ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 11 (426)

УДК 519.48

А.Г. ПИНУС

ОБ $\aleph$-ИДЕНТИЧНОСТИ ОТНОШЕНИЙ ЭПИМОРФНОСТИ И ВЛОЖИМОСТИ НА КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ

Работа посвящена вопросу взаимообусловленности отношений эпиморфности и вложимости на алгебрах некоторых многообразий (квазимногообразий). В работе автора [1] доказана финитарная независимость отношений эпиморфности и вложимости на алгебрах любого нетривиального конгруэнц-дистрибутивного многообразия с продолжимыми конгруэнциями. С другой стороны, представляет интерес вопрос существования больших совокупностей алгебр рассматриваемого класса, на которых отношения эпиморфности и вложимости совпадают. В [2] показано, что для любого кардинала $\aleph \geqslant \aleph_0$ в любом нетривиальном конгруэнц-дистрибутивном многообразии $\mathfrak{M}$ с продолжимыми конгруэнциями найдется совокупность $\mathfrak{M}$-алгебр, имеющих мощность $2^{\aleph}$, такая, что отношения эпиморфности и вложимости между алгебрами этой совокупности совпадают и при этом сама совокупность с этими отношениями изоморфна множеству всех подмножеств некоторого множества мощности $2^{\aleph}$ с отношением теоретико-множественного включения. Известно, что для счетных $\mathfrak{M}$-алгебр подобный результат, вообще говоря, не верен. В данной работе приведены некоторые достаточные условия, при которых аналогичный результат имеет место для счетных алгебр ряда многообразий (квазимногообразий).

Напомним, что если $\mathfrak{K}$ — некоторый класс универсальных алгебр, то через $\mathfrak{I}\mathfrak{K}$ обозначается совокупность типов изоморфизма $\mathfrak{K}$-алгебр, если $\aleph$ — произвольный кардинал, то $\mathfrak{K}_{\aleph} = \{\mathfrak{A} \in \mathfrak{K} | |\mathfrak{A}| \leqslant \aleph\}$. На совокупности $\mathfrak{I}\mathfrak{K}$ определим два отношения квазипорядка $\leqslant$ (вложимости) и $\ll$ (эпиморфности) следующим образом: для $a, b \in \mathfrak{I}\mathfrak{K}$ отношение $a \leqslant b$ ($a \ll b$) имеет место тогда и только тогда, когда алгебра типа a изоморфно вложима в алгебру типа b (является гомоморфным образом алгебры типа b). *Скелетом* эпиморфности (вложимости) класса $\mathfrak{K}$ называется квазиупорядоченный класс $\langle \mathfrak{I}\mathfrak{K}; \ll \rangle$ ($\langle \mathfrak{I}\mathfrak{K}; \leqslant \rangle$), *счетным скелетом* эпиморфности (вложимости) класса $\mathfrak{K}$ — квазиупорядоченное множество $\langle \mathfrak{I}\mathfrak{K}_{\aleph_0}; \ll \rangle$ ($\langle \mathfrak{I}\mathfrak{K}_{\aleph_0}; \leqslant \rangle$). *Двойным скелетом* (*двойным счетным скелетом*) класса $\mathfrak{K}$ является дважды квазиупорядоченный класс (множество) $\langle \mathfrak{I}\mathfrak{K}; \ll, \leqslant \rangle$ ($\langle \mathfrak{I}\mathfrak{K}_{\aleph_0}; \ll, \leqslant \rangle$). Более подробно об этих понятиях и о результатах, с ними связанных, см. [2], [3], [4]. Далее рассматриваем лишь алгебры не более чем счетной сигнатуры.

Отношения эпиморфности и вложимости на классе $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр называются *финитарно* (*локально* [1]) *независимыми*, если любое конечное дважды квазиупорядоченное множество изоморфно вложимо в двойной скелет $\langle \mathfrak{I}\mathfrak{K}; \ll \leqslant \rangle$ класса $\mathfrak{K}$. В [1] доказана финитарная независимость отношений эпиморфности и вложимости на любом нетривиальном конгруэнц-дистрибутивном многообразии с продолжимыми конгруэнциями. Более точно, там же доказано, что для любого такого многообразия $\mathfrak{M}$ произвольное конечное дважды квазиупорядоченное множество $\langle A; \leqslant_1, \leqslant_2 \rangle$ изоморфно вложимо в $\langle \mathfrak{I}\mathfrak{M}_{\aleph_1}; \ll, \leqslant \rangle$. Согласно же результатам [5] нельзя утверждать подобную вложимость любого конечного дважды квазиупорядоченного множества $\langle A; \leqslant_1, \leqslant_2 \rangle$ в счетный скелет $\langle \mathfrak{I}\mathfrak{M}_{\aleph_0}; \ll \leqslant \rangle$ произвольного нетривиального конгруэнц-дистрибутивного многообразия с продолжимыми конгруэнциями (даже произвольного дискриминаторного многообразия), т.е. отношения эпиморфности и вложимости на счетных алгебрах подобных многообразий уже не обязаны быть финитарно независимыми.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-00183).

Пусть $\langle A;\leqslant\rangle$ — некоторое квазиупорядоченное множество, через $\langle A;\leqslant,\leqslant\rangle$ обозначим множество A, наделенное двумя квазипорядками, второй из которых идентичен первому.

Определение. Отношения эпиморфности и вложимости на классе $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр назовем $\langle A;\leqslant\rangle$-*идентичными*, если существует изоморфное вложение дважды квазиупорядоченного множества $\langle A;\leqslant,\leqslant,\rangle$ в двойной скелет $\langle\mathfrak{I}\mathfrak{K};\ll,\leqslant\rangle$ класса $\mathfrak{K}$. Отношения эпиморфности и вложимости на классе $\mathfrak{K}$ назовем $\aleph$-*идентичными* (*частично* $\aleph$-*идентичными*), если эти отношения $\langle A,\leqslant\rangle$-идентичны на классе $\mathfrak{K}_\aleph$ для любого квазиупорядоченного (частично упорядоченного) множества $\langle A;\leqslant\rangle$ мощности $\aleph$.

Очевидно, что если $\langle P(\aleph);\subseteq\rangle$ — совокупность всех подмножеств кардинала $\aleph$, частично упорядоченная отношением теоретико-множественного включения, то из $\langle P(\aleph);\subseteq\rangle$-идентичности отношений вложимости и эпиморфности на классе $\mathfrak{K}_\aleph$ следует частичная $\aleph$-идентичность этих отношений на классе $\mathfrak{K}$.

