И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 515.124.4:514.774

Е.Н. СОСОВ

О НЕПРЕРЫВНОСТИ МЕТРИЧЕСКОЙ δ-ПРОЕКЦИИ НА ВЫПУКЛОЕ МНОЖЕСТВО В СПЕЦИАЛЬНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье доказано, что некоторые результаты А.В. Маринова из [1], [2] о непрерывности метрической δ-проекции на выпуклое множество в линейном нормированном пространстве остаются верными в специальном метрическом пространстве.

1. Необходимые определения и теоремы

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство и S — выделенное в нем семейство сегментов (т. е. кривых, длины которых равны расстояниями между их концами [3], с. 42), в дальнейшем называемых хордами ([4], с. 23). Пространство X и семейство хорд S подчиним следующим условиям.

A. Для каждой хорды все ее подсегменты (включая точки) являются хордами.

B. Каждые две точки пространства X можно соединить единственной хордой.

C. Для всех $p,x,y \in X$ выполняется неравенство $2\rho(p,\omega_{1/2}(x,y)) \leq \rho(p,x)+\rho(p,y)$, где $\omega_{1/2}(x,y)$ — середина хорды $[x,y]$ с концами x, y.

Известно ([4], с. 63; [3], с. 304), что в прямых хордовых пространствах неположительной кривизны эти условия выполняются. Аналогичные локальные условия налагались на метрическое пространство в [5].

В дальнейшем используем следующие обозначения и определения: $B[x,r]$ ($S(x,r)$) — замкнутый шар (сфера) с центром в точке x, радиуса $r>0$; $xy=\rho(x,y)$, $xM=\rho(x,M)$; пусть $\delta\geq 0$, $x\in X$, $M\subset X$, $M\neq\emptyset$; $x_M^\delta=\{y\in M : xy\leq xM+\delta\}$ ($x_M=x_M^0$) — метрическая δ-проекция (метрическая проекция) точки x на множество M [1]; $\beta(A,B)=\sup\{xB : x\in A\}$, $\alpha(A,B)=\max\{\beta(A,B),\beta(B,A)\}$ — полууклонение и расстояние по Хаусдорфу между непустыми множествами $A,B\subset X$ (бесконечные значения не исключаются) [1]; $\beta(x_M^{\delta\pm 0},F)=\lim\limits_{t\to+0}\beta(x_M^{\delta\pm t},F)$, где $N\subset X$ [1]. Множество M пространства X, удовлетворяющего условиям A, B, называется выпуклым, если для каждых двух точек x, y из этого множества хорда $[x,y]$ принадлежит этому множеству.

Приведем два элементарных следствия условий A, B, C.

1. Для каждого $\lambda\in[0,1]$ и для всех p, x, y из пространства X, удовлетворяющего условиям A, B, C, выполняется неравенство

$$p\omega_\lambda(x,y)\leq(1-\lambda)px+\lambda py, \tag{1}$$

где точка $\omega_\lambda(x,y)\in[x,y]$ такая, что $x\omega_\lambda(x,y)=\lambda xy$.

2. Каждый замкнутый (открытый) шар пространства X, удовлетворяющего условиям A, B, C, является выпуклым множеством.

Известна

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00308.

Лемма 1 ([1]). *Пусть X — метрическое пространство, $x, y \in X$, F, M, N — непустые множества из X, $\delta \geq 0$. Тогда $\beta(y_N^\delta, F) \leq \beta(N, M) + \beta(x_M^{\delta_1+0}, F)$, $\beta(F, y_N^\delta) \leq \beta(M, N) + \beta(F, x_M^{\delta_2-0})$, где $\delta_1 = \delta + xy + yN + \beta(N, M) - xM$, $\delta_2 = \delta + yN - xy - xM - \beta(M, N)$. Причем предполагается, что $\delta_2 > 0$.*

Сформулируем теперь полученные результаты. Обобщает леммы 6–8 из [2]

Лемма 2. *Пусть M — выпуклое множество пространства X, удовлетворяющего условиям* A, B, C; *$x \in X$, $0 < t < \varepsilon < \delta$, $0 < \varepsilon' < \delta'$, $\varepsilon' \leq \varepsilon$, $\delta' \leq \delta$ ($t \geq 0$ при $x_M \neq \emptyset$), $F \subset x_M^\delta$, $G \subset x_M^t$. Тогда имеют место следующие неравенства*:

a) $\frac{\beta(F, x_M^\varepsilon)}{\delta-\varepsilon} \leq \frac{\beta(F, x_M^t)}{\delta-t}$; b) $\frac{\beta(x_M^\delta, G)}{\delta-t} \leq \frac{\beta(x_M^\varepsilon, G)}{\varepsilon-t}$; c) $\frac{\beta(x_M^\delta, x_M^\varepsilon)}{\delta-\varepsilon} \leq \frac{\beta(x_M^{\delta'}, x_M^{\varepsilon'})}{\delta'-\varepsilon'}$.

