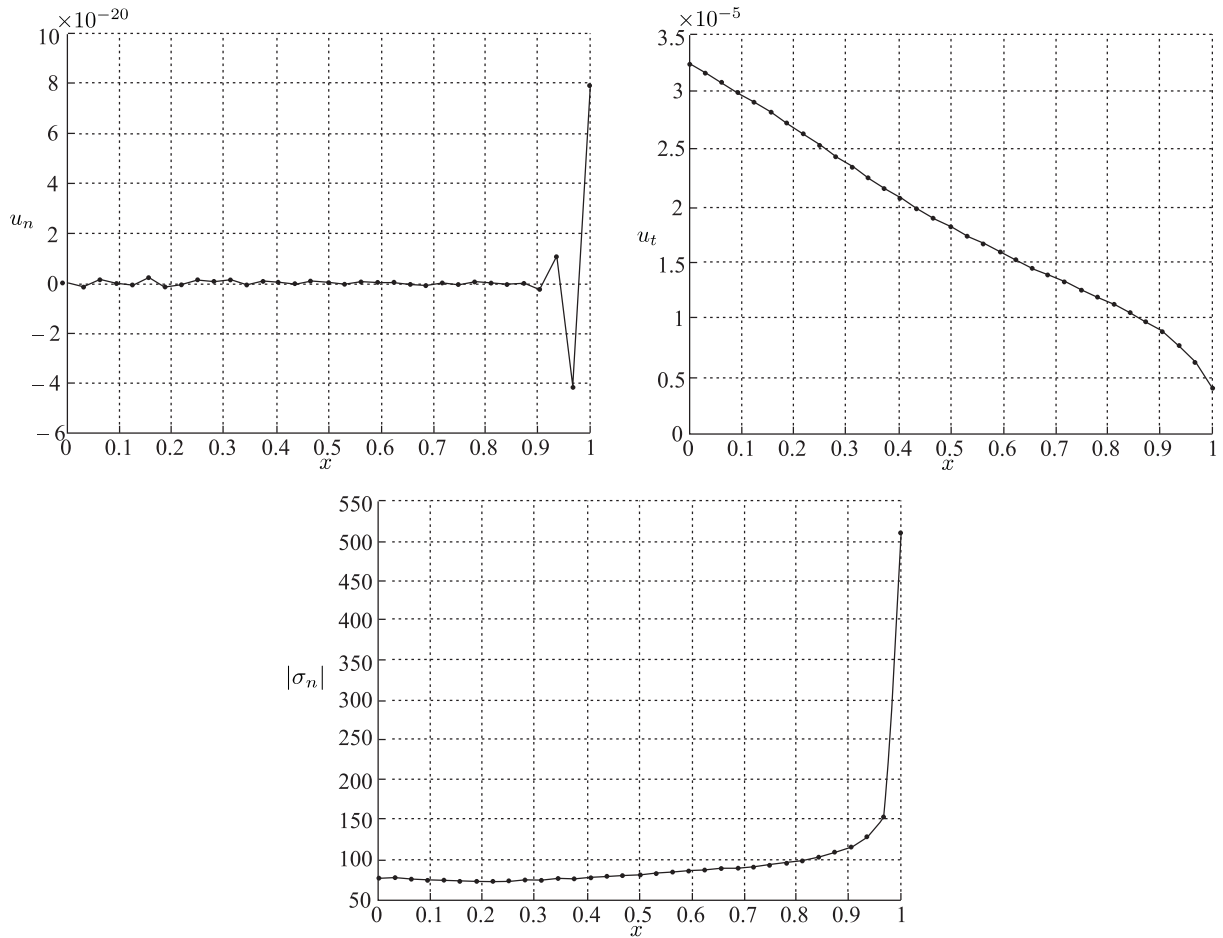


Рис. 2. Результаты вычислений № 1

Численные расчеты показали, что метод последовательных приближений работает намного эффективней при больших значениях константы r ($r = 10^6, 10^8$). При $r = 10^8$ выполняется одиннадцать внешних итераций метода последовательных приближений и порядка трехсот итераций по двойственной переменной.

График нормального напряжения показывает, что $|\sigma_n| > 0$ всюду на границе Γ_2 . Это означает, что происходит сдвиг тела с опорой.

Численные результаты, полученные в данной работе, совпадают с расчетами, представленными в ([1], с. 217–219). Схема двойственности, использованная в [1], основана на классической схеме построения функционала Лагранжа. Вторая компонента седловой точки для данного функционала есть величина $\sigma_t(u)$.