Как отмечено в начале работы, для любого нетривиального конгруэнц-дистрибутивного многообразия $\mathfrak{M}$ с продолжимыми конгруэнциями, для любого $\aleph\geqslant\aleph_0$ отношения эпиморфности и вложимости на $\mathfrak{M}$ частично $2^\aleph$-идентичны. Ниже будут приведены некоторые достаточные условия $\aleph_0$-идентичности отношений эпиморфности и вложимости на квазимногообразиях (многообразиях).

В дальнейшем через $\operatorname{Con}\mathfrak{A}$ будем обозначать решетку конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$. Для любого класса $\mathfrak{K}$, для любой алгебры $\mathfrak{A}$ конгруэнцию $\theta\in\operatorname{Con}\mathfrak{A}$ назовем $\mathfrak{K}$-конгруэнцией, если $\mathfrak{A}/\theta\in\mathfrak{K}$. Совокупность $\mathfrak{K}$-конгруэнций на алгебре $\mathfrak{A}$, частично упорядоченную отношением включения, будем обозначать через $\operatorname{Con}^{\mathfrak{K}}\mathfrak{A}$.

Для любого класса алгебр $\mathfrak{K}$ неодноэлементная $\mathfrak{K}$-алгебра $\mathfrak{A}$ называется $\mathfrak{K}$-простой, если для любой нетривиальной конгруэнции θ (т.е. отличной от наибольшей $\bigtriangledown_{\mathfrak{A}}$ и наименьшей $\triangle_{\mathfrak{A}}$) алгебры $\mathfrak{A}$ фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\theta$ не принадлежит $\mathfrak{K}$. Если $\mathfrak{K}$ замкнут относительно гомоморфных образов, то очевидно, что понятие $\mathfrak{K}$-простой алгебры совпадает с понятием простой алгебры. Напомним, что по теореме Магари любое нетривиальное многообразие $\mathfrak{M}$ содержит не более чем счетную алгебру. Это утверждение В.А.Горбунов [6] обобщил для квазимногообразий: любое нетривиальное квазимногообразие $\mathfrak{K}$ содержит не более чем счетную $\mathfrak{K}$-простую алгебру.

Класс $\mathfrak{K}$ обладает свойством Фрезера-Хорна, если для любых $\mathfrak{K}$-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и любой $\mathfrak{K}$-конгруэнции θ на алгебре $\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$ найдутся $\mathfrak{K}$-конгруэнции $\theta_i\in\operatorname{Con}^{\mathfrak{K}}\mathfrak{A}_i$ такие, что $\theta=\theta_1\times\theta_2$.

Имеет место следующий довольно очевидный факт.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{K}$ — квазимногообразие, обладающее свойством Фрезера-Хорна и $\mathfrak{K}$ содержит $\aleph$ попарно невложимых друг в друга $\mathfrak{K}$-простых конечно-порожденных алгебр, обладающих одноэлементными подалгебрами, то отношения эпиморфности и вложимости на $\mathfrak{K}$ $\aleph$-идентичны.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_i$ $(i\in\aleph)$ — попарно невложимые друг в друга $\mathfrak{K}$-простые конечно-порожденные алгебры и $\{e_i\}$ — одноэлементные подалгебры алгебр $\mathfrak{A}_i$. Для любого $B\subseteq\aleph\setminus\{0\}$ пусть $\mathfrak{A}_B$ — прямая сумма алгебр $\mathfrak{A}_i$ $(i\in B)$, т.е. $\mathfrak{A}_B=\{f\in\prod\limits_{i\in B}\mathfrak{A}_i||\{j\in B\mid f(j)\neq e_j\}|<\aleph_0\}$.

Для доказательства частичной $\aleph$-идентичности достаточно заметить, что для любых $B_1,B_1\subseteq\aleph$ отношения $\mathfrak{A}_{B_1}\leqslant\mathfrak{A}_{B_2}$ $(\mathfrak{A}_{B_1}\ll\mathfrak{A}_{B_2})$ имеют место тогда и только тогда, когда $B_1\subseteq B_2$. Если $B_1\subseteq B_2$, то очевидно, что алгебра $\mathfrak{A}_{B_1}$ изоморфно вложима в алгебру $\mathfrak{A}_{B_2}$ и является гомоморфным образом алгебры $\mathfrak{A}_{B_2}$.

Докажем обратное. Пусть теперь φ — изоморфное вложение некоторой алгебры $\mathfrak{A}_{B_1}$ в алгебру $\mathfrak{A}_{B_2}$ и $j\in B_1$. Так как алгебра $\mathfrak{A}_j$ изоморфно вложима в алгебру $\mathfrak{A}_{B_1}$, то существует вложение алгебры $\mathfrak{A}_j$ в алгебру $\mathfrak{A}_{B_2}$. В силу же простоты алгебры $\mathfrak{A}_j$ найдется $e\in B_2$ такое, что $\mathfrak{A}_j$ вложима в алгебру $\mathfrak{A}_e$. По условию же алгебры $\mathfrak{A}_i$ $(i\in\aleph)$ попарно не вложимы друг в друга. Отсюда $j=e$, т.е. $B_1\subseteq B_2$ в случае вложимости алгебры $\mathfrak{A}_{B_1}$ в алгебру $\mathfrak{A}_{B_2}$. Если теперь ψ — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_{B_1}$ на алгебру $\mathfrak{A}_{B_2}$ и $j\in B_1$, то ввиду конечной порожденности алгебры $\mathfrak{A}_j$ найдутся конечное подмножество C множества B_2 и некоторый гомоморфизм ψ' алгебры $\prod\limits_{e\in C}\mathfrak{A}_e$ на алгебру $\mathfrak{A}_j$. В силу свойства Фрезера-Хорна для квазимногообразия $\mathfrak{K}$ найдутся гомоморфизмы ψ'_e алгебр $\mathfrak{A}_e$ на некоторые $\mathfrak{K}$-алгебры $\mathfrak{A}'_e$ такие, что $\psi' = \prod\limits_{e\in C}\psi'_e$ и $\mathfrak{A}_j = \prod\limits_{e\in C}\mathfrak{A}'_e$. Ввиду $\mathfrak{K}$-простоты алгебры $\mathfrak{A}_j$ алгебра $\mathfrak{A}_j$ изоморфна одной из алгебр $\mathfrak{A}'_e$ $(e\in C)$, к примеру, $\mathfrak{A}'_{e_0}$ $(e_0\in C)$. Но $\mathfrak{K}$-простота алгебры $\mathfrak{A}_{e_0}$ влечет изоморфность $\mathfrak{A}_j$ и $\mathfrak{A}_{e_0}$. Попарная же невложимость друг в друга алгебр $\mathfrak{A}_i$ $(i\in\aleph)$ приводит к тому, что для любого $j\in B_1$ имеет место включение $j\in B_2$, т.е. $B_1\subseteq B_2$ в случае, если $\mathfrak{A}_{B_1}\ll\mathfrak{A}_{B_2}$.

