ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 5 (468)

УДК 512.541

А.И. ШЕРСТНЕВА (БОТЫГИНА)

U-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПОЧТИ ИЗОМОРФИЗМ АБЕЛЕВЫХ p-ГРУПП ПО ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПОДГРУППАМ

Две группы, каждая из которых изоморфна подгруппе другой группы, называются *почти изоморфными* [1]. Две группы называются *почти изоморфными по подгруппам с некоторым свойством*, если каждая из них изоморфна подгруппе другой группы, обладающей этим свойством. В данной работе рассматривается задача об изоморфизме абелевых p-групп из некоторых классов, почти изоморфных по вполне характеристическим подгруппам, т. е. выясняется: будет ли верен аналог известной теоретико-множественной теоремы Кантора—Шредера-Бернштейна в рассматриваемой ситуации или нет?

Эта задача решается в классе редуцированных сепарабельных p-групп, почти изоморфных по вполне характеристическим подгруппам. Нередуцированные p-группы не рассматриваются, т. к. из почти изоморфизма двух абелевых групп по вполне характеристическим подгруппам следует их изоморфизм тогда и только тогда, когда из почти изоморфизма редуцированных частей этих групп по вполне характеристическим подгруппам вытекает изоморфизм редуцированных частей [2].

Напомним, что согласно Капланскому ([3], с. 61) любая вполне характеристическая подгруппа редуцированной сепарабельной p-группы G однозначно задается некоторой U-последовательностью α для группы G; будем обозначать эту вполне характеристическую подгруппу через $G(\alpha)$.

Определение. Будем говорить, что пара последовательностей (α, β) *задает почти изоморфизм* по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных p-групп, если существуют такие группы G и G' из данного класса, что α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно и $G \cong G'(\alpha)$, $G' \cong G(\beta)$.

Естественно возникают следующие два вопроса: 1) *какие пары последовательностей задают почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных p-групп*; 2) *будет ли из этого почти изоморфизма следовать изоморфизм самих групп.*

Решению этой задачи и посвящена данная работа.

1. U-последовательности

Приведем используемые в работе понятия и факты.

Пусть G — редуцированная сепарабельная p-группа, σ — порядковое число. Через $p^\sigma G$ обозначается подгруппа группы G, определяемая по индукции $p^0G = G$, $p^{\sigma+1}G = p(p^\sigma G)$ и $p^\sigma G = \bigcap\limits_{\rho<\sigma} p^\rho G$, если σ — предельное порядковое число. Наименьшее порядковое число σ, для которого $p^{\sigma+1}G = p^\sigma G$, называется *длиной* группы G ([4], с. 181), *σ-м инвариантом Ульма–Капланского* группы G называется кардинальное число ([4], с. 182)

$$f_G(\sigma) = r((p^\sigma G)[p]/(p^{\sigma+1}G)[p]).$$

Будем обозначать множество целых неотрицательных чисел через Z_0.

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ — возрастающая последовательность ординалов и символов ∞ (для любой пары индексов (i, j), где $i < j$, $\alpha_i < \alpha_j$, если $\alpha_i \neq \infty$, и $\alpha_i = \alpha_j$, если $\alpha_i = \infty$). Если $\alpha_i + 1 < \alpha_{i+1}$, то будем говорить, что последовательность *имеет скачок* в α_{i+1}. *Длиной* $\lambda(\alpha)$ последовательности α называется наименьшее $i \in Z_0$ такое, что $\alpha_i = \infty$; причем $\lambda(\alpha) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i < \infty$ для всех $i \in Z_0$ [5].

Определение ([3], с. 57). Возрастающая последовательность ординалов и символов ∞ $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ называется *U-последовательностью* для группы G, если для любого $\alpha_i \neq \infty$ имеем $\alpha_i < \tau$ (τ — длина группы G) и всякий раз, когда существует скачок в α_n, α_{n-1}-й инвариант Ульма–Капланского группы G отличен от нуля.

Пусть G — редуцированная сепарабельная p-группа, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ — U-последовательность для группы G. Тогда вполне характеристическая подгруппа группы G, соответствующая данной последовательности, имеет следующий вид: $G(\alpha) = \{g \in G \mid (h^*(g), h^*(pg), \dots, h^*(p^n g), \dots) \geq \alpha\}$, где $h^*(g)$ — обобщенная p-высота элемента g.

Приступим к решению поставленной задачи. Обозначим через W_1 множество, состоящее из всех возрастающих последовательностей целых неотрицательных чисел и символов ∞.

Следующая лемма показывает, что пара последовательностей, из которых хотя бы одна не принадлежит множеству W_1, не может задавать почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных p-групп.