Из условия $\sigma_t u_t + F|\sigma_n| \cdot |u_t| = 0$ на Γ_2 в [1] на Γ_2 вычисляется

$$|\sigma_n| = -\frac{\sigma_t u_t}{F|u_t|}. \quad (11)$$

В примере, рассмотренном в [1], $u_t > 0$ всюду на Γ_2 . Однако, если $u_t = 0$, формула (11) становится некорректной.

Приведем пример, когда $\text{mes}\{x \in \Gamma_2 : u_n = 0\} > 0$. Для этого изменим боковые усилия с левой $p_1|_{\Gamma_1} = 80$ и правой $p_1|_{\Gamma_1} = -100$ сторон. Остальные параметры оставим неизменными. Таким образом, получим следующие численные результаты (рис. 3).

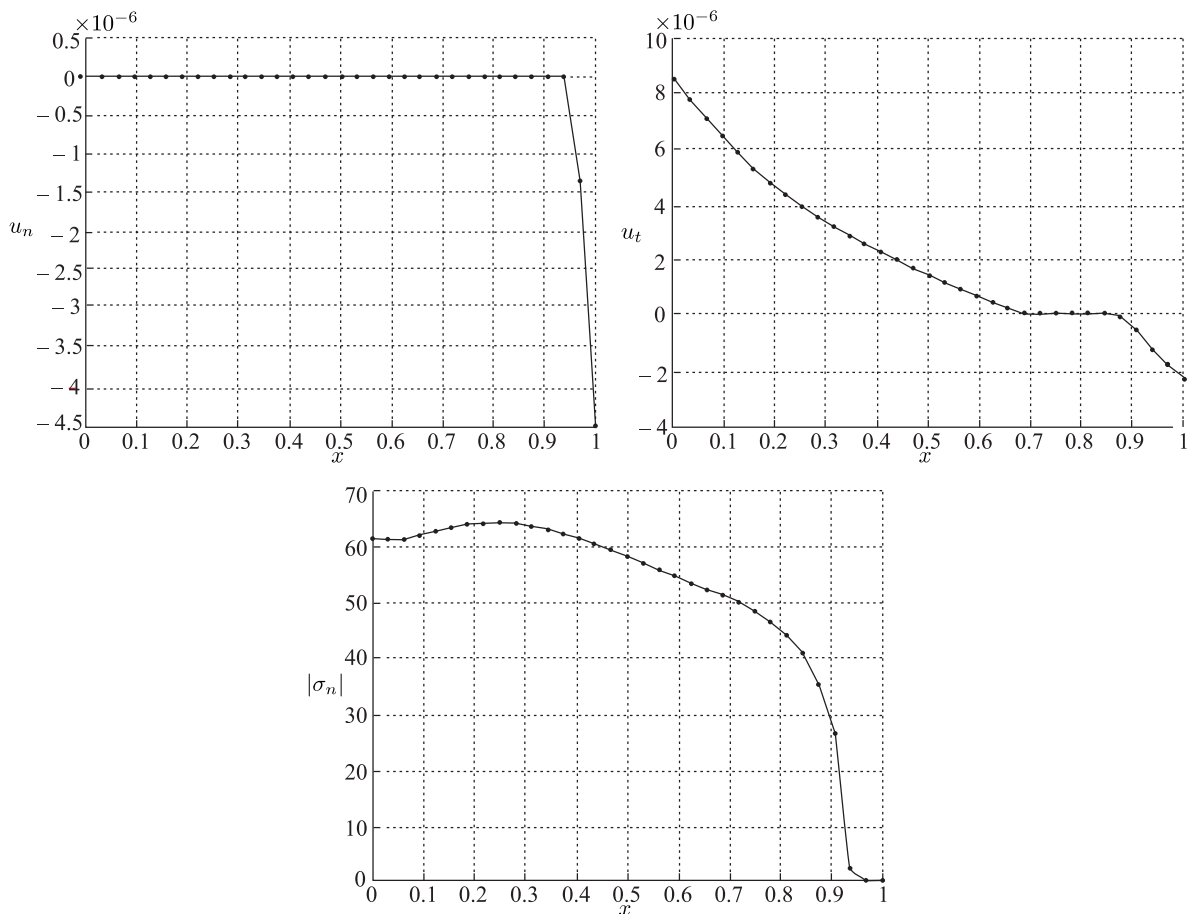


Рис. 3. Результаты вычислений №2

На графиках u_n и $|\sigma_n|$ видно, что в вершине тупого угла происходит отлипание тела от жесткой опоры. Это следует из того, что $u_n < 0$ и $|\sigma_n| = 0$ в этой точке. График касательного напряжения меняет свой знак вблизи тупого угла, так что $\text{mes}\{x \in \Gamma_2 : u_n = 0\} > 0$, т. е. существует отрезок на Γ_2 , в точках которого $u_n = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. *Решение вариационных неравенств в механике* (Мир, М., 1986).
- [2] Kikuchi N., Oden T. *Contact problem in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods* (SIAM, Philadelphia, 1988).
- [3] Haslinger J., Hlavacek I., Necas J. *Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics*, Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet and J.L. Lions (Eds.), Vol. IV (North Holland, 1996), pp. 313–486.
- [4] Вихтенко Э.М., Намм Р.В. *Схема двойственности для решения полуконформной задачи Синьорини с трением*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **47** (12), 2023–2036 (2007).
- [5] Вихтенко Э.М., Намм Р.В. *Итеративная проксимальная регуляризация модифицированного функционала Лагранжа для решения полуконформного квазивариационного неравенства Синьорини*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **48** (9), 1–9 (2008).
- [6] Кравчук А.С. *Вариационные и квазивариационные неравенства в механике* (МГАПИ, М., 1997).
- [7] Антипин А.С. *Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании* (ВЦ РАН, М., 2002).
- [8] Антипин А.С., Голиков А.И., Хорошилова Е.В. *Функция чувствительности, ее свойства и приложения*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **51** (12), 1–17 (2011).
- [9] Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р. *Численное исследование вариационных неравенств* (Мир, М., 1979).
- [10] Glowinski R. *Numerical methods for nonlinear variational problems* (Springer, New York, 1984).
- [11] Ву Г., Намм Р.В., Сачков С.А. *Итерационный метод поиска седловой точки для полуконформной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **46** (1), 26–36 (2006).