Для доказательства $\aleph$-идентичности отношений вложимости и эпиморфности на $\mathfrak{K}$ достаточно теперь "размыть" вложения дважды частично упорядоченных множеств $\langle A;\leqslant,\leqslant\rangle$ в двойной скелет $\langle\mathfrak{I}\mathfrak{K}_\aleph;\leqslant,\ll\rangle$ до вложений дважды квазиупорядоченных множеств $\langle A;\leqslant,\leqslant\rangle$ в скелет $\langle\mathfrak{I}\mathfrak{K}_\aleph;\leqslant,\ll\rangle$. Для этого достаточно построить некоторую совокупность $\mathfrak{K}_\aleph$-алгебр D такую, что $|D|=\aleph$, алгебры из D попарно неизоморфны друг другу, для различных $\mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2\in D$ $\mathfrak{C}_1\ll\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_1\leqslant\mathfrak{C}_2$ и такую, что для любых $B_1,B_2\subseteq\aleph$ алгебры $\mathfrak{A}_{B_1}\times\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{A}_{B_2}\times\mathfrak{C}_2$ неизоморфны, а отношения $\mathfrak{A}_{B_1}\times\mathfrak{C}_1\ll\mathfrak{A}_{B_2}\times\mathfrak{C}_2$ $(\mathfrak{A}_{B_1}\times\mathfrak{C}_1\leqslant\mathfrak{A}_{B_2}\times\mathfrak{C}_2)$ для построенных выше алгебр $\mathfrak{A}_B$ имеют место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_{B_1}\ll\mathfrak{A}_{B_2}$ $(\mathfrak{A}_{B_1}\leqslant\mathfrak{A}_{B_2})$.

Хорошо известно (см., напр, [1]) существование для любого $\aleph\geqslant\aleph_0$ совокупности D' попарно неизоморфных булевых алгебр мощности $\aleph$ таких, что $|D'|=\aleph$ и для $\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2\in D'$ $\mathfrak{B}_1\ll\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_1\leqslant\mathfrak{B}_2$. Нетрудно заметить, что булевы степени $\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_1}$, $\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_2}$ $\mathfrak{K}$-простой алгебры $\mathfrak{A}_0$ для неизоморфных булевых алгебр $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ и сами остаются неизоморфными. Очевидно также, что отношения $\mathfrak{B}_1\ll\mathfrak{B}_2$ $(\mathfrak{B}_1\leqslant\mathfrak{B}_2)$ влекут отношения $\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_1}\ll\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_2}$ $(\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_1}\leqslant\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_2})$.

С другой стороны, рассуждения, аналогичные приведенным в начале доказательства теоремы, показывают, что отношения $\mathfrak{A}_{B_1}\times\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_1}\ll\mathfrak{A}_{B_2}\times\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_2}$ $(\mathfrak{A}_{B_1}\times\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_1}\leqslant\mathfrak{A}_{B_2}\times\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_2})$ имеют место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_{B_1}\ll\mathfrak{A}_{B_2}$ $(\mathfrak{A}_{B_1}\leqslant\mathfrak{A}_{B_2})$ и алгебры $\mathfrak{A}_{B_1}\times\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_1}$, $\mathfrak{A}_{B_2}\times\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}_2}$ для различных $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ неизоморфны. Поэтому в качестве требуемой совокупности D $\mathfrak{K}$-алгебр годится совокупность $\{\mathfrak{A}_0^{\mathfrak{B}}|\mathfrak{B}\in D'\}$, и $\aleph$-идентичность отношений вложимости и эпиморфности на квазимногообразии $\mathfrak{K}$ доказана. $\square$

Автор [7] ввел понятие бедной алгебры. Через $\mathfrak{D}_2$ обозначим обычное двоичное дерево, т.е. совокупность всех конечных кортежей из нулей и единиц, частично упорядоченную отношением $\leqslant$, где $\bar a\leqslant\bar b$, если кортеж $\bar b$ является начальным интервалом кортежа $\bar a$. Под системой уравнений над алгеброй $\mathfrak{A}$ будем понимать конечную совокупность $\mathfrak{T}$ равенств

$$\mathfrak{T}=\begin{cases}t_1^1(x,\bar a)=t_1^2(x,\bar a),\\ \dots\\ t_n^1(x,\bar a)=t_n^2(x,\bar a),\end{cases}$$

где $t_j^i(x,\bar y)$ — некоторые термы алгебры $\mathfrak{A}$, а $\bar a$ — кортеж элементов этой алгебры. *Совокупностью решений* $S_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T})$ системы уравнений $\mathfrak{T}$ в алгебре $\mathfrak{A}$ назовем множество $\{b\in\mathfrak{A}\mid\mathfrak{A}\models\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n}t_i^1(b,\bar a)=t_i^2(b,\bar a)\}$. Очевидно, что множество $S^{\mathfrak{A}}$ совокупностей решений всех систем уравнений над алгеброй является нижней полурешеткой $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}=\langle S^{\mathfrak{A}};\cap\rangle$ относительно теоретико-множественного пересечения. Согласно [7] алгебра $\mathfrak{A}$ называется *бедной*, если не существует дизъюнктного вложения частичного порядка $\mathfrak{D}_2$ в частичный порядок $\langle S^{\mathfrak{A}};\subseteq\rangle$. При этом под дизъюнктным вложением $\mathfrak{D}_2$ в $\langle S^{\mathfrak{A}};\subseteq\rangle$ понимаем такое изоморфное вложение частично упорядоченного множества $\mathfrak{D}_2$ в $\langle S^{\mathfrak{A}};\subseteq\rangle$, что для любых несравнимых $a,b\in\mathfrak{D}_2$ подмножества $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ основного множества алгебры $\mathfrak{A}$ дизъюнктны, т.е. $\varphi(a)\cap\varphi(b)=\varnothing$. Алгебру, не являющуюся бедной, назовем *богатой.*

Теорема 2. *Если $\mathfrak{K}$ — квазимногообразие, содержащее конечно-порожденную богатую $\mathfrak{K}$-простую алгебру, и класс $\mathfrak{K}$-простых алгебр универсально аксиоматизируем, то существует $2^{\aleph_0}$ попарно невложимых друг в друга конечно-порожденных $\mathfrak{K}$-простых алгебр.*

