ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 5 (468)

УДК 517.95

В.Н. ПАВЛЕНКО, В.В. ВИНОКУР

РЕЗОНАНСНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Введение

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с границей Γ класса $C_{2\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, ([1], с. 23), $Lu(x) \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x)$ — равномерно эллиптический дифференциальный оператор на $\overline{\Omega}$ с коэффициентами $a_{ij} \in C_{1\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $c \in C_{0\alpha}(\overline{\Omega})$. Рассматривается краевая задача вида

$$Lu(x) + g(x, u(x)) = p(x), \quad x \in \Omega, \tag{0.1}$$

$$Bu|_\Gamma = 0, \tag{0.2}$$

где нелинейность $g(x,u)$ удовлетворяет условию $(*)$:

функция $g : \Omega \times R \to R$ борелева $\pmod 0$ ([2], с. 157), для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x,\cdot)$ имеет на R разрывы только первого рода и $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$, $g_-(x,u) = \liminf\limits_{s\to u} g(x,s)$, $g_+(x,u) = \limsup\limits_{s\to u} g(x,s)$;

$p(x)$ — суммируемая на Ω функция; (0.2) — одно из основных краевых условий

$$u|_\Gamma = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_L}\right|_\Gamma \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\cos(n,x_j)|_\Gamma = 0,$$

$\cos(n,x_j)$ — направляющие косинусы внешней нормали n к границе Γ;

$$\frac{\partial u}{\partial n_L}(x) + \sigma(x)u(x)|_\Gamma = 0, \tag{0.3}$$

функция $\sigma \in C_{1\alpha}(\Gamma)$ ([1], с. 23) неотрицательная на Γ и не равна тождественно нулю.

Сильным решением задачи (0.1)–(0.2) называется функция $u \in W_q^2(\Omega)$, $q \ge 1$, которая удовлетворяет уравнению (0.1) для почти всех $x \in \Omega$ и для которой след $Bu(x)$ на границу Γ области Ω равен нулю.

Исследуется вопрос о существовании сильных решений в так называемом резонансном случае, когда задача

$$Lu(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{0.4}$$

$$Bu|_\Gamma = 0 \tag{0.5}$$

имеет ненулевое решение. При этом предполагается, что для почти всех $x \in \Omega$

$$|g(x,u)| \le a(x) \quad \forall u \in R, \tag{0.6}$$

$a \in L_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$, а функция $p(x) \in L_q(\Omega)$.

Систематическое изучение резонансных краевых задач началось с работы [3], где предполагалось, что нелинейность $g(x,u) \equiv g(u)$ непрерывна на R , существуют $\lim\limits_{u\to\pm\infty} g(u) = g_\pm$ и $g_- < g(u) < g_+$ для любых $u \in R$, а размерность подпространства $N(L)$ решений задачи (0.4)–(0.5) равна единице. При таких допущениях было доказано, что решение задачи (0.1)–(0.2) существует тогда и только тогда, когда p удовлетворяет неравенству

$$g_+ \int_{\psi<0} \psi(x)dx + g_- \int_{\psi>0} \psi(x)dx < \int_\Omega p(x)\psi(x)dx < g_+ \int_{\psi>0} \psi(x)dx + g_- \int_{\psi<0} \psi(x)dx,$$

где ψ — базисная функция $N(L)$.

Наиболее общие результаты о разрешимости задачи (0.1)–(0.2) в случае, когда функция $g(x,u)$ каратеодориева, были установлены в [4], где авторы использовали классическую схему Ляпунова–Шмидта, и в [5], где к исследованию данной проблемы применен вариационный метод. Подробную библиографию можно найти в обзоре [6]. Для резонансных краевых задач с разрывными нелинейностями первые значительные результаты были получены методом верхних и нижних решений в [7], [8] для $g(x,u) \equiv g(u)$ в предположении, что на любом отрезке $g(u)$ имеет ограниченную вариацию. В этих работах теоремы о существовании сильных решений задачи (0.1)–(0.2) допускают у нелинейности $g(u)$ только такие точки разрыва u, для которых $g(u-) > g(u+)$. В [9] K.-C. Chang, базируясь на понятии обощенного градиента Кларка для локально липшицевых функций и обобщив для них условие Palais–Smale ((P. S.)) и деформационную лемму, развил вариационный подход применительно к краевым задачам для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями. В частности, он доказал теорему о существовании $u \in W_2^{2m}(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, удовлетворяющей включению

$$-\tau u(x) \in [g_-(x,u(x)), g_+(x,u(x))] \tag{0.7}$$

для почти всех $x \in \Omega$, где τ — формально самосопряженный, равномерно эллиптический, линейный дифференциальный оператор порядка $2m$ с достаточно гладкими коэффициентами, функция $g(x,u)$ суперпозиционно измеримая и ограниченная на $\Omega \times R$, и для нее выполнено условие

$$\lim_{u\in N(\tau),\ \|u\|\to+\infty} \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x,s)ds = +\infty \text{ или } -\infty,$$

$N(\tau)$ — подпространство решений уравнения $\tau u(x) = 0$, удовлетворяющих однородным условиям Дирихле. В [10] K.-C. Chang для дифференциальных уравнений второго порядка с фиксированной линейной частью τ выделил класс разрывных нелинейностей $g(x,u)$, названных (τ,g)-оптимальными, для которых любое решение $u(x)$ включения (0.7) является сильным решением уравнения $-\tau u(x) = g(x,u(x))$, $x \in \Omega$. Суть его ограничений в том, что все разрывы $g(x,u)$ по u лежат на не более чем счетном множестве достаточно гладких поверхностей и, если $u = \varphi(x)$ — уравнение одной из таких поверхностей, то либо $\tau\varphi(x) + g(x,\varphi(x)) = 0$, либо $-\tau\varphi(x) \notin [g_-(x,\varphi(x)), g_+(x,\varphi(x))]$.

В данной работе для абстрактных уравнений с разрывными не коэрцитивными операторами получены новые вариационные принципы существования решений, которые являются точками непрерывности оператора уравнения. Общие результаты применяются затем к изучению задачи (0.1)–(0.2) в резонансном случае. Доказываются предложения типа Ланденсмана-Лазера о существовании сильных и полуправильных решений (сильное решение задачи (0.1)–(0.2) называется полуправильным, если для почти всех $x \in \Omega$ значение $u(x)$ является точкой непрерывности $g(x,\cdot)$). Полуправильные решения для интегрального уравнения с монотонной по фазовой переменной u нелинейностью были введены в [11]. Вопрос о существовании полуправильных решений уравнения (0.1), удовлетворяющих однородному граничному условию Дирихле, изучался в [12], где предполагалось, что нелинейность $g(x,u)$ ограничена на $\Omega \times R$ и по u удовлетворяет одностороннему условию Липшица, которое влечет неравенство $g(x,u-) \geq g(x,u+)$ для любого $u \in R$ и почти всех $x \in \Omega$. Отметим, что в [12] авторы называют полуправильные решения правильными.

По сравнению с работами других авторов по проблеме существования сильных решений задачи (0.1)–(0.2) в резонансном случае в данной статье ослаблены ограничения на множество точек разрыва нелинейности $g(x,u)$ по u. Так, в отличие от результатов [9], [10] в теореме 1.3 нет каких-либо дополнительных условий на разрывы $g(x,u)$ по u, для которых $g(x,u-) > g(x,u+)$ ("падающие разрывы"), а в отличие от [12] допускаются разрывы, "прыгающие вверх" ($g(x,u-) < g(x,u+)$).

Структура статьи следующая. В первом пункте приводятся формулировки основных результатов работы. Во втором доказываются общие вариационные принципы. В третьем рассматриваются приложения общих теорем к краевым задачам для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями (устанавливаются предложения типа Ландесмана-Лазера [3]).