Следствие. Пусть M — выпуклое множество пространства X, удовлетворяющего условиям A, B, C; $x \in X$. Тогда имеют место следующие неравенства:

a) $\frac{\beta(x_M^\delta, x_M^{+0})}{\delta} \leq \frac{\beta(x_M^{\delta'}, x_M^{+0})}{\delta'}$, где $\delta > \delta' > 0$;
b) $\beta(x_M^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \frac{\beta(x_M^\delta, x_M^{+0})}{\delta}(\delta - \varepsilon)$, где $\delta \geq \varepsilon > 0$;
c) $\alpha(x_M^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \frac{\beta(x_M^\mu, x_M^{+0})}{\mu}|\delta - \varepsilon| \leq \frac{\beta(x_M^\delta, x_M^{+0})}{\delta}|\delta - \varepsilon|$, где $\delta > 0$, $\mu = \max(\delta, \varepsilon)$;
d) $\beta(x_M^\delta, x_M^\varepsilon) \leq (\frac{2xM}{\delta}+1)(\delta-\varepsilon)$, где $\delta \geq \varepsilon \geq 0$. При $x_M \neq \emptyset$ выражение x_M^{+0} в этих неравенствах можно заменить на x_M (ср. [2], следствия 1–3).

Следующая лемма является обобщением леммы 5 из [2] и имеет аналогичное доказательство, если использовать п. a) леммы 2.

Лемма 3. *Пусть M — выпуклое множество пространства X, удовлетворяющего условиям* A, B, C; *$x \in X$, $\delta > 0$, $F \subset X$. Тогда имеют место следующие четыре равенства: $\beta(x_M^{\delta\pm0}, F) = \beta(x_M^\delta, F)$, $\beta(F, x_M^{\delta\pm0}) = \beta(F, x_M^\delta)$.*

Аналогична лемме 10 из [2]

Лемма 4. *Пусть M — выпуклое множество пространства X, удовлетворяющего условиям* A, B, C; *$x, y \in X$, $\delta \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$, $N \subset X$, $\mu = \max(\varepsilon, \delta)$, $\lambda = \mu + 2xy + 2\alpha(M, N)$. Тогда*

a) *при $\lambda > 0$ выполняется неравенство*

$$\beta(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \beta(N, M) + \frac{\beta(x_M^\lambda, x_M^{+0})}{\lambda}(|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N));$$

b) *при $|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N) < \mu$ выполняется неравенство*

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \alpha(N, M) + \frac{\beta(x_M^\mu, x_M^{+0})}{\mu}(|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N)).$$

Обобщает теорему 4 из [2]

Теорема 1. *Пусть M — выпуклое множество пространства X, удовлетворяющего условиям* A, B, C; *$x, y \in X$, $N \subset X$, $\mu = \max(\varepsilon, \delta) > 0$. Тогда выполняется неравенство*

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \alpha(N, M) + (\frac{2xM}{\mu} + 2)(|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N)).$$

Аналогична теореме 5 из [2]

Теорема 2. *Пусть M, N — выпуклые множества пространства X, удовлетворяющего условиям* A, B, C; *$x, y \in X$, $\lambda = \max(\varepsilon, \delta) + 2xy + 2\alpha(M, N)$. Тогда при $\lambda > 0$ выполняется неравенство*

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \alpha(N, M) + \left(\frac{2\min(xM, yN)}{\lambda} + 1\right)(|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N)). \qquad (2)$$

Замечание. Доказательства леммы 4, теорем 1, 2 по существу не отличаются от соответствующих частей доказательств леммы 10, теорем 4, 5 из [2], если учесть следствие и лемму 3. Эти доказательства приведены лишь для удобства чтения.