Доказательство. В дальнейшем для любых алгебр $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$, для $f, g \in \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ через $[f = g]$ обозначим множество $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\}$, а через $[f \neq g]$ — его дополнение $I \setminus [f = g]$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечно-порожденная богатая $\mathfrak{K}$-простая алгебра. Перечислим без повторений элементы $\mathfrak{A}$: $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Для простоты будем считать, что $\mathfrak{A}$ порождена двумя элементами a_0 и a_1. Пусть $\mathfrak{A}'$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}^\omega$, порожденная элементами f_0, f_1 и g, где для любых $i \in \omega$ и $j \in \omega$ $f_i(j) = a_i$ и $g(j) = a_j$. Если $I \subseteq \omega$, то через π_I обозначим естественное проектирование алгебры $\mathfrak{A}'$ на подалгебру алгебры $\mathfrak{A}^I$. Заметим, что любое уравнение на $\mathfrak{A}$ эквивалентно (т.е. имеет те же решения) уравнению вида $t^1(x, a_0, a_1) = t^2(x, a_0, a_1)$, где t^1, t^2 — некоторые термы сигнатуры квазимногообразия $\mathfrak{K}$ от переменных x, y_0, y_1. Заметим также, что любые элементы алгебры $\mathfrak{A}'$ представимы в виде $t(g, f_0, f_1)$, где t — трехместный терм. Отождествляя натуральное число $j \in \omega$ с элементом $a_j \in \mathfrak{A}$ для любых термов $t^1(x, y_0, y_1)$, $t^2(x, y_0, y_1)$ сигнатуры алгебры $\mathfrak{A}$, получим очевидное равенство

$$[t^1(g, f_0, f_1) = t^2(g, f_0, f_1)] = S_{\mathfrak{A}}(t^1(x, a_0, a_1) = t^2(x, a_0, a_1)).$$

Точно так же для любой системы уравнений над $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{T} = \begin{cases} t_1^1(x, a_0, a_1) = t_1^2(x, a_0, a_1), \\ \ldots \\ t_n^1(x, a_0, a_1) = t_n^2(x, a_0, a_1) \end{cases}$$

для любого $I \subseteq \omega$ выполняется

$$\pi_I(\mathfrak{A}') \vDash \mathop{\&}_{i=1}^{n} t_i^1(g, f_0, f_1) = t_i^2(g, f_0, f_1)$$

тогда и только тогда, когда $I \subseteq S_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T})$.

Под фильтром $\mathfrak{F}$ на нижней полурешетке $\langle L; \wedge \rangle$ понимаем такую совокупность элементов из L, что если $a \in \mathfrak{F}$, $b \geqslant a$, то $b \in \mathfrak{F}$, и для любых $a, c \in \mathfrak{F}$ элемент $a \wedge c$ также принадлежит $\mathfrak{F}$. Ультрафильтр на $\langle L; \wedge \rangle$ — это максимальный по включению среди фильтров на L, отличных от самой полурешетки L. Очевидно, что любой ультрафильтр $\mathfrak{F}$ на полурешетке $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$ совокупностей решений систем уравнений над алгеброй $\mathfrak{A}$ (совокупность ультрафильтров на $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$ обозначим через $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}^*$) содержится в некотором ультрафильтре $\mathfrak{F}'$ над ω. Точнее, если $\mathrm{St}(\omega)$ — совокупность всех ультрафильтров на ω, т.е. стоуновское пространство булевой алгебры всех подмножеств множества ω, то через $\check{\mathfrak{F}}$ (для ультрафильтра $\mathfrak{F}$ на полурешетке $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$) обозначим $\{\mathfrak{G} \in \mathrm{St}(\omega) \mid \mathfrak{G} \supseteq \mathfrak{F}\}$. Очевидно, что $\check{\mathfrak{F}}$ — замкнутое подмножество пространства $\mathrm{St}(\omega)$ и для различных ультрафильтров $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ на полурешетке $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$ множества $\check{\mathfrak{F}}_1$, $\check{\mathfrak{F}}_2$ дизъюнктны. Для каждого ультрафильтра $\mathfrak{F}$ на полурешетке $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$ зафиксируем некоторый ультрафильтр $\mathfrak{F}'$ на ω такой, что $\mathfrak{F}' \supseteq \mathfrak{F}$. Так как алгебра $\mathfrak{A}$ богата, то существует дизъюнктное вложение ψ двоичного дерева $\mathfrak{D}_2$ в полурешетку $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}} = \langle S^{\mathfrak{A}}, \cap \rangle$. В частности, существует континуальная совокупность A ультрафильтров на полурешетке $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$ таких, что для различных $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ из A, для некоторых систем $\mathfrak{T}^{\mathfrak{F}}_{\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}$, $\mathfrak{T}^{\mathfrak{G}}_{\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}$ уравнений над $\mathfrak{A}$

$$S_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}^{\mathfrak{F}}_{\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}) \in \mathfrak{F}, \quad S_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}^{\mathfrak{G}}_{\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}) \in \mathfrak{G} \quad \text{и} \quad S_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}^{\mathfrak{F}}_{\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}) \bigcap S_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}^{\mathfrak{G}}_{\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}) = \varnothing.$$

Через A' обозначим совокупность $\{\mathfrak{F}' \mid \mathfrak{F} \in A\}$.

Для ультрафильтров $\mathfrak{F}'$ на ω через $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ обозначим подалгебру ультрастепени $\mathfrak{A}^\omega/\mathfrak{F}'$, состоящую из элементов $f/\mathfrak{F}'$, где $f \in \mathfrak{A}'$. Тогда очевидно, что если

$$\mathfrak{T}^{\mathfrak{F}}_{\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}} = \begin{cases} t^{1,\mathfrak{F}}_{1,\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}(x, a_0, a_1) = t^{2,\mathfrak{F}}_{1,\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}(x, a_0, a_1), \\ \ldots \\ t^{1,\mathfrak{F}}_{n,\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}(x, a_0, a_1) = t^{2,\mathfrak{F}}_{n,\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}(x, a_0, a_1) \end{cases}$$

и

$$\varphi^{\mathfrak{F}}_{\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}(x,y_0,y_1) = \mathop{\&}_{k=1}^{n} t^{1,\mathfrak{F}}_{k,\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}(x,y_0,y_1) = t^{2,\mathfrak{F}}_{k,\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}(x,y_0,y_1),$$

то

$$\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}' \vDash \varphi^{\mathfrak{F}}_{\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}(g/\mathfrak{F}', f_0/\mathfrak{F}', f_1/\mathfrak{F}')$$

и

$$\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}' \vDash \neg\,\varphi^{\mathfrak{G}}_{\{\mathfrak{F},\mathfrak{G}\}}(g/\mathfrak{F}', f_0/\mathfrak{F}', f_1/\mathfrak{F}')$$

для любых различных $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ из A.

Далее, в силу универсальной аксиоматизируемости совокупности $\mathfrak{K}$-простых алгебр алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ просты и конечно-порождены. Покажем, что существует континуум ультрафильтров вида $\mathfrak{F}' \in A'$ таких, что алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{F}'$ попарно невложимы друг в друга, что и составит доказательство утверждения теоремы 2.