Лемма 1.1. *Если последовательность $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ не принадлежит множеству W_1, то она не является U-последовательностью ни для какой редуцированной сепарабельной p-группы G.*

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ не принадлежит множеству W_1 и является U-последовательностью для некоторой редуцированной сепарабельной p-группы G. Тогда по определению U-последовательности α является возрастающей последовательностью и для любого $\alpha_i \neq \infty$ $\alpha_i < \lambda(G)$, где $\lambda(G)$ — длина группы G. Но т. к. в G нет элементов бесконечной высоты, то $\lambda(G) \leq \omega$, т. е. $\alpha_i \neq \infty$ является конечным ординалом, и, следовательно, $\alpha \in W_1$. Получили противоречие. □

2. Инварианты Ульма–Капланского вполне характеристических подгрупп

Для дальнейших исследований необходимо перейти с так называемого “языка U-последовательностей” на “язык инвариантов Ульма–Капланского”, т. е. показать, как связаны инварианты Ульма–Капланского группы G и ее вполне характеристической подгруппы $G(\alpha)$, где α — U-последовательность для группы G.

Для класса прямых сумм циклических групп эта задача полностью решена. Для класса редуцированых сепарабельных p-групп удалось показать, как связаны инварианты Ульма–Капланского группы G и ее неограниченных вполне характеристических подгрупп $G(\alpha)$ (α — U-последовательность для группы G и $\lambda(\alpha) = \infty$).

Теорема 2.1. *Пусть неограниченная* p*-группа G является прямой суммой циклических групп, $S = G(\alpha)$ — ее вполне характеристическая подгруппа, где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ — U-последовательность для группы G и $\lambda(\alpha) = \infty$. Тогда для всех $i \in Z_0$*

$$f_S(i) = \sum_{j=0}^{k_i} f_G(\alpha_i + j), \quad \text{где } \ k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_i \oplus \dots$, где для любого натурального i G_i — прямая сумма циклических групп порядка p^i: $G_i = \bigoplus\limits_{k \in M_i} \langle g_i^{(k)} \rangle$ $(o(g_i^{(k)}) = p^i)$.

Для каждого натурального i построим элементы

$$p^{l-i} g_l^{(k)}, \quad \text{где } \ \alpha_{i-1} + 1 \leq l \leq \alpha_i, \ \ k \in M_l. \tag{2.2}$$

Так как α — возрастающая последовательность, то для всех $0 \le j \le i-1$ имеем $\alpha_{i-1}-(i-1) \ge \alpha_j - j$, откуда $(\alpha_{i-1}+1)-i+j \ge \alpha_j$. Тогда для всех $\alpha_{i-1}+1 \le l \le \alpha_i$ выполняется $l-i+j \ge \alpha_j$, т. е. для любого элемента a вида (2.2) $h^*(p^j a) \ge \alpha_j$. Так как порядок любого элемента a вида (2.2) равен p^i, то для всех $j \ge i$ $p^j a = 0$, откуда $h^*(p^j a) = \infty > \alpha_j$. Этим доказано, что для любого натурального i все элементы вида (2.2) принадлежат $S = G(\alpha)$.

Беря прямую сумму циклических групп, образующими которых служат все элементы вида (2.2), получаем группу $\overline{S}$. Покажем, что $\overline{S} = S$. Допустим, что существует такой элемент $g \in S$, что $g \notin \overline{S}$; $g = \sum\limits_{j=0}^{l_1} m_j p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}$, где $(m_j, p) = 1$, $k_j \in M_{n_j}$ для всех $0 \le j \le l_1$. Так как $g \notin \overline{S}$, то существует такое $0 \le j \le l_1$, что $p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)} \notin \overline{S}$. Возможны два случая.

1. Пусть $n_j \le \alpha_0$. Тогда $h^*(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}) < \alpha_0$, откуда $h^*(g) < \alpha_0$, а это противоречит тому, что $g \in S$.
2. Пусть $\alpha_0 < n_j$. Тогда существует такое натуральное i, что $\alpha_{i-1}+1 \le n_j \le \alpha_i$. Так как $p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)} \notin \overline{S}$, то $r_j < n_j - i$, откуда $o(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}) > p^i$, т. е. $p^i(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}) \ne 0$. Следовательно, $h^*(p^i g) \le h^*(p^i(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)})) = i + r_j < n_j \le \alpha_i$, а это противоречит тому, что $g \in S$.