1. Формулировка основных результатов

Пусть X — вещественное гильбертово пространство, компактно вложенное в вещественное рефлексивное банахово пространство Y. Через P обозначим оператор вложения X в Y, P^* — сопряженный с P оператор, Λ – линейный изоморфизм, отождествляющий X с сопряженным пространством X^*. Скалярное произведение в X обозначается $(\cdot,\cdot)$, а значение функционала $y \in Y^*$ на элементе $x \in Y$ — $\langle y, x\rangle$. Рассматриваются уравнения вида

$$Qx \equiv \Lambda Ax + P^*TPx - \Lambda p = 0, \tag{1.1}$$

где A — линейный ограниченный самосопряженный оператор в X с ненулевым ядром $N(A)$, отображение $T : Y \to Y^*$ квазипотенциальное ([13], с. 253) и ограниченное на Y (возможно, разрывное), $p \in X$. Напомним, что оператор $T : Y \to Y^*$ называется квазипотенциальным, если существует функционал $f : Y \to R$, для которого

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \langle T(x+th), h\rangle dt \quad \forall x, h, \in Y.$$

При этом f называют квазипотенциалом оператора T.

Определение 1.1. Элемент $x \in X$ называется регулярным [14] (сильно регулярным) для оператора $Q : X \to X^*$, если существует $h \in X$ такой, что

$$\limsup_{t\to+0}\langle Q(x+th), h\rangle < 0 \ \ (\limsup_{v\to 0}\langle Q(x+v), h\rangle < 0).$$

Определение 1.2 ([9]). Число $\alpha \in R$ будем называть критическим значением локально липшицевой функции $\varphi : X \to R$, если найдется $x_0 \in X$ такое, что $\varphi(x_0) = \alpha$ и $0 \in \partial\varphi(x_0)$, $\partial\varphi(x_0)$ – обобщенный градиент Кларка функции φ в точке x_0 ([15], с. 34), а саму x_0 — критической точкой функционала φ.

В первом вариационном принципе (теорема 1.1) элемент $x_0 \in X$ называется точкой разрыва оператора $Q : X \to X^*$, если в точке x_0 нарушено условие радиальной непрерывности для оператора Q ([16], с. 79):

$$\lim_{t\to 0}\langle Q(x_0+th), h\rangle = \langle Qx_0, h\rangle \ \ \forall h \in X. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. *Пусть*

1) *X — вещественное гильбертово пространство, компактно вложенное в рефлексивное банахово пространство Y, и P — оператор вложения X в Y;*
2) *оператор $A : X \to X$ линейный, ограниченный и самосопряженный, нуль является изолированной точкой его спектра, причем $(Ax,x) \geq 0$ $\forall x \in X$;*

3) *отображение* $T : Y \to Y^*$ *квазипотенциальное и ограниченное на* Y, *т. е. существует константа* $M > 0$, *для которой* $\|Tx\| \le M \ \forall x \in Y$;
4) *элемент* $p \in X$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{x \in N(A),\ \|x\| \to +\infty} (f(x) - (p, x)) = +\infty, \tag{1.3}$$

где f *— квазипотенциал оператора* T.

Тогда существует $x_0 \in X$, *для которого* $\varphi(x_0) = \inf\limits_X \varphi(x)$, $\varphi(x) = (Ax, x)/2 + f(x) - (p, x)$, *причем любое такое* x_0 *удовлетворяет включению*

$$-\Lambda A x_0 + \Lambda p \in P^*(ST)(Px_0), \tag{1.4}$$

где ST *— секвенциальное замыкание оператора* T [17]. *Если к тому же все точки разрыва оператора* (1.1) *регулярные для* Q, *то любое такое* x_0 *удовлетворяет уравнению* (1.1) *и является точкой радиальной непрерывности оператора* P^*TP.

Замечание 1.1. Условие 3) теоремы 1.1 влечет липшицевость на Y квазипотенциала f оператора T. Действительно, для произвольных $u, v \in Y$ имеем

$$|f(u) - f(v)| = \left| \int_0^1 \langle T(v + t(u - v)), u - v\rangle dt \right| \le \int_0^1 |\langle T(v + t(u - v)), u - v\rangle| dt \le M\|u - v\|_Y,$$

где M — константа из условия 3) теоремы 1.1.

Укажем на простое достаточное условие регулярности точек разрыва оператора (1.1).

Предложение 1.1. *Если* x *— точка разрыва оператора* P^*TP *и существует* $\lim\limits_{t \to +0} \langle T(x + th), h\rangle \le \langle Tx, h\rangle \ \forall h \in X$, *то* x *— регулярная точка для оператора* (1.1).

Действительно, в этом случае существует $\lim\limits_{t \to +0} \langle Q(x + th), h\rangle \le \langle Qx, h\rangle \ \forall h \in X$ и, если предположить, что в точке x нарушено условие (1.2) радиальной непрерывности, то найдется $h \in X$, для которого $\lim\limits_{t \to +0} \langle Q(x + th), h\rangle < \langle Qx, h\rangle$. Поэтому при $\langle Qx, h\rangle \le 0$ регулярность x для Q доказана. В противном случае $\langle Qx, h\rangle > 0$. Тогда $\lim\limits_{t \to +0} \langle Q(x + t(-h)), (-h)\rangle \le \langle Qx, -h\rangle = -\langle Qx, h\rangle < 0$, и значит, x — регулярная для Q точка. $\square$

Во втором вариационном принципе (теорема 1.2) точками разрыва оператора $Q : X \to X^*$ будем называть те $x \in X$, в которых нарушено условие деминепрерывности для оператора Q ([13], с. 23). Напомним, что если нуль является изолированной точкой спектра линейного ограниченного и самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве X, то X распадается на сумму ортогональных и инвариантных по отношению к A подпространств:

$$N(A), \quad X_+ = \{x \in X \mid (Ax, x) > 0\} \cup \{0\}, \quad X_- = \{x \in X \mid (Ax, x) < 0\} \cup \{0\}.$$

Подпространства X_-, X_+ называются соответственно отрицательным и положительным подпространствами оператора A.

Теорема 1.2. *Предположим, что*

1) *выполнены условия* 1), 3) *теоремы* 1.1 *и* X *плотно в* Y;
2) *оператор* $A : X \to X$ *линейный, ограниченный и самосопряженный, нуль является изолированной точкой его спектра, причем ядро* $N(A)$ *и отрицательное подпространство* X_- *оператора* A *конечномерны*;
3) *элемент* $p \in X$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{x \in N(A),\ \|x\| \to +\infty} (f(x) - (p, x)) = +\infty \ \textit{или} \ -\infty, \tag{1.5}$$

где f *— квазипотенциал оператора* T.

Тогда множество критических точек функционала $\varphi(x) = (Ax, x)/2 + f(x) - (p, x)$ не пусто и каждая точка x из этого множества удовлетворяет включению (1.4).

Если к тому же все точки разрыва оператора (1.1) *сильно регулярные, то любая критическая точка функционала φ удовлетворяет уравнению* (1.1) *и является точкой деминепрерывности оператора Q.*

Применение сформулированных выше вариационных принципов к задаче (0.1)–(0.2) дает следующие результаты.