На множестве A' введем отношение эквивалентности следующим образом: $\mathfrak{F}' \sim \mathfrak{G}'$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}' \cong \mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'$. Для каждого $\mathfrak{F}' \in A'$ множество $\{\mathfrak{G}' \in A' \mid \mathfrak{G}' \sim \mathfrak{F}'\}$ не более чем счетно.

Действительно, допустим противное, и пусть для некоторого $\mathfrak{F}' \in A'$ множество $\{\mathfrak{G}' \in A' \mid \mathfrak{G}' \sim \mathfrak{F}'\}$ не счетно. В силу того, что все алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'$ порождены тремя элементами $f_0/\mathfrak{G}'$, $f_1/\mathfrak{G}'$ и $g/\mathfrak{G}'$, а сами эти алгебры счетны, найдутся пара ультрафильтров $\mathfrak{G}'_1 \neq \mathfrak{G}'_2$ и некоторый изоморфизм η алгебр $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'_1$ и $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'_2$ такие, что $\eta(f_0/\mathfrak{G}'_1) = f_0/\mathfrak{G}'_2$, $\eta(f_1/\mathfrak{G}'_1) = f_1/\mathfrak{G}'_2$, $\eta(g/\mathfrak{G}'_1) = g/\mathfrak{G}'_2$. Но, с другой стороны, эти ультрафильтры $\mathfrak{G}'_1$, $\mathfrak{G}'_2$ отделимы некоторыми элементами полурешетки $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$, т.е., как указано выше, найдется система уравнений $\mathfrak{T}^{\mathfrak{G}_1}_{\{\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2\}}$ над алгеброй $\mathfrak{A}$ такая, что для соответствующих построенных выше формул $\varphi^{\mathfrak{G}_1}_{\{\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2\}}$ имеет место

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{G}'_1 \vDash \varphi^{\mathfrak{G}_1}_{\{\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2\}}(g/\mathfrak{G}'_1, f_0/\mathfrak{G}'_1, f_1/\mathfrak{G}'_1),$$

но

$$\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'_2 \vDash \neg\,\varphi^{\mathfrak{G}_1}_{\{\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2\}}(g/\mathfrak{G}'_2, f_0/\mathfrak{G}'_2, f_1/\mathfrak{G}'_2).$$

Это противоречит существованию изоморфизма η. Таким образом, действительно для любого $\mathfrak{F}' \in A'$ $\left|\{\mathfrak{G}' \in A' \mid \mathfrak{G}' \sim \mathfrak{F}'\}\right| \leq \aleph_0$, и, значит, $|A'/\sim| = 2^{\aleph_0}$.

Через B обозначим $\{\mathfrak{G}' \in A' \mid$ алгебра $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'$ не является изоморфно вложимой в алгебру $\mathfrak{A}\}$. Аналогично вычислению мощности множества $A'/\sim$ замечаем, что $|B/\sim| = 2^{\aleph_0}$. Более того, для любого кортежа $t \in \mathfrak{D}_2$ имеет место равенство $|\psi^*(t) \cap B/\sim| = 2^{\aleph_0}$, где ψ — указанное в начале доказательства дизъюнктное вложение дерева $\mathfrak{D}_2$ в $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$, а $\psi^*(t) = \{\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}^*_{\mathfrak{A}} \mid \psi(t) \in \mathfrak{G}\}$. При этом, очевидно, можно дополнительно считать выполненным следующее условие: если f — любая бесконечная последовательность нулей и единиц и для $n \in \omega$ f^n — начальный интервал длины n последовательности f, то $\left|\bigcap\limits_{n\in\omega} \psi^*(f^n)\right| = 1$ и $\bigcap\limits_{n\in\omega} \psi^*(f^n) = \{\mathfrak{G}\}$, где $\mathfrak{G}' \in B$.

Через $\mathfrak{D}^n_2$ обозначим подмножество элементов дерева $\mathfrak{D}_2$, состоящее из кортежей длины, не превышающей n. Через $\mathfrak{D}^*_2$ обозначим совокупность последовательностей нулей и единиц длины ω. Для $f \in \mathfrak{D}^*_2$, как и выше, через f^n будем обозначать начальный интервал длины n последовательности f.

Индукцией по n будем строить изоморфные вложения λ_n частично упорядоченных множеств $\mathfrak{D}^n_2$ в дерево $\mathfrak{D}_2$ таким образом, что для $n < m$ λ_m продолжает λ_n и если для $f \in \mathfrak{D}^*_2$ $\lambda(f) = \mathfrak{G}'_f$, где $\mathfrak{G}_f \in \bigcap\limits_{n\in\omega} \psi^*(\lambda_n(f^n))$ (напомним, что ψ — дизъюнктное вложение $\mathfrak{D}_2$ в $\mathfrak{S}_{\mathfrak{A}}$), то для различных $f_1, f_2 \in \mathfrak{D}^*_2$ алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'_{f_1}$ и $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'_{f_2}$ невложимы друг в друга.

Пусть

$$\langle p^0_0(y,z,x) = x,\ p^1_0(y,z,x) = y,\ p^2_0(y,z,x) = z\rangle, \ldots, \langle p^0_n(y,z,x), p^1_n(y,z,x), p^2_n(y,z,x)\rangle, \ldots$$

— перечисление всех возможных троек термов от трех переменных сигнатуры класса $\mathfrak{K}$. Указанные выше вложения λ_n $\mathfrak{D}^n_2$ в $\mathfrak{D}_2$ будем строить так:

для различных $t_1, t_2 \in \mathfrak{D}_2^n$ *для любых* $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ — *ультрафильтров на* $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ *таких, что* $\mathfrak{F}_1 \in \psi^*(\lambda_n(t_1))$, $\mathfrak{F}_2 \in \psi^*(\lambda_n(t_2))$, *отображения* $f_0/\mathfrak{F}_1' \to p_m^0(f_0/\mathfrak{F}_2', f_1/\mathfrak{F}_2', g/\mathfrak{F}_2')$, $f_1/\mathfrak{F}_1' \to p_m^1(f_0/\mathfrak{F}_2', f_1/\mathfrak{F}_2', g/\mathfrak{F}_2')$, $g/\mathfrak{F}_1' \to p_m^2(f_0/\mathfrak{F}_2', f_1/\mathfrak{F}_2', g/\mathfrak{F}_2')$ *при* $m \leqslant n$ *были бы непродолжимы до изоморфного вложения алгебры* $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}_1'$ *в алгебру* $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}_2'$. $(*)$

Этого и будет достаточно, чтобы для различных $f_1, f_2 \in \mathfrak{D}_2^*$ алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'_{f_1}$ и $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'_{f_2}$ были бы невложимы друг в друга.