В обоих случаях получено противоречие. Значит, $\overline{S} = S$. Исходя из построения группы $\overline{S}$, получаем, что инварианты Ульма–Капланского группы S удовлетворяют равенствам (2.1). □

Теорема 2.2. *Пусть неограниченная* p*-группа G является прямой суммой циклических групп, $S = G(\alpha)$ — ее вполне характеристическая подгруппа, где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ — U-последовательность для группы G и $\lambda(\alpha) = m$ $(m \in Z_0)$. Тогда*

1) *при $0 \le i < m-1$ выполняется $f_S(i) = \sum\limits_{j=0}^{k_i} f_G(\alpha_i + j)$, где $k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i$;*
2) *$f_S(m-1) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} f_G(\alpha_{m-1} + j)$;*
3) *при $i \ge m$ выполняется $f_S(i) = 0$.*

Доказательство. Пусть $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_i \oplus \cdots$, где для любого натурального i G_i — прямая сумма циклических групп порядка p^i: $G_i = \bigoplus\limits_{k \in M_i} \langle g_i^{(k)} \rangle$ $(o(g_i^{(k)}) = p^i)$.

Для каждого $1 \le i \le m-1$ построим элементы (2.2). Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2.1, получаем, что все такие элементы принадлежат $S = G(\alpha)$.

Для каждого $i \ge m$ построим элементы

$$p^{i-m} g_i^{(k)}, \text{ где } k \in M_i. \tag{2.3}$$

Аналогично предыдущему получаем, что все такие элементы принадлежат $S = G(\alpha)$.

Беря прямую сумму циклических групп, образующими которых служат все элементы вида (2.2) и (2.3), получаем группу $\overline{S}$. Покажем, что $\overline{S} = S$. Допустим, что существует такой элемент $g \in S$, что $g \notin \overline{S}$; $g = \sum\limits_{j=0}^{l_1} m_j p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}$, где $(m_j, p) = 1$, $k_j \in M_{n_j}$ для всех $0 \le j \le l_1$. Так как $g \notin \overline{S}$, то существует такое $0 \le j \le l_1$, что $p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)} \notin \overline{S}$. Возможны три случая.

1. Пусть $n_j \le \alpha_0$. Тогда $h^*(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}) < \alpha_0$, откуда $h^*(g) < \alpha_0$, а это противоречит тому, что $g \in S$.
2. Пусть $\alpha_0 < n_j \le \alpha_{m-1}$. Тогда существует такое $1 \le i \le m-1$, что $\alpha_{i-1}+1 \le n_j \le \alpha_i$. Так как $p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)} \notin \overline{S}$, то $r_j < n_j - i$, откуда $o(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}) > p^i$, т. е. $p^i(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}) \ne 0$. Следовательно, $h^*(p^i g) \le h^*(p^i(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)})) = i + r_j < n_j \le \alpha_i$, а это противоречит тому, что $g \in S$.
3. Пусть $n_j > \alpha_{m-1}$. Так как $p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)} \notin \overline{S}$, то $r_j < n_j - m$, откуда $o(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}) > p^m$, т. е. $p^m(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}) \ne 0$. Следовательно, $h^*(p^m g) \le h^*(p^m(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)})) < \infty$, а это противоречит тому, что $g \in S$.

Во всех трех случаях получено противоречие. Значит, $\overline{S} = S$. Исходя из построения группы $\overline{S}$, получаем, что инварианты Ульма–Капланского группы S удовлетворяют равенствам 1), 2), 3) данной теоремы. $\square$

Теорема 2.3. *Пусть G – ограниченная* p*-группа, $\lambda(G) = n$ $(n \in Z_0)$, $S = G(\alpha)$ — ее вполне характеристическая подгруппа, где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ — U-последовательность для группы G и $\lambda(\alpha) = m$ $(m \in Z_0)$. Тогда*

1) *при $0 \le i < m-1$ выполняется $f_S(i) = \sum\limits_{j=0}^{k_i} f_G(\alpha_i + j)$, где $k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i$;*

2) *$f_S(m-1) = \sum\limits_{j=0}^{k_{m-1}} f_G(\alpha_{m-1} + j)$, где $k_{m-1} = n - 1 - \alpha_{m-1}$;*

3) *при $i \ge m$ выполняется $f_S(i) = 0$.*

Доказательство. G – ограниченная группа, следовательно, G есть прямая сумма циклических групп: $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$, где G_i — прямая сумма циклических групп порядка p^i для всех $1 \le i \le n$. Так как α является U-последовательностью для группы G, то $\alpha_i < n$ для всех $i < m$, откуда $\alpha_{m-1} < n$. Положим $G_{n+1} = G_{n+2} = \dots = 0$. Аналогично доказательству теоремы 2.2 получаем, что инварианты Ульма–Капланского группы S удовлетворяют равенствам 1), 2), 3) теоремы 2.2. Но так как $f_G(i) = 0$ для всех $i \ge n$, $f_S(m-1) = \sum\limits_{j=0}^{n-1-\alpha_{m-1}} f_G(\alpha_{m-1} + j)$, т. е. инварианты Ульма–Капланского группы S удовлетворяют равенствам 1), 2), 3) данной теоремы. $\square$