2. Доказательства полученных результатов

Доказательство леммы 2. a) Пусть $\beta(F, x_M^\varepsilon) > 0$ и число $s > 0$ достаточно мало. Выберем точку $z \in F \setminus x_M^\varepsilon$ так, что

$$zx_M^\varepsilon \geq \beta(F, x_M^\varepsilon) - s. \tag{3}$$

Затем выберем точку $p \in x_M^t$ так, что

$$zp \leq zx_M^t + s. \tag{4}$$

Введем обозначения: $a = [x, z] \cap S(x, xM + t)$, $b = [x, z] \cap S(x, xM + \varepsilon)$, $c = [p, z] \cap S(x, xM + \varepsilon)$. В силу (3)

$$zc \geq \beta(F, x_M^\varepsilon) - s. \tag{5}$$

А из (1) следует неравенство

$$xc \leq px\frac{cz}{pz} + xz\frac{cp}{pz}.$$

Но $xc = xb = xz - bz$, $ax \geq xp$, $pc = pz - cz$. Поэтому

$$xz - bz \leq ax\frac{cz}{pz} + xz\frac{pz - cz}{pz}.$$

Отсюда получаем $cz \leq pz\frac{bz}{az}$. Кроме того, $\delta - t > \delta - \varepsilon$ и величина $\tau = \delta - \varepsilon - bz = \delta - t - az$ неотрицательная. Следовательно,

$$cz \leq pz\frac{bz}{az} \leq pz\frac{\delta - \varepsilon - \tau}{\delta - t - \tau} \leq pz\frac{\delta - \varepsilon}{\delta - t}.$$

Из этих неравенств, а также из (4), (5) следует

$$\beta(F, x_M^\varepsilon) - s \leq cz \leq (zx_M^t + s)\frac{\delta - \varepsilon}{\delta - t} \leq (\beta(F, x_M^t) + s)\frac{\delta - \varepsilon}{\delta - t}.$$

Переходя к пределу при $s \to 0+$, получим неравенство a).

Докажем неравенство b). Пусть $\beta(x_M^\delta, G) > 0$ и число $s > 0$ достаточно мало. Выберем точку $z \in x_M^\delta \setminus G$ так, что $zG \geq \beta(x_M^\delta, G) - s$. Затем выберем такую точку $p \in G$, что

$$zp \leq zG + s. \tag{6}$$

Тогда

$$\beta(x_M^\delta, G) - s \leq zp \leq \beta(x_M^\delta, G) + s. \tag{7}$$

Если для каждого достаточно малого s точка z принадлежит x_M^ε, то $\beta(x_M^\delta, G) = \beta(x_M^\varepsilon, G)$ и неравенство b) верно. Предположим, что $z \in x_M^\delta \setminus x_M^\varepsilon$ и введем обозначения: $b = [x, z] \cap S(x, xM + \varepsilon)$, $c = [p, z] \cap S(x, xM + \varepsilon)$. В силу (1) $xc \leq px\frac{cz}{pz} + xz\frac{cp}{pz} = px\frac{pz - pc}{pz} + xz\frac{cp}{pz} = px + pc\frac{xz - px}{pz}$. Но $xc = xb$. Следовательно,

$$pz \leq pc\frac{xz - xp}{xb - px} \leq pc\frac{\delta - t}{\varepsilon - t}. \tag{8}$$

Кроме того, из (6) и неравенства треугольника следует

$$cp = pz - cz \leq zG + s - cz \leq cG + s \leq \beta(x_M^\varepsilon, G) + s. \tag{9}$$

Тогда из (7)–(9) получим

$$\beta(x_M^\delta, G) - s \le zp \le pc\frac{\delta - t}{\varepsilon - t} \le (\beta(x_M^\delta, G) + s)\frac{\delta - t}{\varepsilon - t}.$$

Переходя к пределу при $s \to 0+$, получим неравенство b).

Для доказательства c) достаточно применить неравенство b) при $G = x_M^{\varepsilon'}$, $t = \varepsilon'$, $\varepsilon = \delta'$, а затем a) при $F = x_M^\delta$. $\square$

Доказательство следствия. a) Достаточно в неравенстве c) леммы 2 перейти к пределам при $\varepsilon' \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

b) В том же неравенстве нужно положить $\delta' = \delta$ и перейти к пределу при $\varepsilon' \to 0$.

c) Следует из b).

d) Следует из b) и простого неравенства $\beta(x_M^\delta, x_M^{+0}) \le 2xM + \delta$ ([2], (3.10)). $\square$

Доказательство леммы 4. a) Из простых оценок ([1], (1.5)) получим

$$\delta_1 = \delta + xy + yN + \beta(N, M) - xM \le \delta + 2xy + 2\alpha(M, N) \le \lambda.$$

Тогда из лемм 1, 3 и п. b) следствия получим

$$\beta(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \le \beta(N, M) + \beta(x_M^\lambda, x_M^\varepsilon) \le \beta(N, M) + \frac{\beta(x_M^\lambda, x_M^{+0})}{\lambda}(\lambda - \varepsilon) \le$$
$$\le \beta(N, M) + \frac{\beta(x_M^\lambda, x_M^{+0})}{\lambda}(|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N)).$$

b) Из простых оценок ([1], (1.5)) получим

$$|\mu - \delta_2| = |\mu - \delta - yN + xy + xM + \beta(M, N)| \le |\mu - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N) \le$$
$$\le |\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N) < \mu.$$