Для $n = 0$ положим $\lambda_1(\langle 0\rangle) = \langle 0\rangle$, $\lambda_1(\langle 1\rangle) = \langle 1\rangle$. Очевидно, если $\psi(\langle i\rangle) = \mathfrak{T}_i$,

$$\mathfrak{T}_i = \begin{cases} t_1^1(x, a_0, a_1) = t_1^2(x, a_0, a_1), \\ \dots \\ t_n^1(x, a_0, a_1) = t_n^2(x, a_0, a_1) \end{cases}$$

и

$$\varphi_{\mathfrak{T}_i}(x, y, y_1) = \mathop{\&}_{i=1}^{n} t_k^1(x, y_0, y_1) = t_k^2(x, y_0, y_1),$$

то для любых $\mathfrak{G}_1 \in \psi^*(\langle 0\rangle)$, $\mathfrak{G}_2 \in \psi^*(\langle 1\rangle)$

$$\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_1' \vDash \varphi_{\mathfrak{T}_0}(g/\mathfrak{G}_1', f_0/\mathfrak{F}_1', f_1/\mathfrak{G}_1')$$

и

$$\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_2' \vDash \neg\varphi_{\mathfrak{T}_0}(g/\mathfrak{G}_2', f_0/\mathfrak{G}_2', f_1/\mathfrak{G}_2'),$$

а значит, действительно, отображение η:

$$\begin{gathered} f_0/\mathfrak{G}_1' \to p_0^0(f_0/\mathfrak{G}_2', f_1/\mathfrak{G}_2', g/\mathfrak{G}_2') = f_0/\mathfrak{G}_2', \\ f_1/\mathfrak{G}_1' \to p_0^1(f_0/\mathfrak{G}_2', f_1/\mathfrak{G}_2', g/\mathfrak{G}_2') = f_1/\mathfrak{G}_2', \\ g/\mathfrak{G}_1' \to p_0^2(f_0/\mathfrak{G}_2', f_1/\mathfrak{G}_2', g/\mathfrak{G}_2') = g/\mathfrak{G}_2' \end{gathered}$$

и обратное к нему непродолжимы до изоморфных вложений алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_1'$ в $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_2'$ и алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_2'$ в $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_1'$.

Пусть теперь уже построены отображения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, удовлетворяющие указанным выше индуктивным условиям, и пусть $t_1, \dots, t_{2^n}$ — все кортежи длины n, состоящие из нулей и единиц. Фиксируем некоторое j такое, что $1 < j \leq 2^n$ и рассмотрим два случая

а) $\pi_{\psi(\lambda_n(t_j))}(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g)) \neq \pi_{\psi(\lambda_n(t_j))}(p_{n+1}^1(f_0, f_1, g))$,

б) $\pi_{\psi(\lambda_n(t_j))}(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g)) = \pi_{\psi(\lambda_n(t_j))}(p_{n+1}^1(f_0, f_1, g))$.

В первом случае для $i = 0, 1$ пусть r_j^i является наименьшим натуральным числом r таким, что если

$$\psi(\lambda_n(t_j)^\frown\langle \underbrace{i, \dots, i}_{r \text{ раз}}\rangle) = S_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}_i(x, a_0, a_1)),$$

$$\mathfrak{T}_i(x, a_0, a_1) = \begin{cases} t_{1,i}^1(x, a_0, a_1) = t_{1,i}^2(x, a_0, a_1), \\ \dots \\ t_{n,i}^1(x, a_0, a_1) = t_{n,i}^2(x, a_0, a_1), \end{cases}$$

то

$$\psi(\lambda_n(t_j)) \bigcap \bigcup_{k=1}^{n} [t_{k,i}^1(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g), p_{n+1}^1(f_0, f_1, g), p_{n+1}^2(f_0, f_1, g)) \neq$$
$$\neq t_{k,i}^2(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g), p_{n+1}^1(f_0, f_1, g), p_{n+1}^2(f_0, f_1, g))] \neq \varnothing \quad (**)$$

Прежде всего заметим, что такое r найдется. В противном случае для одного из i, равных нулю либо единице, относительно $r \in \omega$ и любых систем уравнений $\mathfrak{T}_i^r(x, a_0, a_1)$ таких, что

$$\psi(\lambda_n(t_1)^\frown\langle \underbrace{i, \ldots, i}_{r \text{ раз}}\rangle = S_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}_i^r(x, a_0, a_1)),$$

имеет место включение

$$\psi(\lambda_n(t_j)) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n_r} [t_{k,i}^{1,r}(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g), p_{n+1}^1(f_0, f_1, g), p_{n+1}^2(f_0, f_1, g)) = \\ = t_{k,i}^{2,r}(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g), p_{n+1}^1(f_0, f_1, g), p_{n+1}^2(f_0, f_1, g))],$$

где

$$\mathfrak{T}_i^r = \begin{cases} t_{1,i}^{1,r}(x, a_0, a_1) = t_{1,i}^{2,r}(x, a_0, a_1), \\ \ldots \\ t_{n_r,i}^{1,r}(x, a_0, a_1) = t_{n_r,i}^{2,r}(x, a_0, a_1). \end{cases}$$

Но тогда если $\{\mathfrak{F}\} = \bigcap_{r \in \omega} \psi^*(\lambda_n(t_1)^\frown\langle \underbrace{i, \ldots, i}_{r \text{ раз}}\rangle)$, то $\mathfrak{F}' \in B$ и отображение $\eta : f_0/\mathfrak{F}' \to p_{n+1}^0(f_0, f_1, g) \upharpoonright \psi(\lambda_n(t_j))$, $f_1/\mathfrak{F}' \to p_{n+1}^1(f_0, f_1, g) \upharpoonright \psi(\lambda_n(t_j))$, $g/\mathfrak{F}' \to p_{n+1}^2(f_0, f_1, g) \upharpoonright \psi(\lambda_n(t_j))$ продолжимо до изоморфного вложения алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ в декартову степень $\mathfrak{A}^{\psi(\lambda_n(t_j))}$ алгебры $\mathfrak{A}$.