Определение 1.3. Говорят, что для уравнения (0.1) выполнено A-условие — Ay [18] (сильное Ay), если найдется не более чем счетное семейство поверхностей $\{S_i,\ i \in I\}$, $S_i = \{(x, u) \in R^{n+1} | u = \varphi_i(x),\ x \in \Omega\}$, $\varphi_i \in W^2_{\mathrm{loc},1}(\Omega)$ таких, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g(x, u-) < g(x, u+)$ $(g(x, u-) \neq g(x, u+))$ влечет существование $i \in I$, для которого $u = \varphi_i(x)$ и

$$(L\varphi_i(x) + g(x, \varphi_i(x)+) - p(x))(L\varphi_i(x) + g(x, \varphi_i(x)-) - p(x)) > 0. \tag{1.6}$$

Определение 1.4. Говорят,что для уравнения (0.1) выполнено $A1$-условие — $A1y$ (сильное $A1y$), если удовлетворяется определение 1.3, в котором верно либо (1.6), либо $L\varphi_i(x) + g(x, \varphi_i(x)) = p(x)$.

Сопоставим краевой задаче (0.1)–(0.2) при фиксированном $p \in L_q(\Omega)$, $q > 2n/(n+2)$, функционал $J_p : X \to R$, где $X = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ в случае задачи Дирихле и $X = W^1_2(\Omega)$ в случае второй и третьей краевых задач, следующим образом: для задачи Дирихле и второй краевой задачи

$$J_p(u) = J_0(u) + G_p(u),$$
$$J_0(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j}\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x) u^2(x) dx,$$
$$G_p(u) = \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds - \int_\Omega p(x) u(x) dx, \tag{1.7}$$

в случае третьего краевого условия (0.3)

$$J_p(u) = J_0(u) + \frac{1}{2}\int_\Gamma \sigma(s) u^2(s) ds + G_p(u). \tag{1.8}$$

В формулировках теорем 1.3 и 1.4 будем пользоваться введенными обозначениями без дополнительных пояснений.

Теорема 1.3. *Пусть*

1) *краевая задача* (0.4)–(0.5) *имеет ненулевое решение и $N(L)$ — подпространство всех ее решений*;
2) *если $Bu \equiv u$, то $J_0(u) \geq 0$ $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, если $Bu \equiv \frac{\partial u}{\partial n_L}$, то $J_0(u) \geq 0$ $\forall u \in W^1_2(\Omega)$, если $Bu \equiv \frac{\partial u}{\partial n_L} + \sigma(x)u$, то $J_0(u) + \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \sigma(s)u^2(s)ds \geq 0$ $\forall u \in W^1_2(\Omega)$*;
3) *выполняется условие* $(*)$ *и* (0.6);
4) *функция $p \in L_q(\Omega)$ такая, что*

$$\lim_{u \in N(L), \|u\| \to +\infty} G_p(u) = +\infty. \tag{1.9}$$

Тогда существует $u_0 \in X$, для которого

$$J_p(u_0) = \inf_X J_p(u), \tag{1.10}$$

причем любое такое u_0 принадлежит $W^2_q(\Omega)$, удовлетворяет включению

$$-Lu_0(x) + p(x) \in [g_-(x, u(x)),\ g_+(x, u(x))] \tag{1.11}$$

для почти всех $x \in \Omega$ и граничному условию (0.2). *Если к тому же для уравнения* (0.1) *выполнено* Ay ($A1y$), *то любое* u_0, *удовлетворяющее* (1.10), *является полуправильным* (*сильным*) *решением задачи* (0.1)–(0.2).

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 3) *теоремы* 1.3, *а для функции* $p \in L_q(\Omega)$ *либо условие* (1.9), *либо*

$$\lim_{u \in N(L),\ \|u\| \to +\infty} G_p(u) = -\infty. \tag{1.12}$$

Тогда множество критических значений функционала $J_p(u)$ *в* X *не пусто, причем любая критическая точка* u_0 *этого функционала принадлежит* $W_q^2(\Omega)$, *удовлетворяет включению* (1.11) *и граничному условию* (0.2). *Если к тому же для уравнения* (0.1) *выполнено сильное* Ay (*сильное* $A1y$), *то каждая критическая точка функционала* $J_p(u)$ *является полуправильным* (*сильным*) *решением задачи* (0.1)–(0.2).

Укажем на связь условия Ландесмана–Лазера [3] с условиями (1.9), (1.12) в случае, когда подпространство $N(L)$ одномерно и для почти всех $x \in \Omega$ существует $\lim\limits_{u \to \pm\infty} g(x,u) = g_\pm(x)$ (через ψ будем обозначать базисную функцию $N(L)$). Предполагается, что функция $g(x,u)$ суперпозиционно измерима и для нее верна оценка (0.6). Условие Ландесмана–Лазера имеет вид: для функции $p \in L_q(\Omega)$ либо

$$\int_{\psi<0} g_+\psi(x)dx + \int_{\psi>0} g_-\psi(x)dx < \int_\Omega p(x)\psi(x)dx < \int_{\psi>0} g_+\psi(x)dx + \int_{\psi<0} g_-\psi(x)dx, \tag{1.13}$$

либо

$$\int_{\psi<0} g_-\psi(x)dx + \int_{\psi>0} g_+\psi(x)dx < \int_\Omega p(x)\psi(x)dx < \int_{\psi>0} g_-\psi(x)dx + \int_{\psi<0} g_+\psi(x)dx. \tag{1.14}$$

Предложение 1.2. *Неравенства* (1.13) ((1.14)) *влекут* (1.9) ((1.12)).

В [19] доказано это утверждение в случае, когда $g(x,u)$ не зависит от x.

Доказательство предложения 1.2 опирается на следующую лемму.

Лемма 1.1. *Пусть* $f : R \to R$ — *локально суммируемая функция и существует* $\lim\limits_{s \to \pm\infty} f(s) = f_\pm$. *Тогда существует* $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} f(s)ds/\lambda = f_\pm$.

Доказательство леммы 1.1. Положим

$$\Delta_\pm(\lambda) = \left(\int_0^\lambda f(s)ds/\lambda \right) - f_\pm = \int_0^\lambda (f(s) - f_\pm)ds/\lambda.$$

Покажем, что $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \Delta_+(\lambda) = 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{s \to +\infty} f(s) = f_+$, то существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $|f(s) - f_+| < \varepsilon/2$ для любого $s > \lambda_0$. Далее выберем $\lambda_1 > \lambda_0$, для которого $\int\limits_0^{\lambda_0} |f(s) - f_+|ds/\lambda_1 < \varepsilon/2$. Тогда для каждого $\lambda > \lambda_1$ имеем

$$|\Delta_+(\lambda)| \le \left(\int_0^{\lambda_0} |f(s) - f_+|ds/\lambda \right) + \int_{\lambda_0}^\lambda |f(s) - f_+|ds/\lambda < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε заключаем, что $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \Delta_+ = 0$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \Delta_-(\lambda) = 0$. $\square$

Доказательство предложения 1.2. Пусть верны неравенства (1.13) и $F(\lambda) = \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{\lambda\psi(x)} (g(x,s) - p(x))ds$. Для произвольного $\lambda \neq 0$ имеем

$$F(\lambda)/\lambda = \int_{\psi(x)\neq 0} dx\psi(x)\Big(\frac{1}{\lambda\psi(x)}\int_0^{\lambda\psi(x)} g(x,s)ds - p(x)\Big) = \int_{\psi>0}\Big(\psi(x)\frac{1}{\lambda\psi(x)}\int_0^{\lambda\psi(x)} g(x,s)ds\Big)dx +$$
$$+\int_{\psi(x)<0}\Big(\psi(x)\frac{1}{\lambda\psi(x)}\int_0^{\lambda\psi(x)} g(x,s)ds\Big)dx - \int_{\Omega} p(x)\psi(x)dx.$$

