ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 517.544

Б.А. КАЦ

ОБ ОБОБЩЕНИИ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Н.А. ДАВЫДОВА

Пусть Γ есть простая замкнутая спрямляемая кривая на комплексной плоскости, разбивающая ее на области D^+ и $D^- \ni \infty$. Тогда для любой заданной на Γ непрерывной функции $f(t)$ определен интеграл типа Коши

$$K_f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z}. \tag{1}$$

Он представляет голоморфную в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию. Традиционный интерес вызывает вопрос о граничных значениях этой функции. В значительной степени это обусловлено приложениями интеграла типа Коши при решении краевых задач и сингулярных интегральных уравнений [1], [2]. В простейшем случае это вопрос о возможности непрерывного продолжения функции $K_f(z)$ на кривую Γ слева (из области D^+) и справа (из D^-).

Хорошо известно, что интеграл (1) по кусочно-гладкой кривой Γ непрерывен в замыканиях D^+ и D^-, если его плотность $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$\sup\left\{\frac{|f(t')-f(t'')|}{|t'-t''|^\nu} : t', t'' \in \Gamma,\ t' \neq t''\right\} \equiv h_\nu(f,\Gamma) < \infty \tag{2}$$

с любым показателем $\nu \in (0,1]$. Как отмечается в [2], этот факт был известен еще Гарнаку, Морера и Сохоцкому.

Ниже через $H_\nu(\Gamma)$ обозначим пространство Гёльдера, т. е. множество всех заданных на Γ функций, удовлетворяющих условию (2). При $\nu = 1$ — это класс Липшица.

Одним из первых вопрос о непрерывности интеграла типа Коши по негладкой кривой исследовал Н.А. Давыдов. В частности, он установил следующий факт.

Теорема Н.А. Давыдова [3]. *Интеграл типа Коши* (1) *по замкнутой спрямляемой кривой* Γ *непрерывен в замыканиях областей* D^+ *и* D^-, *на которые эта кривая разбивает комплексную плоскость, если его плотность* f *принадлежит классу Липшица* $H_1(\Gamma)$.

В данной статье теорема Н.А. Давыдова обобщается на неспрямляемые кривые. Прежде всего уточним, в каком смысле понимается интеграл (1), если кривая Γ неспрямляема. Приведем соответствующее определение.

Зафиксируем положительное направление обхода кривой Γ (всюду ниже это направление против часовой стрелки) и выберем точку $t^* \in \Gamma$, которая будет служить началом и концом этого обхода. Тем самым задаем на $\Gamma \setminus t^*$ естественные отношения порядка $z_1 \prec z_2$, если z_1 предшествует z_2 при таком обходе, и $z_1 \preceq z_2$, если $z_1 \prec z_2$ или $z_1 = z_2$. Множество $\Gamma \setminus t^*$ можно пополнить наибольшим и наименьшим элементами $t_{\min}$ и $t_{\max}$; оба эти элемента могут быть в понятном смысле отождествлены с точкой t^*.

Последовательность точек $\{z_j\}_{j=0}^{j=n}$ назовем разбиением Γ, если $t_{\min} = z_0 \prec z_1 \prec z_2 \prec \cdots \prec z_n = t_{\max}$, имея в виду, что эти точки разбивают Γ на дуги γ_j так, что началом γ_j является

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00088.

точка z_{j-1}, а концом — точка z_j, $j=1,2,\ldots,n$. Если кроме этого заданы точки $\{w_j\}_{j=1}^{j=n}$ такие, что $z_{j-1} \preceq w_j \preceq z_j$, $j=1,2,\ldots,n$, то разбиение называется пунктированным.

Определение 1. Пусть Γ есть простая замкнутая кривая с фиксированными направлением обхода и "началом–концом" t^*, на которой заданы функции $f(z)$ и $g(z)$. Рассмотрим всевозможные пунктированные разбиения Γ, и с каждым из них свяжем сумму Римана–Стильтьеса $S=\sum\limits_{j=1}^{n} f(w_j)(g(z_j)-g(z_{j-1}))$. Если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $|S-J|<\varepsilon$ для любого пунктированного разбиения, удовлетворяющего условию $|z_j-z_{j-1}|<\delta$, $j=1,2,\ldots,n$, то число J есть контурный интеграл Стильтьеса: $J=\int\limits_{\Gamma} f\,dg$.

Нетрудно убедиться, что ни существование этого интеграла, ни его значение не зависят от выбора точки t^*.