Действительно, из равенства $\left|\bigcap_{r \in \omega} \psi^*(\lambda_n(t_1)^\frown\langle \underbrace{i, \ldots, i}_{r \text{ раз}}\rangle)\right| = 1$ очевидно следует, что позитивная диаграмма алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ аксиоматизируема совокупностью равенств $\bigcup_{r \in \omega} \mathfrak{T}_i^r(g/\mathfrak{F}', f_0/\mathfrak{F}', f_1/\mathfrak{F}')$, а значит, и на алгебре $\mathfrak{A}^{\psi(\lambda_n(t_j))}$ истинна позитивная диаграмма алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ при интерпретации порождающих алгебру $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ элементов $f_0/\mathfrak{F}'$, $f_1/\mathfrak{F}'$ и $g/\mathfrak{F}'$ элементами $\pi_{\psi(\lambda_n(t_j))}(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g))$, $\pi_{\psi(\lambda_n(t_j))}(p_{n+1}^1(f_0, f_1, g))$, $\pi_{\psi(\lambda_n(t_j))}(p_{n+1}^2(f_0, f_1, g))$ алгебры $\mathfrak{A}^{\psi(\lambda_n(t_j))}$ соответственно.

С другой стороны, алгебра $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ $\mathfrak{K}$-проста, а значит, поскольку $\pi_{\psi(\lambda_n(t_j))}(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g)) \neq \pi_{\psi(\lambda_n(t_j))}(p_{n+1}^1(f_0, f_1, g))$, то отображение η действительно продолжимо до изоморфного вложения $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ в $\mathfrak{A}^{\psi(\lambda_n(t_j))}$. Та же $\mathfrak{K}$-простота алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ влечет при этом вложимость $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ в алгебру $\mathfrak{A}$ в противоречие с тем, что $\mathfrak{F}'$ является элементом множества B. Таким образом, указанные в условии $(*)$ числа r_i^j найдутся. Пусть $r = \max_{1 < j \leqslant 2^n,\, i=0,1} r_i^j$. Заметим теперь, что найдется кортеж $t_j' \in \mathfrak{D}_2$, продолжающий кортеж $\lambda_n(t_j)$ и такой, что

$$\psi(t_j') \subseteq \bigcap_{i=0,1} \bigcup_{k=1}^{n} [t_{k,i}^1(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g), p_{n+1}^1(f_0, f_1, g), p_{n+1}^2(f_0, f_1, g)) \neq \\ \neq t_{k,i}^2(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g), p_{n+1}^1(f_0, f_1, g), p_{n+1}^2(f_0, f_1, g))],$$

где

$$\psi(\lambda_n(t_1)^\frown\langle \underbrace{i, \ldots, i}_{r \text{ раз}}\rangle) = S_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}_i(x, a_0, a_1))$$

и

$$\mathfrak{T}_i(x, a_0, a_1) = \begin{cases} t_{1,i}^1(x, a_0, a_1) = t_{1,i}^2(x, a_0, a_1), \\ \ldots \\ t_{n,1}^1(x, a_0, a_1) = t_{n,i}^2(x, a_0, a_1). \end{cases}$$

Действительно, пусть никакого подобного кортежа t_j' не нашлось и пусть $f \in \mathfrak{D}_2^*$ и f продолжает кортеж $\lambda_n(t_j)$. Тогда для любого $m \in \omega$ имели бы $\psi(f^m) \cap A \neq \varnothing$ и $\psi(f^m) \cap \neg A \neq \varnothing$, где

$$A = \bigcap_{i=0,1} \bigcup_{k=1}^{n} [t_{k,i}^1(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g), p_{n+1}^1(f_0, f_1, g), p_{n+1}^2(f_0, f_1, g)) \neq \\ \neq t_{k,i}^2(p_{n+1}^0(f_0, f_1, g), p_{n+1}^1(f_0, f_1, g), p_{n+1}^2(f_0, f_1, g))].$$

В силу замкнутости A, $\neg A$ и множеств $\psi(f_m)$ в компактном пространстве $\mathrm{St}(\omega)$ имеют место и неравенства

$$\bigcap_{m\in\omega}\psi(f^m)\bigcap A\neq\varnothing,\qquad \bigcap_{m\in\omega}\psi(f^m)\bigcap\neg A\neq\varnothing.$$

В то же время $\left|\bigcap\limits_{m\in\omega}\psi^*(f^m)\right| = 1$ и пусть $\bigcap\limits_{m\in\omega}\psi^*(f^m) = \{\mathfrak{F}\}$, где $\mathfrak{F}\in\mathfrak{S}^*_{\mathfrak{A}}$. Если $\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2\in\mathrm{St}(\omega)$ таковы, что $\mathfrak{G}_{\in}\bigcap\limits_{m\in\omega}\psi(f^m)\bigcap A$, $\mathfrak{G}_2\in\bigcap\limits_{m\in\omega}\psi(f^m)\bigcap\neg A$, то $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{G}_2$.

Как уже отмечалось выше, позитивные диаграммы алгебр $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'$ и $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_2$ полностью определяемы совокупностью равенств $\bigcup\limits_{m\in\omega}\mathfrak{T}_m(g/\mathfrak{G}_1,f_0/\mathfrak{G}_1,f_1/\mathfrak{G}_1)$ и $\bigcup\limits_{m\in\omega}\mathfrak{T}_m(g/\mathfrak{G}_2,f_0/\mathfrak{G}_2,f_1/\mathfrak{G}_2)$ соответственно, где $\mathfrak{T}_m(x,a_0,a_1)$ — система уравнений на $\mathfrak{A}$, соответствующая кортежу $f_m\in\mathfrak{D}_2$ при отображении ψ, т.е. позитивные диаграммы алгебр $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_2$ совпадают при замене $f_0/\mathfrak{G}_1$, $f_1/\mathfrak{G}_1$, $g/\mathfrak{G}_1$ на $f_0/\mathfrak{G}_2$, $f_1/\mathfrak{G}_2$, $g/\mathfrak{G}_2$. С другой стороны, т.к. $\mathfrak{G}_1\in A$ и $\mathfrak{G}_2\in\neg A$, то

$$\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_1\vDash\phi(f_0/\mathfrak{G}_1,f_1/\mathfrak{G}_1,g/\mathfrak{G}_1)\quad\text{ и }\quad\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}_2\vDash\neg\phi(f_0/\mathfrak{G}_2,f_1/\mathfrak{G}_2,g/\mathfrak{G}_2),$$

где

$$\phi(y_0,y_1,x)=\mathop{\&}_{i=1,2}\bigvee_{k=1}^{n}t^1_{k,i}(p^0_{n+1}(y_)),y_1,x),p^1_{n+1}(y_0,y_1,x),p^2_{n+1}(y_0,y_1,x))\neq$$
$$\neq t^2_{k,i}(p^0_{n+1}(y_0,y_1,x),p^1_{n+1}(y_0,y_1,x),p^2_{n+1}(y_0,y_1,x)).$$

Полученное противоречие и доказывает существование указанного выше кортежа t'_j.