Теорема 2.4. *Пусть $S = G(\alpha)$ — неограниченная вполне характеристическая подгруппа редуцированной сепарабельной p-группы G, где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ — U-последовательность для группы G. Тогда для всех $i \in Z_0$*

$$f_S(i) = \sum_{j=0}^{k_i} f_G(\alpha_i + j), \quad \text{где} \;\; k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i. \tag{2.4}$$

Доказательство. Так как группа $G(\alpha)$ неограниченная, то $\lambda(\alpha) = \infty$.

Обозначим через B некоторую базисную подгруппу группы G. Тогда для любого $i \in Z_0$ ([4], с. 186)

$$f_G(i) = f_B(i). \tag{2.5}$$

Легко показать, что α является U-последовательностью для группы B. Подгруппа $B(\alpha)$ группы B является базисной подгруппой группы $G(\alpha)$ [6]. Следовательно, для любого $i \in Z_0$

$$f_{G(\alpha)}(i) = f_{B(\alpha)}(i). \tag{2.6}$$

Группа B — прямая сумма циклических групп, следовательно, по теореме 2.1

$$f_{B(\alpha)}(i) = \sum_{j=0}^{k_i} f_B(\alpha_i + j), \quad \text{где} \;\; k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i. \tag{2.7}$$

Учитывая (2.5) и (2.6), из (2.7) получаем, что для всех $i \in Z_0$ имеет место равенство (2.4). $\square$

3. Критерий задания почти изоморфизма сепарабельных p-групп парой последовательностей

В этом параграфе дается полный ответ на вопрос, когда пара последовательностей из W_1 задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных p-групп (теорема 3.5). Поскольку вид последовательностей α и β существенно влияет на решение рассматриваемой задачи, конкретные случаи рассматриваются отдельно (теоремы 3.1–3.4).

В силу леммы 1.1 далее рассматриваются только такие пары последовательностей (α, β), где $\alpha, \beta \in W_1$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha, \beta \in W_1$, $\alpha_0 + \beta_0 \neq 0$.

1) *Пара* (α, β) *задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных* p*-групп тогда и только тогда, когда* $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$.
2) *Если* G *и* G' *— такие редуцированные сепарабельные* p*-группы, что* α *и* β *являются* U*-последовательностями для групп* G' *и* G *соответственно,* $G \cong G'(\alpha)$, $G' \cong G(\beta)$, *то группы* G *и* G' *неограниченные.*
3) *Если* $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$, *то существуют изоморфные* p*-группы* G *и* G' *с бесконечными инвариантами Ульма–Капланского, разложимые в прямую сумму циклических групп такие, что* α *и* β *являются* U*-последовательностями для групп* G' *и* G *соответственно,* $G \cong G'(\alpha)$ *и* $G' \cong G(\beta)$.

Доказательство. 1) Будем считать, что $\alpha_0 \neq 0$. Допустим, что длина одной из последовательностей не равна бесконечности, и существуют такие редуцированные сепарабельные p-группы G и G', что α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно, $G \cong G'(\alpha)$ и $G' \cong G(\beta)$.

Если $\lambda(\alpha) \neq \infty$, то группа $G'(\alpha)$ ограниченная, откуда G, $G(\beta)$ и G' также ограниченные. Если $\lambda(\beta) \neq \infty$, то группа $G(\beta)$ ограниченная, откуда G', $G'(\alpha)$ и G также ограниченные.

Итак, группы G и G' ограниченные. Обозначим через s и t соответственно максимумы экспонент групп G и G'. Из изоморфизма $G \cong G'(\alpha)$ следует, что $s \leq t$, а из $G' \cong G(\beta)$ следует, что $t \leq s$, т. е. $s = t$. Но тогда существует $g' \in G'(\alpha)$, для которого $e(g') = t$. Так как $h^*(g') \geq \alpha_0 \geq 1$, то существует такой элемент $x \in G'$, что $px = g'$, откуда $e(x) > t$. А это противоречит тому, что t — максимум экспонент группы G'.

Значит, пара (α, β) не может задавать почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам, если длина хотя бы одной последовательности конечна. Обратное утверждение будет следовать из 3).