Существует простая связь этого интеграла с обычным интегралом Стильтьеса по отрезку вещественной оси. Пусть $z=z(x)$ — любое непрерывное строго монотонное (в смысле отношения $\prec$) отображение отрезка $I=[0,1]$ на кривую Γ такое, что $z(0)=t_{\min}$ и $z(1)=t_{\max}$. Очевидно, $\int\limits_{\Gamma} f\,dg=\int\limits_{0}^{1} f(z(x))dg(z(x))$, где в правой части стоит обычный интеграл Стильтьеса по отрезку I. Конечно, отображение $z(x)$ не единственно, но величина интеграла и его существование не зависят от выбора этого отображения.

Теперь обратимся к условиям существования интеграла Стильтьеса в случае $g(z)\equiv z$, $g(z(x))\equiv z(x)$. Наиболее известное условие, предполагающее ограниченность вариации функции g (напр., [4]), не может быть использовано, поскольку ограниченность вариации отображения $z(x)$ равносильна спрямляемости его образа Γ. Вместо него воспользуемся результатом [5], основанным на следующем обобщении понятия вариации.

Определение 2. Пусть $\Phi(x)$ есть заданная при $x\geq 0$ непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$. Класс $V_\Phi(\Gamma)$ состоит из всех заданных на кривой Γ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{\tau}\sum_{j=1}^{n}\Phi(|f(z_j)-f(z_{j-1})|)\equiv v_\Phi(f;\Gamma)<\infty;$$

здесь точная верхняя грань берется по всем разбиениям $\tau=\{z_j\}_{j=0}^{j=n}$. Если $\Phi(x)=x^p$, $p\geq 1$, то этот класс обозначается через $V_p(\Gamma)$.

Обычно эти классы рассматривают на отрезке вещественной оси I, используя при этом обычные неравенства вместо $\prec$ и $\preceq$ и полагая в определении разбиений $t_{\min}=0$, $t_{\max}=1$. Очевидно, $V_1(I)$ есть обычный класс функций ограниченной вариации. Класс $V_2(I)$ был введен Н. Винером [6]. В общем виде классы $V_p(I)$ и $V_\Phi(I)$ были введены и использованы при изучении интеграла Стильтьеса в [7] и [5] соответственно.

Теорема Л. Юнга [5]. *Интеграл Стильтьеса $\int\limits_0^1 f\,dg$ существует при условиях $f\in V_\Phi(I)$, $g\in V_\Psi(I)$, если функции f и g не имеют общих точек разрыва и сходится ряд Юнга*:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(1/n)\psi(1/n)<\infty,$$

где φ и ψ — функции, обратные к Φ и Ψ соответственно.

Чтобы применять эту теорему для обоснования существования контурного интеграла Стильтьеса $\int\limits_{\Gamma} f\,dz$, придадим условию $z(x)\in V_\Phi(I)$ геометрическую форму.

Определение 3. Будем относить кривую Γ к классу R_Φ и называть ее Φ-спрямляемой, если величина

$$\sigma_\Phi(\Gamma) \equiv \sup_\tau \sum_{j=1}^n \Phi(|z_j - z_{j-1}|)$$

конечна; точная верхняя грань здесь берется по всем разбиениям $\tau = \{z_j\}_{j=0}^{j=n}$. Если $\Phi(x) = x^p$, $p \geq 1$, то будем говорить о p-спрямляемости и писать R_p и σ_p вместо R_Φ и σ_Φ соответственно.

При $p > 1$ класс R_p содержит неспрямляемые кривые. Например, известная неспрямляемая "снежинка" фон Коха (напр., [8]) является $(\log_3 4)$-спрямляемой.

Теперь можно сформулировать обобщение теоремы Н.А. Давыдова для неспрямляемых кривых.

Теорема 1. *Если кривая Γ является Φ-спрямляемой, где функция $\Phi(x)$ выпуклая*[1], *и $f \in H_1(\Gamma)$, то интеграл типа Коши* (1) *существует и непрерывен в замыканиях областей D^+ и D^- при условии*

$$\sum_{n=1}^\infty \varphi^2(1/n) < \infty, \tag{3}$$

где φ — функция, обратная к Φ.