Следовательно, $\delta_2 > 0$ и можно применить леммы 1, 3 и следствие b). Тогда

$$\beta(x_M^\varepsilon, y_N^\delta) \le \beta(M, N) + \beta(x_M^\varepsilon, x_M^{\delta_2 - 0}) \le \beta(M, N) + \beta(x_M^\mu, x_M^{\delta_2}) \le$$
$$\le \beta(M, N) + \frac{\beta(x_M^\mu, x_M^{+0})}{\mu}(|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N)). \quad \square$$

Доказательство теоремы 1. Из леммы 4 a) и следствия d) получим

$$\beta(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \le \beta(N, M) + \frac{\beta(x_M^\lambda, x_M^{+0})}{\lambda}(|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N)) \le$$
$$\le \alpha(N, M) + \left(\frac{2xM}{\mu} + 1\right)(|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N)).$$

А при $|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N) < \mu$ из леммы 4 a) и следствия d) получим

$$\alpha(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \le \alpha(N, M) + (\frac{2xM}{\mu} + 1)(|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N)).$$

Пусть теперь $|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N) \ge \mu$. Тогда

$$\beta(x_M^\varepsilon, y_N^\delta) \le \beta(x_M^\varepsilon, x) + xy + yy_N^\delta \le xM + \varepsilon + xy + yN \le$$
$$\le 2xM + |xM - yN| + \varepsilon + xy \le 2xM + 2xy + \alpha(M, N) + \varepsilon \le$$
$$\le 2xM + \mu + |\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N) \le (\frac{2xM}{\mu} + 2)(|\varepsilon - \delta| + 2xy + 2\alpha(M, N)),$$

отсюда следует теорема 1. $\square$

Доказательство теоремы 2. Обозначим правую часть в (2) через A. Рассмотрим три случая для оценки выражения $\beta(y_N^\delta, x_M^\varepsilon)$.

1. $\delta_1 = \delta + xy + yN + \beta(N, M) - xM = 0$.

Тогда из неравенства $xM - yN \leq xy + \beta(N, M)$ следует, что $\delta = 0$. Из леммы 1 получим

$$\beta(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \beta(N, M) + \beta(x_M^{+0}, x_M^\varepsilon) \leq \beta(N, M) + 2xM \leq \beta(N, M) + \\ + 2\min(xM, yN) + 2|xM - yN| \leq \beta(N, M) + 2\min(xM, yN) + 2xy + 2\alpha(M, N) \leq A.$$

2. $0 < \delta_1 \leq \varepsilon$. Тогда из лемм 1, 3 получим $\beta(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \beta(N, M) \leq A$.

3. $\delta_1 > \varepsilon$. Сначала получим простые неравенства $\delta_1 < \lambda$,

$$2xM + \delta_1 = \delta + xy + 2\min(xM, yN) + |xM - yN| + \beta(N, M) \leq \\ \leq \mu + 2xy + 2\min(xM, yN) + 2\alpha(M, N) \leq \lambda + 2\min(xM, yN),$$

$\frac{\delta_1 - \varepsilon}{\delta_1} \leq \frac{\lambda - \varepsilon}{\lambda}$. Используя эти неравенства, а также лемму 1 и следствие d), получим

$$\beta(y_N^\delta, x_M^\varepsilon) \leq \beta(N, M) + \beta(x_M^{\delta_1}, x_M^\varepsilon) \leq \beta(N, M) + (2xM + \delta_1)\frac{\delta_1 - \varepsilon}{\delta_1} \leq \\ \leq \beta(N, M) + (2\min(xM, yN) + \lambda)\frac{\lambda - \varepsilon}{\lambda} \leq A.$$

И утверждение теоремы следует из симметричности правой части последнего неравенства. □

Литература

1. Маринов А.В. *Устойчивость ε-квазирешений операторных уравнений 1 рода* // Приближение функций полиномами и сплайнами. – Свердловск, 1985. – С. 105–117.
2. Маринов А.В. *Оценки устойчивости метрической ε-проекции через модуль выпуклости пространства* // Тр. ин-та матем. и мех. УрО РАН. – 1992. – Т. 2. – С. 85–109.
3. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
4. Busemann H., Phadke B.B. *Spaces with distinguished geodesics.* – New York–Basel: Marsel Dekker Inc., 1987. – 159 p.
5. Alexander S.B., Bishop R.L. *The Hadamard–Cartan theorem in locally convex metric spaces* // L'Enseign. Math. – 1990. – V. 36. – P. 309–320.

Казанский государственный педагогический университет

Поступила 24.12.1999