- [12] Ву Г., Ким С., Намм Р.В., Сачков С.А. *Метод итеративной проксимальной регуляризации для поиска седловой точки в полуконформной задаче Синьорини*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **46** (11), 2024–2031 (2006).
- [13] Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В. *Методы решения полуконформных вариационных неравенств механики на основе модифицированных функционалов Лагранжа*, Дальневосточн. матем. журн. **14** (1), 6–17 (2014).
- [14] Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В. *Функционалы чувствительности в контактных задачах теории упругости*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **54** (7), 1218–1228 (2014).
- [15] Konnov I., Gwinner J. *A strongly convergent combined relaxation method in Hilbert spaces*, Numerical Funct. Anal. Optim. **35** (7–9), 1066–1077 (2014).
- [16] Марчук Г.И., Агошков В.И. *Введение в проекционно-сеточные методы* (Физматлит, М., 1981).
- [17] Зенкевич О., Морган К. *Конечные элементы и аппроксимация* (Мир, М., 1986).
- [18] Намм Р.В., Сачков С.А. *Решение квазивариационного неравенства Синьорини методом последовательных приближений*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **49** (5), 805–814 (2009).

Р.В. Намм

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской Академии наук,
ул. Ким Ю Чена, д. 65, г. Хабаровск, 680000, Россия,

e-mail: rnamm@yandex.ru

Г.И. Цой

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской Академии наук,
ул. Ким Ю Чена, д. 65, г. Хабаровск, 680000, Россия,

e-mail: tsoy.dv@mail.ru

R.V. Namm and G.I. Tsoi

The method of successive approximations for solving quasi-variational Signorini inequality

Abstract. We consider the method of successive approximations for solving the semicoercive quasi-variational Signorini inequality corresponding to the contact problem of elasticity theory with friction. Each outer step of the iterative process involves the Signorini problem with given friction, which is solved by the Uzawa method based on an iterative proximal regularization of a modified Lagrangian functional. We investigate stabilization sequence of auxiliary finite element solutions on the outer steps of the method of successive approximations and present the results of numerical calculation.

Keywords: contact problem of the elasticity theory, Lagrangian functional, saddle point, Uzawa method, proximal regularization, finite element method.

R. V. Namm

*Computing Center of Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,
65 Kim Yu Chen str., Khabarovsk, 680000 Russia,*

e-mail: rnamm@yandex.ru

G.I. Tsoi

*Computing Center of Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences,
65 Kim Yu Chen str., Khabarovsk, 680000 Russia,*

e-mail: tsoy.dv@mail.ru