2) Из определения U-последовательности следует, что если $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$, то группы G и G' неограниченные.

3) Пусть γ – некоторый бесконечный кардинал. Обозначим через G и G' такие прямые суммы циклических p-групп, что $f_G(i) = f_{G'}(i) = \gamma$ для всех $i \in Z_0$. Очевидно, $G \cong G'$ и α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно. Рассмотрим $S_1 = G'(\alpha)$ и $S_2 = G(\beta)$. По теореме 2.4 определим инварианты Ульма–Капланского групп S_1 и S_2:

$$f_{S_1}(i) = f_{G'}(\alpha_i) + \cdots + f_{G'}(\alpha_{i+1} - 1) = \gamma \quad \text{для всех } i \in Z_0,$$
$$f_{S_2}(i) = f_G(\beta_i) + \ldots + f_G(\beta_{i+1} - 1) = \gamma \quad \text{для всех } i \in Z_0.$$

Из этих равенств очевидно, что $G \cong G'(\alpha)$, $G' \cong G(\beta)$. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть* $\alpha, \beta \in W_1$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$.

1) *Пара* (α, β) *задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных* p*-групп.*
2) *Если* G *и* G' *— такие редуцированные сепарабельные* p*-группы, что* α *и* β *являются* U*-последовательностями для групп* G' *и* G *соответственно,* $G \cong G'(\alpha)$, $G' \cong G(\beta)$, *то группы* G *и* G' *неограниченные.*
3) *Существуют изоморфные* p*-группы* G *и* G' *с бесконечными инвариантами Ульма–Капланского, разложимые в прямую сумму циклических групп такие, что* α *и* β *являются* U*-последовательностями для групп* G' *и* G *соответственно,* $G \cong G'(\alpha)$ *и* $G' \cong G(\beta)$.

Доказательство. Утверждение 1) следует из 3).

2) Из определения U-последовательности следует, что если $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$, то группы G и G' неограниченные.

3) Доказательство аналогично доказательству 3) теоремы 3.1. $\square$

Теорема 3.3. *Пусть $\alpha, \beta \in W_1$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ и выполняется одно из трех условий:*

1) *$\lambda(\alpha) = \infty$, $\lambda(\beta) = n \in Z_0$;*
2) *$\lambda(\alpha) = n \in Z_0$, $\lambda(\beta) = m \in Z_0$, $m \neq n$;*
3) *$\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = n \in Z_0$, и хотя бы одна последовательность имеет более чем один скачок.*

Тогда пара (α, β) не может задавать почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных p-групп.

Доказательство. Допустим, что существуют такие редуцированные сепарабельные p-группы G и G', что α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно, $G \cong G'(\alpha)$ и $G' \cong G(\beta)$.

1) Пусть $\lambda(\alpha) = \infty$, $\lambda(\beta) = n \in Z_0$. Тогда $G(\beta)$ — ограниченная группа, следовательно, G' также ограниченная, а это противоречит тому, что α является U-последовательностью для группы G'.
2) Пусть $\lambda(\alpha) = n \in Z_0$, $\lambda(\beta) = m \in Z_0$. Будем считать, что $m > n$. Из $\lambda(\alpha) = n$ следует, что $p^n(G'(\alpha)) = 0$, откуда $\lambda(G'(\alpha)) \leq n$. Тогда $\lambda(G) \leq n$ и по определению U-последовательности $\beta_{m-1} < n$. Так как $m - 1 \leq \beta_{m-1}$, то $m - 1 < n$. Получаем противоречие с тем, что $m > n$.
3) Пусть $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = n \in Z_0$. Аналогично доказательству п. 2) получаем $\lambda(G) \leq n$ и $\lambda(G') \leq n$. Тогда по определению U-последовательности $\alpha_i < n$ и $\beta_i < n$ для всех $0 \leq i \leq n-1$, т. е. $\alpha = \beta = (0, 1, \ldots, n-1, \infty, \ldots)$. Получаем противоречие с тем, что хотя бы одна последовательность имеет более чем один скачок.

Таким образом, во всех трех случаях пара (α, β) не может задавать почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных p-групп. $\square$

Замечание. Из определения длины последовательности вытекает, что всякая последовательность конечной длины имеет хотя бы один скачок.