Доказательство начнем с обоснования существования контурного интеграла (1) при условиях теоремы 1. Как уже отмечалось, Φ-спрямляемость кривой Γ равносильна включению отображения $z = z(x) : I \mapsto \Gamma$ в класс $V_\Phi(I)$. Пусть функция $f \in H_1(\Gamma)$ отлична от постоянной, т. е. $h_1(f;\Gamma) = h \neq 0$. Положим $f_0(t) \equiv f(t)/h$. Тогда для любого разбиения $\{z_j\}_{j=0}^{j=n}$ имеем

$$\sum_{j=1}^n \Phi(|f_0(z_j) - f_0(z_{j-1})|) \leq \sum_{j=1}^n \Phi(|z_j - z_{j-1}|) \leq \sigma_\Phi(\Gamma),$$

т. е. $f_0 \in V_\Phi(\Gamma)$, $f_0(z(x)) \in V_\Phi(I)$, и $v_\Phi(f_0 \circ z; I) \leq \sigma_\Phi(\Gamma)$. Тогда в силу теоремы Л. Юнга интеграл $\int\limits_0^1 f_0(z(x))dz(x) = \int\limits_\Gamma f_0 dz$ существует при условии (3). Очевидно, тогда существует и интеграл $\int\limits_\Gamma f dz$. При любом фиксированном $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ функция $\widetilde{f}(t) = f(t)/(t-z)$ удовлетворяет условию Липшица вместе с $f(t)$. Поэтому интеграл типа Коши (1) также существует при условии (3).

Перейдем к доказательству непрерывности этого интеграла на Γ. Продолжим функцию f с кривой Γ на всю плоскость $\mathbb{C}$ посредством оператора продолжения Уитни $\mathcal{E}_0$ [9] и обозначим полученную функцию через $f^w(z)$. Напомним некоторые свойства продолжения Уитни липшицевой функции, доказательства которых можно найти в [9],

а) сужение f^w на Γ совпадает с f;

б) $f^w \in H_1(\mathbb{C})$;

в) в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ продолженная функция f^w имеет частные производные всех порядков;

г) первые частные производные функции f^w ограничены.

Докажем, что для функции f^w справедлива формула Стокса

$$\int\limits_\Gamma f^w(z)dz = -\iint\limits_{D^+} \frac{\partial f^w}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}. \tag{4}$$

Для этого фиксируем отображение $z = z(x) : I \mapsto \Gamma$, о котором шла речь выше. Положим $x_{j,n} = j/2^n$, $z_{j,n} = z(x_{j,n})$, $j = 0, 1, \ldots, 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$, и определим комплекснозначную кусочно-линейную функцию $z_n(x)$ равенствами $z_n(x_{j,n}) = z(x_{j,n})$, $j = 0, 1, \ldots, 2^n$; на интервалах $\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]$ эта функция линейна. Она отображает I на замкнутую ломаную (цепь) Γ_n, возможно, самопересекающуюся, которая ограничивает один или несколько многоугольников. Совокупность

[1] т. е. $\Phi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$ при $x, y > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$.

этих многоугольников с приписанным каждому из них знаком + или − в зависимости от того, слева или справа от Γ_n этот многоугольник находится, будем обозначать D_n^+. Далее, положим $f_0^w(z) \equiv f^w(z)/h_1(f^w;\mathbb{C})$. Очевидно, для этой функции справедлива формула Стокса

$$\int\limits_{\Gamma_n} f_0^w(z)dz = -\iint\limits_{D_n^+} \frac{\partial f_0^w}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}, \tag{5}$$

если в правой части стоит сумма интегралов во вышеописанным многоугольникам с соответствующими знаками. Левую часть этого равенства можно записать в виде интеграла Стильтьеса $\int\limits_0^1 f_0^w(z_n(x))dz_n(x)$. В силу выпуклости Φ имеем $V_\Phi(z_n;I) \leq V_\Phi(z;I) = \sigma_\Phi(\Gamma)$ (см. [10]; до этого условие выпуклости Φ в данном доказательстве не использовалось). Так же, как и выше, отсюда следует оценка $v_\Phi(f_0^w \circ z_n;I) \leq \sigma_\Phi(\Gamma)$. Таким образом, последовательности функций $\{z_n(x)\}$ и $\{f_0^w(z_n(x))\}$ равномерно сходятся и имеют ограниченные в совокупности Φ-вариации. Поэтому (см. [10]; здесь также используется выпуклость функции Φ) предел последовательности интегралов $\int\limits_0^1 f_0^w(z_n(x))dz_n(x)$ существует и равен $\int\limits_0^1 f_0^w(z(x))dz(x) = \int\limits_\Gamma f_0^w dz$. Легко убедится, что предел интеграла в правой части (5) также существует и равен $\iint\limits_{D^+} \frac{\partial f_0^w}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}$. Отсюда следует справедливость равенства (4).