Согласно лемме 1.1 для почти всех $x \in \Omega$ из $\psi(x) > 0$ следует, что $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} \frac{1}{\lambda\psi(x)} \int\limits_{0}^{\lambda\psi(x)} g(x,s)ds = g_{\pm}(x)$, а $\psi(x) < 0$ соответственно влечет $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} \frac{1}{\lambda\psi(x)} \int\limits_{0}^{\lambda\psi(x)} g(x,s)ds = g_{\mp}(x)$. Поэтому, если учесть неравенство $\Big|\frac{1}{\lambda\psi(x)} \int\limits_{0}^{\lambda\psi(x)} g(x,s)ds\Big| \leq a(x)$ для почти всех $x\in\Omega$, удовлетворяющих условию $\psi(x)\neq 0$, то из теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла получим

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} F(\lambda)/\lambda = \int_{\psi>0}\psi(x)g_{\pm}(x)dx + \int_{\psi<0}\psi(x)g_{\mp}(x)dx - \int_{\Omega} p(x)\psi(x)dx$$

($a(x)$ из оценки (0.6)). Тогда из (1.13) следует $\lim\limits_{\lambda\to\infty} F(\lambda) = +\infty$. Аналогично рассматривается случай, когда выполнено условие (1.14). $\square$

Предложение 1.3. *Пусть функция* $g(x,u)$ *в уравнении* (0.1) *суперпозиционно измерима, для нее верна оценка* (0.6) *и для почти всех* $x \in \Omega$ *существует* $\lim\limits_{u\to\pm\infty} g(x,u) = g_{\pm}(x)$, *а подпространство* $N(L)$ *одномерно,* ψ *— базисная функция в* $N(L)$, *и для почти всех* $x \in \Omega$

$$g_-(x) < g(x,s) < g_+(x) (g_+(x) < g(x,s) < g_-(x)) \ \ \forall s \in R. \tag{1.15}$$

Тогда условие (1.13) ((1.14)) *является необходимым для существования сильного решения задачи* (0.1)–(0.2) *из пространства* $W_q^2(\Omega)$.

Доказательство предложения 1.3. Допустим, что $u \in W_q^2(\Omega)$ — сильное решение задачи (0.1)–(0.2). Умножим обе части уравнения (0.1) на ψ и проинтегрируем полученное равенство по Ω. Учитывая, что $\int\limits_{\Omega} Lu(x)\psi(x)dx = \int\limits_{\Omega} u(x)L\psi(x)dx = 0$, получим $\int\limits_{\Omega} g(x,u(x))\psi(x)dx = \int\limits_{\Omega} p(x)\psi(x)dx$. Отсюда и из неравенства (1.15) следует (1.13) ((1.14)). $\square$

Замечание 1.2. Данное доказательство повторяет рассуждения ([6], с. 54) для случая, когда нелинейность $g(x,u)$ каратеодориева, а (0.2) — граничное условие Дирихле.

Последовательное применение предложений 1.3 и 1.2 дает

Следствие 1.1. При выполнении условий предложения 1.3 условия (1.9) ((1.12)) являются необходимыми для существования сильного решения $u \in W_q^2(\Omega)$ задачи (0.1)–(0.2).

2. Доказательство общих вариационных принципов

Доказательство теоремы 1.1. Так как нуль — изолированная точка спектра самосопряженного оператора A, то X разлагается в прямую сумму ортогональных подпространств $N(A)$ и X_+ (X_+ — положительное подпространство оператора A) и существует число $\alpha > 0$ такое, что $(Ax,x) \geq \alpha\|x\|^2$ $\forall x \in X_+$, где $\|\cdot\|$ — норма в гильбертовом пространстве X. Из самосопряженности оператора A следует, что $(Ax,x)/2$ — его потенциал. Отсюда и из квазипотенциальности оператора T следует квазипотенциальность отображения (1.1) и утверждение: функционал $\varphi(x) = (Ax,x)/2 + f(x) - (p,x)$ — квазипотенциал Q.

В силу условия 2) теоремы 1.1 оператор ΛA монотонный ([13], с. 22) и непрерывный. Покажем, что

$$\lim_{\|x\|\to+\infty}\varphi(x)=+\infty. \tag{2.1}$$

Для любого $x\in X$, $x=x_1+x_2, x_1\in N(A)$, $x_2\in X_+$, имеем $\varphi(x)=(Ax_2,x_2)/2+(f(x_1+x_2)-f(x_1))+(f(x_1)-(p,x))\geq\frac{\alpha}{2}\|x_2\|^2-(M_1+\|p\|)\|x_2\|+(f(x_1)-(p,x_1))$, где $M_1=M\|P\|$, M — постоянная из условия 3 теоремы 1.1 (в силу замечания 1.1 $|f(x)-f(y)|\leq M\|x-y\|_Y\leq M_1\|x-y\|$ $\forall x,y\in X$). Фиксируем $\varepsilon>0$. В силу (1.3) найдется $d_0>0$ такое, что $f(x)-(p,x)\geq 0$ для любого $x\in N(A)$ с $\|x\|\geq d_0$, и существует $d_1>0$, для которого из $\|x\|\geq d_1$, $x\in N(A)$ следует $f(x)-(p,x)>\varepsilon+\frac{(M_1+\|p\|)^2}{2\alpha}$. Пусть $d_2>d_0$ и для него неравенство $t>d_2$ влечет

$$\frac{\alpha}{2}t^2-(M_1+\|p\|)t>\varepsilon-\min\{0,\inf_{x\in N(A),\ \|x\|\leq d_0}(f(x)-(p,x))\}.$$

Инфинум в правой части последнего неравенства конечный, поскольку $|f(x)|\leq|f(x)-f(0)|+|f(0)|\leq M_1\|x\|+|f(0)|$ $\forall x\in N(A)$. Так как $\|x\|=(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2)^{1/2}$, $x=x_1+x_2, x_1\in N(A)$, $x_2\in X_+$, то из неравенства $\|x\|>\sqrt{2}\max\{d_1,d_2\}$ следует, что либо $\|x_1\|>d_1$, либо $\|x_2\|>d_2$. В первом случае $\varphi(x)>-\frac{(M_1+\|p\|)^2}{2\alpha}+\varepsilon+\frac{(M_1+\|p\|)^2}{2\alpha}=\varepsilon$, т. к. $\frac{\alpha}{2}t^2-(M_1+\|p\|)t\geq\frac{(M_1+\|p\|)^2}{2\alpha}$ $\forall t\in R$; во втором случае $\varphi(x)>\varepsilon-\min\{0,\inf_{x\in N(A),\ \|x\|\leq d_0}(f(x)-(p,x))\}+f(x_1)-(p,x_1)\geq\varepsilon$. Таким образом, для любого $x\in X$ с $\|x\|>\sqrt{2}\max\{d_1,d_2\}$ $\varphi(x)>\varepsilon$. Поэтому в силу произвольности выбора $\varepsilon>0$ заключаем о справедливости (2.1). Выполнены все условия вариационного принципа ([20], с. 16). Следовательно, существует $x_0\in X$, для которого

$$\varphi(x_0)=\inf_X\varphi(x), \tag{2.2}$$

причем любое такое x_0 удовлетворяет включению (1.4). Если дополнительно известно, что точки разрыва оператора Q регулярны, то всякое $x_0\in X$, для которого верно (2.2), удовлетворяет уравнению (1.1) и является точкой радиальной непрерывности оператора Q ([20], с. 13). $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Доказательство непустоты множества критических точек функционала $\varphi(x)=(Ax,x)/2+f(x)-(p,x)$ опирается на следующий результат Ченга.