Теорема 3.4. *Пусть $\alpha, \beta \in W_1$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = n \in Z_0$ и каждая последовательность имеет только один скачок.*

1) *Пара (α, β) задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных p-групп.*
2) *Если G и G' — такие редуцированные сепарабельные p-группы, что α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно, $G \cong G'(\alpha)$, $G' \cong G(\beta)$, то группы G и G' ограниченные ($\lambda(G) = \lambda(G') = n$) и $G \cong G'$.*

Доказательство. 1) Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — произвольные кардиналы, отличные от нуля. Обозначим через G и G' такие прямые суммы циклических p-групп, что $f_G(i) = f_{G'}(i) = \gamma_i$ для всех $i \leq n$. Очевидно, α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно, $G \cong G'$, $G' \cong G'(\alpha)$, $G \cong G(\beta)$, откуда $G \cong G'(\alpha)$, $G' \cong G(\beta)$.

2) Пусть G и G' — такие редуцированные сепарабельные p-группы, что α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно, $G \cong G'(\alpha)$, $G' \cong G(\beta)$. Из $\lambda(\alpha) = n$ следует, что $p^n(G'(\alpha)) = 0$. Поэтому $\lambda(G'(\alpha)) \leq n$, и т. к. $G \cong G'(\alpha)$, то $\lambda(G) \leq n$. Аналогично получаем $\lambda(G') \leq n$. По определению U-последовательности $\beta_{n-1} = n - 1 < \lambda(G)$ и $\alpha_{n-1} = n - 1 < \lambda(G')$, откуда $\lambda(G) = \lambda(G') = n$. Очевидно, что G совпадает с $G(\beta)$ и G' совпадает с $G'(\alpha)$, следовательно, $G \cong G'$. $\square$

Из доказанных теорем вытекает критерий задания почти изоморфизма по вполне характеристическим подгруппам сепарабельных p-групп парой последовательностей.

Теорема 3.5. *Пара последовательностей (α, β), где $\alpha, \beta \in W_1$, задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных p-групп тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий*:

1) $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$;
2) $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = n \in Z_0$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ *и каждая последовательность имеет только один скачок.*

Заметим, что из теоремы 3.4 следует, что для пары последовательностей, удовлетворяющих условию 2) теоремы 3.5, аналог теоремы Кантора–Шредера–Бернштейна имеет место. Таким образом, остается исследовать случай, когда обе последовательности имеют бесконечную длину ($\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$).

4. Существование изоморфных и неизоморфных абелевых p-групп, почти изоморфных по вполне характеристическим подгруппам

В предыдущем параграфе было показано, что если пара последовательностей (α, β) задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных p-групп, то обязательно существуют изоморфные p-группы G и G' из данного класса такие, что α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно, $G \cong G'(\alpha)$ и $G' \cong G(\beta)$. Но означает ли это, что аналог теоремы Кантора–Шредера–Бернштейна в рассматриваемом классе групп всегда имеет место? Следующая теорема показывает, что это не так.

Теорема 4.1. *Пусть $\alpha, \beta \in W_1$, $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$ и выполняется одно из трех условий*:

1) $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$;
2) $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 = 0$, *в β имеется хотя бы один скачок*;
3) $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, *в каждой последовательности имеется хотя бы один скачок.*

Тогда существуют неизоморфные неограниченные p-группы G и G' с бесконечными инвариантами Ульма–Капланского, разложимые в прямую сумму циклических групп такие, что α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно, $G \cong G'(\alpha)$ и $G' \cong G(\beta)$.

Доказательство. Заметим, что если искомые группы G и G' существуют, то согласно теореме 2.4

$$f_{G'(\alpha)}(i) = f_{G'}(\alpha_i) + \cdots + f_{G'}(\alpha_{i+1} - 1), \quad \text{где } i \in Z_0, \tag{4.1}$$
$$f_{G(\beta)}(i) = f_G(\beta_i) + \cdots + f_G(\beta_{i+1} - 1), \quad \text{где } i \in Z_0. \tag{4.2}$$

И так как $G \cong G'(\alpha)$ и $G' \cong G(\beta)$, имеем

$$f_G(i) = f_{G'}(\alpha_i) + \cdots + f_{G'}(\alpha_{i+1} - 1), \quad \text{где } i \in Z_0, \tag{4.3}$$
$$f_{G'}(i) = f_G(\beta_i) + \cdots + f_G(\beta_{i+1} - 1), \quad \text{где } i \in Z_0. \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.3), получаем, что инварианты Ульма–Капланского группы G связаны следующим образом:

$$f_G(i) = f_G(\beta_{\alpha_i}) + \cdots + f_G(\beta_{\alpha_{i+1}} - 1), \quad \text{где } i \in Z_0. \tag{4.5}$$

Пусть γ_1 и γ_2 — бесконечные кардиналы, $\gamma_1 > \gamma_2$. Обозначим через G и G' p-группы, разложимые в прямую сумму циклических групп со следующими инвариантами Ульма–Капланского.