Из только что проведенного рассуждения следует, что формула Стокса (4) справедлива не только для продолжения Уитни, но и для любой функции f^w, удовлетворяющая условиям а)–г). Более того, эта функция может быть определена не в $\mathbb{C}$, а в любой содержащей D^+ области D'; соответственно условие б) можно заменить на $f^w \in H_1(D')$, а в условииях в) и г) можно требовать существования и ограниченности первых частных производных лишь в $D' \setminus \Gamma$.

Применим теперь эту формулу к функции $f(t)/(t-z)$. Если фиксированная точка z лежит в D^-, то подходящим ее продолжением является функция $f^w(t)/(t-z)$, $t \in D'$, где f^w — продолжение Уитни; в качестве области D' здесь можно взять любую конечную область, содержащую D^+ и не содержащую z. В результате получим

$$\int\limits_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z} = -\iint\limits_{D^+} \frac{\partial f^w}{\partial \overline{t}} \frac{dt\, d\overline{t}}{t-z}, \quad z \in D^-.$$

Если $z \in D^-$, то продолжение $f^w(t)/(t-z)$ следует заново определить в малом круге $\{t : |t-z| < \varepsilon\}$ так, чтобы оно стало непрерывно дифференцируемым в D^+. Рутинные вычисления дают в итоге

$$\int\limits_\Gamma \frac{f(t)dt}{t-z} = 2\pi i f^w(z) - \iint\limits_{D^+} \frac{\partial f^w}{\partial \overline{t}} \frac{dt\, d\overline{t}}{t-z}, \quad z \in D^+.$$

Объединив две последние формулы, получаем

$$K_f(z) = \chi(z) f^w(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{D^+} \frac{\partial f^w}{\partial \overline{t}} \frac{dt\, d\overline{t}}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \tag{6}$$

где $\chi(z)$ — характеристическая функция области D^+. Интеграл в правой части (6) подробно изучен (см., напр., [11]). Если его плотность ограничена, то он представляет функцию, непрерывную во всей плоскости. Непрерывность слагаемого $\chi(z)f^w(z)$ в замыканиях областей D^+ и D^- очевидна. $\square$

Следствие. Если кривая Γ является p-спрямляемой, $1 \leq p < 2$, и $f \in H_1(\Gamma)$, то интеграл типа Коши (1) существует и непрерывен в замыканиях областей D^+ и D^-.

Функция $\Phi(x) = x^p$, $p \geq 1$, выпукла, и условие (3) для нее имеет вид $p < 2$. Таким образом, следствие вытекает непосредственно из теоремы 1.

Рассмотрим более простое условие существования интеграла Стильтьеса $\int\limits_0^1 f dg$, чем теорема Юнга. Хорошо известно (см., напр., [4]), что этот интеграл существует, если функция g непрерывна, а $f \in V_1(I)$. Следовательно, интеграл $\int\limits_\Gamma f dz$ существует, если Γ есть произвольная жорданова кривая, а $f \in V_1(\Gamma)$. Если кривая Γ неспрямляема, то класс Липшица $H_1(\Gamma)$ не является подмножеством класса $V_1(\Gamma)$. В связи с этим возникает следующее предположение:

– если $f \in H_1(\Gamma) \cap V_1(\Gamma)$, то интеграл типа Коши (1) по произвольной замкнутой жордановой кривой Γ непрерывен в замыканиях областей D^+ и D^-.

Автору пока не удалось доказать это предположение в полном объеме, но один результат в этом направлении здесь приведем.

Определение 4. Класс $\mathcal{GC}$ состоит из простых замкнутых жордановых кривых, представимых в виде объединения конечного числа графиков (возможно, повернутых) непрерывных вещественных функций.

Пусть $\Gamma \in \mathcal{GC}$, т. е. эта кривая представима в виде объединения графиков γ_j, $j = 1, 2, \dots, m$, $m = m(\Gamma)$, непрерывных вещественных функций $y = y_j(x)$, каждый из которых повернут на угол θ_j, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда $\gamma_j = \{t = (x + iy)e^{i\theta_j} : a_j < x < b_j,\ y = y_j(x)\}$, где $[a_j, b_j] \equiv I_j$ — отрезок вещественной оси, и сужение на γ_j любой заданной на Γ функции $f(t)$ можно рассматривать как функцию вещественной переменной x: $f|_{\gamma_j}(e^{i\theta_j}(x + iy_j(x))) \equiv f_j(x)$, $x \in I_j$.

Определение 5. Заданную на кривой $\Gamma \in \mathcal{GC}$ функцию $f(t)$ будем относить к классу $\mathcal{H}_1(\Gamma)$, если она непрерывна и $f_j \in H_1(I_j)$ при $j = 1, 2, \dots, m(\Gamma)$.