Теорема 2.1 ([9]). *Пусть E — вещественное рефлексивное банахово пространство, функция $\varphi:E\to R$ локально липшицева и удовлетворяет* (P.S.) *условию. Предположим, что $E=E_1\oplus E_2$, где подпространство E_1 конечномерно, и существуют постоянные $b_1<b_2$ и окрестность N нуля пространства E_1 такие, что $\varphi|_{E_2}\geq b_2,\varphi|_{\partial N}\leq b_1$ (∂N — граница N). Тогда множество критических точек φ непусто.*

Говорят, что локально липшицева функция $\varphi:E\to R$ удовлетворяет (P.S.) условию [9], если любая последовательность $(x_n)\subset E$, для которой множество значений $(\varphi(x_n))$ ограничено и $\lambda(x_n)=\min_{w\in\partial\varphi(x_n)}\|w\|_{E^*}\to 0$, содержит сходящуюся подпоследовательность.

Функция $\varphi(x)=(Ax,x)/2+f(x)-(p,x)$ локально липшицева на X, поскольку A — линейный ограниченный оператор, а f липшицева на Y (см. замечание 1.1). По условию пространство X компактно и плотно вложено в Y, оператор A самосопряженный, нуль — изолированная точка его спектра, причем ядро $N(A)$ и отрицательное подпространство оператора A конечномерны и для p верно (1.5). Отсюда следует, что φ удовлетворяет (P.S.) условию ([9], теорема 4.5).

Проверим, что для φ выполнены и остальные условия теоремы 2.1, связанные с разложением пространства, на котором определена φ, в прямую сумму.

Из условия 2) теоремы 1.2 следует, что X распадается на прямую сумму ортогональных и инвариантных относительно A подпространств $N(A)$, X_- и X_+ и существуют положительные константы α и β такие, что

$$(Ax,x)\geq\alpha\|x\|^2\ \ \forall x\in X_+,\quad (Ax,x)\leq-\beta\|x\|^2\ \ \forall x\in X_-.$$

Пусть для определенности $\lim\limits_{x\in N(A),\ \|x\|\to+\infty}(f(x)-(p,x))=+\infty$. Положим $X_1=X_-$, $X_2=N(A)\oplus X_+$, тогда $X=X_1\oplus X_2$ и X_1 конечномерное. Для произвольного $x\in X_2$, $x=x_0+x_1$, $x_0\in N(A)$, $x_1\in X_+$ имеем с учетом замечания 1.1

$$\varphi(x)=(Ax,x)/2+(f(x_0+x_1)-f(x_0))+(f(x_0)-(p,x_0))-(p,x_1)\geq$$
$$\geq\frac{\alpha}{2}\|x_1\|^2-(M_1+\|p\|)\|x_1\|+(f(x_0)-(p,x_0))\geq-\frac{(M_1+\|p\|)^2}{2\alpha}+\inf_{v\in N(A)}(f(v)-(p,v))=b,$$

где $M_1=M\|P\|$, M — постоянная в условии 3) теоремы 1.1. Далее, для $x\in X_1$

$$\varphi(x)=(Ax,x)/2+f(x)-f(0)+f(0)-(p,x)\leq-\frac{\beta}{2}\|x\|^2+(M_1+\|p\|)\|x\|+|f(0)|.$$

Поэтому существует такое $r>0$, что $b_1=\sup\limits_{x\in X,\ \|x\|=r}\varphi(x)<b_2$, и, значит, все условия теоремы 2.1 выполнены. В случае, когда

$$\lim_{x\in N(A),\ \|x\|\to+\infty}(f(x)-(p,x))=-\infty,\tag{2.3}$$

полагаем $X_1=X_-\oplus N(A)$, $X_2=X_+$. Тогда $X=X_1\oplus X_2$ и X_1 конечномерное. Для каждого $x\in X_2$ имеем

$$\varphi(x)=(Ax,x)/2+(f(x)-f(0))+(f(0)-(p,x))\geq\frac{\alpha}{2}\|x\|^2-$$
$$-(M_1+\|p\|)\|x\|-|f(0)|\geq-\frac{(M_1+\|p\|)^2}{2\alpha}-|f(0)|=b_2.$$

Оценим φ сверху на X_1. Для любого $x\in X_1$, $x=x_0+x_2$, $x_0\in N(A)$, $x_2\in X_-$,

$$\varphi(x)=(Ax,x)/2+(f(x_0+x_2)-f(x_0))+(f(x_0)-(p,x_0))-(p,x_2)\leq$$
$$\leq-\frac{\beta}{2}\|x_2\|^2-(M_1+\|p\|)\|x_2\|+(f(x_0)-(p,x_0)).$$

В силу (2.3) существует $d_1>0$ такое, что для произвольного $x_0\in N(A)$ с $\|x_0\|\geq d_1$ $f(x_0)-(p,X_0)<b_2-\frac{(M_1+\|p\|)^2}{2\beta}$. Найдется $d_2>0$, для которого неравенство $\|x_2\|\geq d_2$, $x_2\in X_-$ влечет

$$-\frac{\beta}{2}\|X_2\|^2+(M_1+\|p\|)\|x_2\|<b_2-\sup_{\nu\in N(A)}(f(\nu)-(p,\nu)).$$

Тогда, если $x\in X_1$, $x=x_0+x_2$, $x_0\in N(A), x_2\in X_-$, и $\|x\|=\sqrt{\|x_0\|^2+\|x_2\|^2}\geq\sqrt{2}\max d_1,\, d_2=r$, либо $\|x_0\|\geq d_1$, либо $\|x_2\|\geq d_2$. В первом случае

$$\varphi(x)<\frac{(M_1+\|p\|)^2}{2\beta}+b_2-\frac{(M_1+\|p\|)^2}{2\beta}=b_2;$$

во втором $\varphi(x)<b_2-\sup\limits_{\nu\in N(A)}(f(\nu)-(p,\nu))+f(x_0)-(p,x_0)\leq b_2$.

Следовательно, $b_1=\sup\limits_{x\in X_1,\ \|x\|=r}\varphi(x)<b_2$, поскольку сфера $\|x\|=r$ в конечномерном пространстве X_1 компактна, а сужение $\varphi|_{X_1}$ непрерывно на ней. Таким образом, и в этом случае все условия теоремы 2.1 выполнены.

Следовательно, существует $x_0\in X$ такая, что $0\in\partial\varphi(x_0)$, $\partial\varphi(x_0)$ — обобщенный градиент Кларка функции φ. Из определения $\partial\varphi(x_0)$ заключаем, что для произвольного $\nu\in X$

$$-(Ax_0,\nu)+(p,\nu)\leq\limsup_{\substack{h\in X,\ h\to0\\ t\to+0}}\frac{f(x_0+h+t\nu)-f(x_0+h)}{t}.\tag{2.4}$$

Так как $f|_X$ — квазипотенциал оператора P^*TP, то

$$\frac{f(x_0+h+t\nu)-f(x_0+h)}{t}=\int_0^1\langle P^*TP(x_0+h+\tau t\nu),\nu\rangle d\tau.$$

Поэтому из (2.4) получим

$$\limsup_{\substack{h\in X,\ h\to 0\\ t\to+0}}\int_0^1\langle P^*TP(x_0+h+\tau t\nu),\nu\rangle d\tau+(Ax_0,\nu)-(p,\nu)\geq 0\ \ \forall\nu\in X. \tag{2.5}$$

Покажем, что (2.5) влечет

$$y_0=-\Lambda Ax_0+\Lambda p\in S(P^*TP)(x_0), \tag{2.6}$$

где $S(P^*TP)$ — секвенциальное замыкание оператора $F=P^*TP$ [17]. По определению $SF(x_0)$ — замкнутая выпуклая оболочка множества всех слабо предельных точек последовательностей вида $(F(x_n))$ в X^*, где (x_n) сильно сходится к x_0. Допустим, что (2.6) не имеет места. Согласно теореме о строгой отделимости выпуклого множества от точки, существуют $\nu_0\in X$ и $\varepsilon>0$ такие, что

$$\langle z,\nu_0\rangle-\langle y_0,\nu_0\rangle<-\varepsilon\ \ \forall z\in SF(x_0).$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{\substack{h\in X,\ h\to 0\\ t\to+0}}\langle F(x_0+h+s\nu_0),\nu_0\rangle-\langle y_0,\nu_0\rangle<-\varepsilon. \tag{2.7}$$

Из (2.7) заключаем о существовании $\delta>0$, для которого $(F(x_0+h+s\nu_0),\nu_0)-(y_0,\nu_0)<-\varepsilon$, если $\|h\|<\delta$ и $0<s<\delta$. Поэтому получим

$$\limsup_{\substack{h\in X,\ h\to 0\\ t\to+0}}\int_0^1\langle F(x_0+h+\tau t\nu_0),\nu_0\rangle d\tau-\langle y_0,\nu_0\rangle\leq-\varepsilon,$$

что противоречит (2.5) при $\nu=\nu_0$.