В случае б), отмеченном в начале построения отображения λ_{n+1}, т.е. когда для j $(1<j\leqslant 2^n)$ имеют место равенства

$$\pi_{\psi(\lambda_n(t_j))}(p^0_{n+1}(f_0,f_1,g))=\pi_{\psi(\lambda_n(t_j))}(p^1_{n+1}(f_0,f_1,g)),$$

выбираем t'_j, равным t_j. Построенные таким образом для любого j, $1<j\leqslant 2^n$, кортежи t'_j обладают тем свойством, что для любых $\mathfrak{F}\in\psi^*(t_1{}^\frown\langle\underbrace{i,\ldots,i}_{r\text{ раз}}\rangle)$ и $\mathfrak{G}\in\psi^*(t'_j)$ отображения η_e $(e\leqslant n+1)$ такие, что $f_0/\mathfrak{F}'\to p^0_e(f_0/\mathfrak{G}',f_1/\mathfrak{G}',g/\mathfrak{G}')$, $f_1/\mathfrak{F}'\to p^1_e(f_0/\mathfrak{G}',f_1/\mathfrak{G}',g/\mathfrak{G}')$, $g/\mathfrak{F}'\to p^2_e(f_0/\mathfrak{G}',f_1/\mathfrak{G}',g/\mathfrak{G}')$, непродолжимы до изоморфного вложения алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{F}'$ в алгебру $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'$.

Аналогичные построения позволяют добиться того же и для любых ультрафильтров $\mathfrak{F}\in\psi^*(t_1{}^\frown\langle\underbrace{0,\ldots,0}_{r\text{ раз}}\rangle)$, $\mathfrak{G}\in\psi^*(t_1{}^\frown\langle\underbrace{1,\ldots,1}_{r\text{ раз}}\rangle)$. Продолжая эти же построения и далее для всех t'_j $(1<j\leqslant 2^n)$ на месте t_1, в конечном счете получаем необходимые вложения λ_{n+1} множества $\mathfrak{D}_2^{n+1}$ в $\mathfrak{D}_2$, для которых выполнено условие $(*)$. Таким образом, как уже было отмечено выше, для различных $f_1,f_2\in\mathfrak{D}^*_2$, если $\mathfrak{G}_{f_i}\in\bigcap\limits_{n\in\omega}\psi^*(\lambda_n(f^n_i))$, то алгебры $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'_{f_1}$ и $\mathfrak{A}'/\mathfrak{G}'_{f_2}$ невложимы друг в друга. □

Из утверждений теорем 1 и 2 вытекает

Следствие. Если $\mathfrak{K}$ — квазимногообразие, содержащее конечно-порожденную богатую $\mathfrak{K}$-простую алгебру с одноэлементной подалгеброй, обладающее свойством Фрезера-Хорна, и класс $\mathfrak{K}$-простых алгебр $\forall$-аксиоматизируем, то отношения эпиморфности и вложимости на $\mathfrak{K}$ $\aleph_0$-идентичны.

Условия следствия выполнимы, к примеру, для любого дискриминаторного многообразия, содержащего конечно-порожденную богатую простую алгебру.

Любое не локально конечное дискриминаторное многообразие содержит простую бесконечную конечно-порожденную алгебру, однако, как показывает следующий пример, условие существования простой (не богатой) бесконечной конечно-порожденной алгебры для справедливости заключения теоремы 1 не достаточно.

Пусть Z — совокупность всех целых, а N — натуральных чисел, при этом операция $'$ определена на Z и N как $x+1$. Пусть $d(x,y,z)$ означает функцию дискриминатора на любом рассматриваемом множестве. Через $\mathfrak{A}_0$ обозначим алгебру $\langle N;', d\rangle$, а через $\mathfrak{A}_1$ — алгебру $\langle Z;', d\rangle$, тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_0)$ — не локально конечное дискриминаторное многообразие. По теореме Йонссона совокупность подпрямо неразложимых (простых) $\mathfrak{M}$-алгебр содержится в классе $SP_u(\mathfrak{A}_0)$, т.е. в классе, состоящем из подалгебр ультрастепеней алгебры $\mathfrak{A}_0$. Тем самым, любая простая $\mathfrak{M}$-алгебра имеет вид дизъюнктного объединения алгебр вида $\langle N;'\rangle$, $\langle Z;'\rangle$ с последующим определением функции d как дискриминатора на этом объединении. Итак, в качестве инвариантов для счетных простых $\mathfrak{M}$-алгебр $\mathfrak{A}$ выступает пара $\langle u_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}}\rangle$, где $u_{\mathfrak{A}}, v_{\mathfrak{A}} \in \omega \cup \{\aleph_0\}$ и $u_{\mathfrak{A}}$ — число дизъюнктных слагаемых вида $\langle N;'\rangle$, а $v_{\mathfrak{A}}$ — вида $\langle Z;'\rangle$. Очевидно также, что для простых счетных $\mathfrak{M}$-алгебр $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ имеет место вложимость $\mathfrak{C}_1$ в $\mathfrak{C}_2$ тогда и только тогда, когда $v_{\mathfrak{C}_1} \leqslant v_{\mathfrak{C}_2}$ и $u_{\mathfrak{C}_1} \leqslant u_{\mathfrak{C}_2} + (v_{\mathfrak{C}_2} - v_{\mathfrak{C}_1})$. Здесь $\aleph_0 - n = \aleph_0 - \aleph_0 = \aleph_0$ для любого $n \in \omega$. Без труда замечается, что любая совокупность попарно невложимых друг в друга счетных простых алгебр конечна.

Литература

1. Пинус А.Г. *Об отношениях вложимости и эпиморфности на конгруэнц-дистрибутивных многообразиях* // Алгебра и логика. – 1985. – Т. 25. – № 5. – С. 588–607.
2. Pinus A.G. *Boolean constructions in Universal algebra.* – Kluwer Academ. Publ.: Dordrecht–Boston–London, 1993. – 350 p.
3. Пинус А.Г. *Булевы конструкции в универсальной алгебре* // УМН. – 1992. – Т. 47. – № 4. – С. 145–180.
4. Пинус А.Г. *Конгруэнц-дистрибутивные многообразия алгебр* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1988. – Т. 26. – С. 45–83.
5. Пинус А.Г. *О простых счетных скелетах эпиморфности конгруэнц-дистрибутивных многообразий* // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 11. – С.67–70.
6. Горбунов В.А. *Характеризация резидуально малых квазимногообразий* // ДАН СССР. – 1984. – Т. 29. – № 2. – С. 204–207.
7. Пинус А.Г. *О скелетах вложимости не локально конечных дискриминаторных многообразий с бедной алгеброй* // Алгебра и логика. – 1994. – Т. 31. – № 1. – С. 90–103.

Новосибирский государственный технический университет

Поступила
20.04.1995