Нетрудно убедиться, что $\mathcal{H}_1(\Gamma) \subset H_1(\Gamma) \cap V_1(\Gamma)$, причем на неспрямляемой кривой Γ это включение строгое.

Теорема 2. *Если* $\Gamma \in \mathcal{GC}$ *и* $f \in \mathcal{H}_1(\Gamma)$, *то интеграл типа Коши* (1) *непрерывен в замыканиях областей* D^+ *и* D^-.

Доказательство. Существование контурного интеграла $\int\limits_\Gamma f dz$ и интеграла типа Коши при условиях этой теоремы очевидно. Чтобы получить аналог формулы (6), рассмотрим сначала область вида $D = \{z = x + iy : a < x < b,\ 0 < y < y(x)\}$, где $y(x)$ — положительная непрерывная функция. Любая заданная на отрезке $J = [a, b]$ функция $f \in H_1(J)$ допускает тривиальное продолжение в полосу $J^* = J \times \mathbb{R} \supset D$ до функции $f^*(x + iy) = f(x)$. Очевидно, $f^* \in W^1_\infty$, и для этой функции справедлива формула Стокса в любой области $D' \subset J^*$ с кусочно-гладкой границей. Пусть $\{y_n(x)\}$ есть последовательность положительных гладких функций, равномерно сходящаяся к $y(x)$ на отрезке J. Положим $D_n = \{z = x + iy : a < x < b,\ 0 < y < y_n(x)\}$. Тогда

$$\int\limits_{\partial D_n} f^*(z)dz = -\iint\limits_{D_n} \frac{\partial f^*}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}.$$

Последовательность функций $\{f^*(y_n(x)\}$ равномерно сходится к $f^*(y(x))$, имея ограниченные в совокупности вариации. В силу стандартных теорем о переходе к пределу под знаком интеграла Стильтьеса (см., напр., [4]) отсюда следует справедливость формулы Стокса

$$\int\limits_{\partial D} f^*(z)dz = -\iint\limits_{D} \frac{\partial f^*}{\partial \overline{z}} dz\, d\overline{z}.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, из этой формулы получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f^*(t)dt}{t - z} = \chi(z) f^*(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{D} \frac{\partial f^*}{\partial \overline{t}} \frac{dt\, d\overline{t}}{t - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \partial D, \tag{7}$$

где $\chi(z)$ — характеристическая функция области D, а из этого равенства следует непрерывность интеграла типа Коши, стоящего в его левой части, в замыканиях области D и ее дополнения. Складывая равенства вида (7) для областей, связанных с составляющими кривую Γ графиками γ_j, после простых преобразований получаем утверждение теоремы. $\square$

Отметим, что из доказательств теорем 1, 2 следует, что при их условиях интеграл типа Коши (1) обладает и некоторыми дополнительными свойствами. Так, из формул (6) и (7) следует, что разность его граничных значений на Γ равна $f(t)$, что позволяет использовать этот интеграл при решении краевых задач подобно тому, как это делается в случае спрямляемых кривых (см. [1], [2]). Далее, из оценок [11] следует, что эти граничные значения принадлежат классу $H_{1-\varepsilon}(\Gamma)$ для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Этот факт также может оказаться полезным при исследовании краевых задач в областях с неспрямляемыми (в том числе с фрактальными) границами.

Литература

1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Физматгиз, 1962. – 600 с.
3. Давыдов Н.А. *Некоторые вопросы теории граничных значений аналитических функций*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Москва, 1949.
4. Рудин У. *Основы математического анализа.* – М.: Мир, 1976. – 320 с.
5. Young L.C. *General inequalities for Stieltjes integrals and the convergence of Fourier series* // Math. Annalen, Berlin. – 1938. – Bd. 115. – H. 4. – S. 581–612.
6. Wiener N. *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients* // Massachusetts J. of Math. – 1924. – V. 3. – P. 72–94.
7. Young L.C. *An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration* // Acta Math., Uppsala. – 1936. – Bd. 36. – № 3–4. – S. 251–282.
8. Федер Е. *Фракталы.* – М.: Мир, 1991. – 280 с.
9. Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* – М.: Мир, 1973. – 342 с.
10. Lesniewicz R., Orlicz W. *On generalized variation* II // Studia Math. – 1973. – V. 45. – № 1. – P. 71–109.
11. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Наука, 1988. – 512 с.

Казанская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступила
12.04.1999