Таким образом, доказана непустота множества критических точек функции $\varphi(x)$ и то, что любая такая точка x_0 удовлетворяет включению (2.6). Как показано в [21], $S(P^*TP)x_0\subset P^*(ST)(Px_0)$ ([20], с. 16), поэтому (2.6) влечет (1.4). Если дополнительно предположить, что все точки разрыва оператора (1.1) сильно регулярные, то любая критическая точка x_0 функции φ является точкой деминепрерывности оператора P^*TP и удовлетворяет уравнению (1.1). Действительно, если допустить, что критическая точка x_0 функционала φ есть точка разрыва для P^*TP, то она должна быть сильно регулярной для Q, т. е. существует $\nu_0\in X$, для которой $\limsup\limits_{\substack{h\in X\\ h\to 0}}\langle Q(x_0+h),\nu_0\rangle<0$. Отсюда и из определения верхнего предела следует существование положительных чисел s и ε таких, что для любых $h\in X$, $\|h\|<\varepsilon$ имеем $\langle Q(x_0+h),\nu_0\rangle<-s$. При этом, если $h\in X$, $t>0$ и $\|h\|+t\|\nu_0\|<\varepsilon$, то $\langle Q(x_0+h+\tau t\nu_0),\nu_0\rangle<-s\ \forall\tau\in[0,1]$. Поэтому левая часть неравенства (2.5) при $\nu=\nu_0$ меньше или равна $-s$. С другой стороны, поскольку x_0 — критическая точка функции φ, то для нее верно неравенство (2.5) для любого $\nu\in X$. Полученное противоречие доказывает, что x_0 — точка деминепрерывности оператора Q. Отсюда и из (2.5), используя теорему Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла, получим

$$\langle Q(x_0),\nu\rangle\geq 0\ \ \forall\nu\in X.$$

Последнее возможно только при $Q(x_0)=0$. $\square$

3. Доказательство результатов типа Ландесмана–Лазера для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями

Так как дифференциальный оператор L в уравнении (0.1) равномерно эллиптический и симметричный, а его коэффициенты $a_{ij} \in C_{1,\alpha(\overline{\Omega})}$, то равенства

$$(u,\nu)_0 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x) u_{x_i} \nu_{x_j}\, dx \quad \forall u,\nu \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega),$$

$$(u,\nu)_1 = (u,\nu)_0 + \int_\Omega u\nu\, dx \quad \forall u,\nu \in W^1_2(\Omega)$$

задают на пространствах $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $W^1_2(\Omega)$ соответственно скалярные произведения, причем порождаемые ими нормы эквивалентны нормам этих пространств. Через X обозначаем $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ в случае задачи Дирихле и $W^1_2(\Omega)$, если рассматривается задача Неймана или третья краевая задача. Линейный оператор $A : X \to X$ определяется равенством

$$(Au,\nu) = (u,\nu)_0 + \int_\Omega c(x)u(x)\nu(x)dx \quad \forall u,\nu \in X,$$

для задач Дирихле и Неймана, и

$$(Au,\nu) = (u,\nu)_1 + \int_\Omega (c(x)-1)u(x)\nu(x)dx + \int_\Gamma \sigma(x)u(x)\nu(x)dx \quad \forall u,\nu \in X,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в X, $c \in C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ — коэффициент при $u(x)$ в уравнении (0.1). Заметим, что оператор A самосопряженный и равен сумме тождественного и компактного операторов, его ядро совпадает с подпространством $N(L)$ решений задачи (0.4)–(0.5). Согласно теории Фредгольма отрицательное подпространство X_- оператора A конечномерно и, если $N(L) \neq \{0\}$, то нуль — изолированная точка спектра оператора A конечной кратности ([22], с. 101). Пространство X плотно и компактно вложено в рефлексивное банахово пространство $Y = L_p(\Omega)$, $p = \frac{q}{q-1}$ ($q > 2n/(n+2)$ из оценки (0.6)). В силу условия 3) теоремы 1.3 оператор Немыцкого $Tu = g(x,u(x))$, порождаемый нелинейностью $g(x,u)$ из уравнения (0.1), действует из Y в Y^* и ограничен на Y. Он квазипотенциальный на Y, и его квазипотенциал $f(u) = \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)ds$ $\forall u \in Y$ [23].

Доказательство теоремы 1.3 Из условия 2) теоремы 1.3 следует, что $(Au,u) \geq 0$ $\forall u \in X$. Ограничение (1.9) на элемент $p \in Y^*$ влечет равенство (1.3). Поэтому из теоремы 1.1 заключаем о существовании $u_0 \in X$, для которого $\varphi(u_0) = \inf\limits_X \varphi(u)$, $\varphi(u) = (Au,u)/2 + f(u) - (p,u)$, причем каждое такое u_0 удовлетворяет включению (1.4), где Λ — линейный изоморфизм, отождествляющий X с X^*. Последнее означает, что существует $z \in STu_0 \subset L_q(\Omega)$, для которого верно тождество

$$(Au_0,\nu) = \int_\Omega (p(x)-z(x))\nu(x)dx \quad \forall \nu \in X,$$

т. е. u_0 — обобщенное решение задачи

$$Lu(x) = p(x) - z(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$Bu|_\Gamma = 0. \tag{3.2}$$

При сделанных выше предположениях относительно коэффициентов дифференциального оператора L, гладкости границы Γ области Ω, функции σ в граничном условии (0.3) и принадлежности $p(x) - z(x)$ к $L_q(\Omega)$ с $q > 2n/(n+2)$, обобщенное решение задачи (3.1)–(3.2) принадлежит $W^q_2(\Omega)$ и является сильным решением этой задачи. Доказательство этого факта в случае $q = 2$ можно найти в [1], там же приводится схема доказательства и при $q \neq 2$. Так как Y —

рефлексивное банахово пространство, а оператор $T : Y \to Y^*$ локально ограниченный на Y, то $ST = T^{\diamondsuit}$, где $T^{\diamondsuit}$ — овыпукление оператора T [24]. Для операторов Немыцкого, действующих в лебеговых пространствах, овыпукления были описаны М.А. Красносельским и А.В. Покровским в ([2], гл. 5, § 27). В рассматриваемом случае для любого $u \in L_p(\Omega)$, $p = q/(q-1)$,

$$T^{\diamondsuit}u = \{z : \Omega \in R \mid z \text{ — измеримая по Лебегу на } \Omega,$$
$$z(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))] \text{ для п. в. } x \in \Omega\}.$$

Следовательно, сильное решение u_0 задачи (3.1)–(3.2) удовлетворяет включению (1.11). Таким образом, доказано, что любое $u_0 \in X$, для которого $\varphi(u_0) = \inf\limits_X \varphi(u)$, удовлетворяет включению (1.11).