1) Пусть $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$. Определим последовательность целых неотрицательных чисел $r_0, r_1, r_2, \ldots$ индуктивно следующим образом: $r_0 = 0$, $r_1 = \beta_{\alpha_{r_0}}$, и если r_n определено, то $r_{n+1} = \beta_{\alpha_{r_n}}$.

Положим для всех $i \in Z_0$ $f_G(r_i) = \gamma_1$. Остальные инварианты Ульма–Капланского группы G положим равными γ_2. Инварианты Ульма–Капланского группы G' находим из (4.4). Легко видеть, что инварианты Ульма–Капланского группы G удовлетворяют равенствам (4.5), следовательно, равенства (4.3) также имеют место.

Так как все инварианты Ульма–Капланского групп G и G' отличны от нуля, то α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно. По теореме 2.4 инварианты Ульма–Капланского $G'(\alpha)$ и $G(\beta)$ удовлетворяют равенствам (4.1) и (4.2) соответственно. Тогда из равенств (4.1)–(4.4) следует, что $G \cong G'(\alpha)$ и $G' \cong G(\beta)$.

Покажем, что группы G и G' не изоморфны. Из (4.4) имеем $f_{G'}(0) = f_G(\beta_0) + \dots + f_G(\beta_1 - 1)$. Так как последовательности α и β начинаются с положительного числа, то $0 < \beta_0 < \beta_{\alpha_0}$ и $0 < \beta_1 - 1 < \beta_{\alpha_0}$. Следовательно, $f_G(i) = \gamma_2$ для всех $\beta_0 \le i \le \beta_1 - 1$, откуда $f_{G'}(0) = \gamma_2$. Но $f_G(0) = \gamma_1$, т. е. группы G и G' не изоморфны.

2) Пусть $\alpha_0 \ne 0$, $\beta_0 = 0$, в β имеется хотя бы один скачок. Обозначим через k наименьшее число такое, что в β_k имеется скачок. Определим последовательность целых неотрицательных чисел $r_0, r_1, r_2, \dots$ индуктивно следующим образом: $r_0 = k$, $r_1 = \beta_{\alpha_{r_0}}$, и если r_n определено, то $r_{n+1} = \beta_{\alpha_{r_n}}$.

Положим для всех $i \in Z_0$ $f_G(r_i) = \gamma_1$. Определим последовательно $f_G(k-1)$, затем $f_G(k-2)$, $\dots$, $f_G(0)$ согласно следующему правилу: положим $f_G(j) = \gamma_1$, если хотя бы один из инвариантов Ульма–Капланского группы G, стоящих в правой части j-го равенства из (4.5), уже определен; в противном случае полагаем $f_G(j) = \gamma_2$. Остальные инварианты Ульма–Капланского группы G положим равными γ_2. Инварианты Ульма–Капланского группы G' находим из (4.4). Легко видеть, что инварианты Ульма–Капланского группы G удовлетворяют равенствам (4.5), следовательно, равенства (4.3) также имеют место.

Так как все инварианты Ульма–Капланского групп G и G' отличны от нуля, то α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно. По теореме 2.4 инварианты Ульма–Капланского $G'(\alpha)$ и $G(\beta)$ удовлетворяют равенствам (4.1) и (4.2) соответственно. Тогда из равенств (4.1)–(4.4) следует, что $G \cong G'(\alpha)$ и $G' \cong G(\beta)$.

Покажем, что группы G и G' не изоморфны. Из (4.4) имеем $f_{G'}(k) = f_G(\beta_k) + \dots + f_G(\beta_{k+1} - 1)$. Так как $\alpha_k > k$, то $\beta_k < \beta_{\alpha_k}$ и $\beta_{k+1} - 1 < \beta_{\alpha_k}$. Так как в β_k имеется скачок, то $k < \beta_k$ и $k = k + 1 - 1 < \beta_{k+1} - 1$. Следовательно, $f_G(i) = \gamma_2$ для всех i: $\beta_k \le i \le \beta_{k+1} - 1$, откуда $f_{G'}(k) = \gamma_2$. Но $f_G(k) = \gamma_1$, т. е. группы G и G' не изоморфны.

3) Пусть $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, в каждой последовательности имеется хотя бы один скачок. Обозначим через k_1 наименьшее число такое, что в α_{k_1} имеется скачок, через k_2 — наименьшее число такое, что в β_{k_2} имеется скачок, и пусть $k = \max\{k_1, k_2\}$. Дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству п. 2). $\square$

Покажем теперь, что если пара последовательностей, задающая почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам, не удовлетворяет условиям теоремы 4.1, то из этого почти изоморфизма следует изоморфизм групп.