Предположим теперь дополнительно, что для уравнения (0.1) выполнено Ay. Докажем, что это влечет регулярность точек разрыва оператора (1.1). Если для функции $u \in X$ мера множества $\Omega(u) = \{x \in \Omega \mid u(x) \text{ — точка разрыва } g(x, .)\}$ равна нулю, то u — точка радиальной непрерывности оператора Q. Действительно, в этом случае для любого $h \in X$ существует

$$\lim_{t\to 0}\langle Q(u+th), h\rangle = \lim_{t\to 0}\{(A(u+th), h) + \int_\Omega g(x, u(x)+th(x))\cdot h(x)dx - \int_\Omega p(x)h(x)dx\} =$$
$$= (Au, h) - \int_\Omega p(x)h(x)dx + \int_\Omega \lim_{t\to 0} g(x, u(x)+th(x))\cdot h(x)dx =$$
$$= (Au, h) - \int_\Omega p(x)h(x)dx \ + \int_\Omega g(x, u(x))h(x)dx = \langle Qu, h\rangle$$

(воспользовались теоремой Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла и оценкой (0.6)). Следовательно, если u — точка разрыва оператора Q, то $\operatorname{mes}\Omega(u) \neq 0$.

Для $v \in X$ множество $\Omega(v)$ с точностью до множества меры нуль совпадает с объединением множеств $\Omega_+(v) = \{x \in \Omega \mid g(x, v(x)+) > g(x, v(x)-)\}$ и $\Omega_-(v) = \{x \in \Omega \mid g(x, v(x)+) < g(x, v(x)-)\}$.

Пусть $v \in X$ — точка разрыва оператора Q. Если $\operatorname{mes}\Omega_+(v) = 0$, то $g(x, v(x)+) \le g(x, v(x)-)$ почти всюду на Ω, поэтому $\lim\limits_{t\to+0}\langle T(v+th), h\rangle \le \langle Tv, h\rangle$ $\forall h \in X$. Отсюда и из предложения 1.1 следует, что v — регулярная точка для Q. Пусть теперь $\operatorname{mes}\Omega_+(v) \neq 0$. Предположим, что v не является регулярной для оператора Q. Последнее означает, что

$$\limsup_{t\to+0}\langle Q(v+th), h\rangle \ge 0 \ \ \forall h \in X. \tag{3.3}$$

Покажем, что из (3.3) следует принадлежность v пространству $W_q^2(\Omega)$. Заметим, что для любого $h \in X$ существует $\limsup\limits_{t\to+0}\langle Q(v+th), h\rangle = ((Av+th), h) - (p, h) + \int\limits_\Omega \lim\limits_{t\to+0} g(x, v(x)+th(x))h(x)dx$. Полагая

$$\psi(x) = \max\{|g(x, v(x)+)|, |g(x, v(x)-)|\}, \tag{3.4}$$

получим из (3.3)

$$g(h) = (Av, h) \ge -(\|p\|_{Y^*} + \|\psi\|_{Y^*})\|h\|_Y \ \ \forall h \in X.$$

Множество X всюду плотно в пространстве Y, функционал $g(h)$ линейный на X, а в силу последнего неравенства ограничен на $X \subset Y$. Поэтому g допускает единственное продолжение до линейного ограниченного функционала на Y. Следовательно, существует $z \in Y^* = L_q(\Omega)$ такой, что $g(h) = \langle z, h\rangle$ $\forall h \in X$. Но это означает, что v — обобщенное решение задачи $Lu(x) = z(x)$, $x \in \Omega$, $Bu|_\Gamma = 0$, из чего следует принадлежность ν пространству $W_q^2(\Omega)$ и равенство нулю следа $Bv(x)$ на Γ (аргументация та же, что и при рассмотрении задачи (3.1)–(3.2)).

Чтобы прийти к противоречию, построим $h \in X$, для которого $\lim\limits_{t\to+0}\langle Q(v+th), h\rangle < 0$. Так как $\operatorname{mes}\Omega_+(v) \neq 0$ и для уравнения (0.1) выполнено Ay, то существуют $i \in I$ и $\varepsilon > 0$ такие, что ненулевой будет мера хотя бы одного из множеств

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid \nu(x) = \varphi_i(x),\ L\varphi_i(x) + g(x, \varphi_i(x)-) - p(x) > \varepsilon\},$$
$$\Omega_2 = \{x \in \Omega \mid \nu(x) = \varphi_i(x),\ L\varphi_i(x) + g(x, \varphi_i(x)-) - p(x) < -\varepsilon\}.$$

Пусть для определенности $\operatorname{mes}\Omega_1 = \nu \neq 0$. Так как функции $Lv(x)$, $p(x)$ и $\psi(x)$, определенная равенством (3.4), суммируемы на Ω, то найдется $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $B \subset \Omega$, мера которого меньше δ, верны неравенства

$$\int_B |Lv(x)|dx < \varepsilon\nu/8, \quad \int_B \psi(x)dx < \varepsilon\nu/8, \quad \int_B |p(x)|dx < \varepsilon\nu/8. \tag{3.5}$$

Существуют замкнутое множество $F \subset \Omega_1$, мера которого больше $\nu/2$, и открытое множество $G \supset F$, замыкание которого содержится в Ω, такие, что $\operatorname{mes}(G \setminus F) < \delta$ [14]. Пусть H — бесконечно дифференцируемая функция на Ω, равная единице на F, нулю вне G и $0 \leq H \leq 1$ на $G \setminus F$. Из совпадения $\nu(x)$ и $\varphi_i(x)$ на F следует, что $Lu(x) = L\varphi_i(x)$ почти всюду на F ([25], с. 151). Отсюда для $h(x) = -H(x)$ получим

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+0}\langle Q(v+th), h\rangle &= (A\nu, h) - (p, h) + \int_\Omega \lim_{t\to+0} g(x, v(x) + th(x))h(x)dx = \\ &= -\int_F (L\varphi_i(x) + g(x, \varphi_i(x)-) - p(x))dx + \int_{G\setminus F} L\nu(x)h(x)dx + \\ &\quad + \int_{G\setminus F} \lim_{t\to+0} g(x, v(x) + th(x))h(x)dx - \int_{G\setminus F} p(x)h(x)dx.\end{aligned}$$

Так как $F \subset \Omega_1$, а $\operatorname{mes}(G \setminus F) < \delta$ влечет (3.5), то

$$\lim_{t\to+0}\langle Q(v+th), h\rangle < -\varepsilon \operatorname{mes} F + 3\varepsilon\nu/8 < -\varepsilon\nu/2 + 3\varepsilon\nu/8 = -\varepsilon\nu/8 < 0.$$

Полученное неравенство противоречит (3.3).

Если $\operatorname{mes}\Omega_1 = 0$, то $\operatorname{mes}\Omega_2 = \nu \neq 0$. Как и в случае $\operatorname{mes}\Omega_1 \neq 0$, выбирается $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $B \subset \Omega$ с $\operatorname{mes} B < \delta$ верно (3.5), и строится функция $H(x)$ с заменой Ω_1 на Ω_2. Далее, полагая $h(x) = H(x)$, получим

$$\lim_{t\to+0}\langle Q(v+th), h\rangle < -\varepsilon\nu/8 < 0,$$

что противоречит (3.3). Итак, установлено, что Ay для уравнения (0.1) влечет регулярность точек разрыва для оператора Q. Значит, в силу теоремы 1.1 любое $u_0 \in X$, для которого $\varphi(u_0) = \inf\limits_X \varphi(u)$, является решением уравнения (1.1) и точкой радиальной непрерывности оператора P^*TP. Отсюда следует, что такое u_0 — обобщенное решение задачи (0.1)–(0.2) и

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega g(x, u_0(x) + th(x))h(x)dx = \int_\Omega g(x, u_0(x))h(x)dx \ \ \forall h \in X. \tag{3.6}$$

Как и раньше, получаем, что u_0 — сильное решение задачи (0.1)–(0.2) из $W_q^2(\Omega)$.