Теорема 4.2. *Пусть $\alpha, \beta \in W_1$, $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = \infty$, $\alpha_0 = 0$, и в α нет скачков. Если G и G' — такие редуцированные сепарабельные p-группы, что α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно, $G \cong G'(\alpha)$, $G' \cong G(\beta)$, то $G \cong G'$.*

Доказательство. Пусть G и G' – такие редуцированные сепарабельные p-группы, что α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно, $G \cong G'(\alpha)$, $G' \cong G(\beta)$. Так как последовательность α начинается с нуля и в ней нет скачков, то $G'(\alpha)$ совпадает с G'. Но $G'(\alpha) \cong G$, следовательно, $G \cong G'$. $\square$

Теоремы этого и предыдущего параграфов позволяют сделать следующий вывод.

Теорема 4.3. *Пусть пара последовательностей (α, β), где $\alpha, \beta \in W_1$, задает почти изоморфизм по вполне характеристическим подгруппам в классе редуцированных сепарабельных p-групп.*

1) *Если одна из последовательностей начинается с нуля и имеет конечную длину, то группы G и G' ограниченные, и $G \cong G'$.*
2) *Если одна из последовательностей начинается с нуля и в ней нет скачков, то группы G и G' неограниченные, и $G \cong G'$.*
3) *Если же каждая из последовательностей α, β не удовлетворяет условиям* 1) *и* 2), *то* а) *группы G и G' неограниченные*; б) *существуют как изоморфные, так и неизоморфные p-группы G и G' с бесконечными инвариантами Ульма–Капланского, разложимые в прямую сумму циклических групп такие, что $G \cong G'(\alpha)$ и $G' \cong G(\beta)$.*

Из этой теоремы вытекают следствия.

Следствие 4.1. Две ограниченные p-группы, почти изоморфные по вполне характеристическим подгруппам, изоморфны.

Доказательство. Пусть G и G' — ограниченные p-группы, $G \cong S'$, $G' \cong S$, где S и S' — вполне характеристические подгруппы групп G и G' соответственно. Тогда существуют такие последовательности $\alpha, \beta \in W_1$, что α и β являются U-последовательностями для групп G' и G соответственно, $S' \cong G'(\alpha)$ и $S \cong G(\beta)$. Группы G и G' ограниченные, следовательно, по теореме 3.5 $\lambda(\alpha) = \lambda(\beta) = n \in Z_0$, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$. Тогда по теореме 4.3 (п. 1)) $G \cong G'$. $\square$

Следствие 4.2 (к п. 2) теоремы 4.3). Пусть G и G' — неограниченные редуцированные сепарабельные p-группы, почти изоморфные по вполне характеристическим подгруппам, т. е. $G \cong G'(\alpha)$, $G' \cong G(\beta)$, где α и β — U-последовательности для групп G' и G соответственно. Если хотя бы одна из последовательностей начинается с нуля и не имеет скачков, то $G \cong G'$.

Замечание. В [7] выделены некоторые классы абелевых p-групп, в которых из почти изоморфизма по вполне характеристическим (или широким) подгруппам следует изоморфизм. В частности, установлено, что это выполняется в классах ограниченных групп и периодически полных групп с бесконечными и равными инвариантами Ульма–Капланского.

В заключение выражаю огромную признательность и благодарность своему научному руководителю Гриншпону Самуилу Яковлевичу за постоянное внимание и помощь в работе.

Литература

1. Jonson B. *On direct decomposition of torsion free Abelian groups* // Math. scand. – 1959. – № 2. – P. 361–371.
2. Гриншпон С.Я. *f.i.-корректность абелевых групп без кручения* // Абел. группы и модули. – Томск, 1982. – № 8. – С. 65–79.
3. Kaplansky I. *Infinite Abelian groups.* – Michigan: Ann. Arbor, Univ. Michigan Press, 1954. – 91 p.
4. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* Т. 1. – М.: Мир, 1974. – 335 с.
5. Moor D.J., Hewett E.J. *On fully invariant subgroups of Abelian p-groups* // Comment. Math. Univ. St. Pauli. – 1972. – № 2. – P. 97–106.
6. Pierce R.S. *Homotomorphisms of primary Abelian groups* // Topics in Abelian groups. – Chicago, 1963. – P. 213–310.
7. Гриншпон С.Я. *О некоторых классах примарных абелевых групп, почти изоморфных по вполне характеристическим подгруппам* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 2. – С. 23–30.

Томский государственный
университет

Поступили
первый вариант 05.05.1998
окончательный вариант 05.01.2001