Из (3.6) следует, что u_0 — полуправильное решение задачи (0.1)–(0.2). Действительно, в противном случае $\operatorname{mes}\Omega(u_0) \neq 0$ и, значит, отлична от нуля мера хотя бы одного из множеств $\Omega_+(u_0)$, $\Omega_-(u_0)$. Допустим, что $\operatorname{mes}\Omega_+(u_0) \neq 0$. Тогда найдутся положительные числа ε и ν, для которых мера множества $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid g(x, u_0(x)+) - g(x, u_0(x)-) > \varepsilon\}$ равна ν. Выберем $\delta > 0$ так, что для произвольного измеримого множества $B \subset \Omega$ неравенство $\operatorname{mes} B < \delta$ влечет (3.5). Далее, найдутся замкнутое множество $F \subset \Omega_+(u_0)$ с $\operatorname{mes} F > \nu/2$ и открытое множество $G \supset F$, замыкание которого содержится в Ω, такие, что $\operatorname{mes} G \setminus F < \delta$ [14]. Пусть $h(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция на Ω, равная единице на F, нулю вне G и $0 \le h(x) \le 1$, если $x \in G \setminus F$. Функция $h \in W_2^1(\Omega)$ и

$$\lim_{t\to+0}\int_\Omega g(x,u_0(x)+th(x))h(x)dx - \lim_{t\to-0}\int_\Omega g(x,u_0(x)+th(x))h(x)dx \ge$$
$$\ge \int_G (g(x,u_0(x)+) - g(x,u_0(x)-))dx - \int_{G\setminus F} 2\psi(x)dx \ge \varepsilon\nu/2 - 2\varepsilon\nu/8 = \varepsilon\nu/4 > 0,$$

что противоречит (3.6). Случай, когда $\operatorname{mes}\Omega_-(u_0) \ne 0$, рассматривается аналогично. На этом завершается доказательство теоремы 1.3 в ситуации, когда для уравнения (0.1) выполнено Ay.

Пусть теперь для уравнения (0.1) выполнено $A1y$, $u_0 \in X$ и $\varphi(u_0) = \inf\limits_X \varphi(u)$. Как уже установлено, $u_0 \in W_q^2(\Omega)$ удовлетворяет граничному условию (0.2) и включению (1.11). Для почти всех $X \in \Omega\setminus\Omega(u_0)$ отрезок $[g_-(x,u_0), g_+(x,u_0)] = \{g(x,u_0)\}$, и, значит, $Lu_0(x)+g(x,u_0(x)) = p(x)$. Докажем, что $\operatorname{mes}\Omega_-(u_0) = 0$. Допустим противное, тогда отлична от нуля мера одного из множеств

$$\Omega_1^- = \{x \in \Omega_-(u_0) \mid Lu_0(x) + g(x,u_0(x)+) - p(x) \ge 0\},$$
$$\Omega_2^+ = \{x \in \Omega_-(u_0) \mid Lu_0(x) + g(x,u_0(x)+) - p(x) < 0\}.$$

Пусть для определенности $\operatorname{mes}\Omega_1^-(u_0) \ne 0$, тогда не равна нулю мера множества $\Omega_1(0)$, где

$$\Omega_1(\varepsilon) = \{x \in \Omega_-(u_0) \mid Lu_0(x) + g(x,u_0(x)-) - p(x) > \varepsilon\}.$$

Поэтому существует $\varepsilon > 0$, для которого отлична от нуля мера множества $\Omega_1(\varepsilon)$.

Положим $\operatorname{mes}\Omega_1(\varepsilon) = \nu$. Найдется $\delta > 0$ такое, что для произвольного измеримого множества $B \subset \Omega$ неравенство $\operatorname{mes} B < \delta$ влечет (3.5). Существует замкнутое множество $F \subset \Omega_1(\varepsilon)$ с $\operatorname{mes} F > \nu/2$ и открытое множество $G \supset F$, замыкание которого содержится в Ω, причем $\operatorname{mes} G \setminus F < \delta$ [14]. Пусть $H(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция на Ω, равная единице на F, нулю вне G и $0 \le H \le 1$ на $G \setminus F$. Для $h(x) = -H(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеем для произвольного $t > 0$

$$(\varphi(u_0+th) - \varphi(u_0))/t = \int_0^1 \langle Q(u_0+t\tau h), h\rangle d\tau.$$

Переходя к пределу при $t \to 0$, получим

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(u_0+th)-\varphi(u_0)}{t} = (Au_0,h) - (p,h) + \int_\Omega \lim_{t\to+0} g(x,u_0(x)+\tau th(x))h(x)dx =$$
$$= -\int_F (Lu_0(x) + g(x,u_0(x)-) - p(x))dx +$$
$$+\int_{G\setminus F}(Lu_0(x) - p(x) + \lim_{t\to+0} g(x,u_0(x)+\tau th(x)))h(x)dx < -\varepsilon\nu/2 + 3\varepsilon\nu/8 = -\varepsilon\nu/8 < 0.$$

С другой стороны, $\varphi(u_0) = \inf\limits_X \varphi(u)$, поэтому $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\varphi(u_0+th)-\varphi(u_0)}{t} \ge 0$.

Полученное противоречие доказывает, что $\operatorname{mes}\Omega_1^- = 0$. Аналогично устанавливается, что $\operatorname{mes}\Omega_1^+ = 0$. Следовательно, $\operatorname{mes}\Omega_-(u_0) = 0$. Множество $\Omega_+(u_0)$ представимо как объединение двух непересекающихся множеств:

$$\Omega_{11}^+ = \{x \in \Omega_+(u_0) \mid Lu_0(x) + g(x,u_0(x)) - p(x) \ne 0\},$$
$$\Omega_{12}^+ = \{x \in \Omega_+(u_0) \mid Lu_0(x) + g(x,u_0(x)+) = p(x)\}.$$

Если предположить, что $\operatorname{mes}\Omega_{11}^+ \ne 0$, то из $A1y$ для уравнения (0.1) следует существование $i \in I$, для которого мера множества

$$\Omega_{11}^i = \{x \in \Omega_{11}^+(u_0) \mid u_0(x) = \varphi_i(x),\ (L\varphi_i(x)+g(x,\varphi_i(x)+)-p(x))(L\varphi_i(x)+g(x,\varphi_i(x)-)-p(x)) > 0\}$$

не равна нулю. Поскольку $u_0(x) = \varphi_i(x)$ на Ω^i_{11}, то почти всюду на этом множестве $Lu_0(x) = L\varphi_i(x)$ ([25], с. 151). Поэтому почти всюду на Ω^i_{11} $(Lu_0(x) + g(x, u_0(x)-) - p(x))(Lu_0(x) + g(x, u_0(x)+) - p(x)) > 0$. Последнее неравенство равносильно $-Lu_0(x) + p(x) \notin [g(x, u_0(x)-), g(x, u_0(x)+)]$ для почти всех $x \in \Omega^i_{11}$, что противоречит (1.11). Таким образом доказано, что u_0 — сильное решение задачи (0.1)–(0.2). $\square$

Доказательство теоремы 1.4. Выше показано, что для операторной постановки задачи (0.1)–(0.2) выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.2, а условия (1.9) или (1.12) для $p(x) \in L_q(\Omega)$ влекут (1.5). Поэтому в силу теоремы 1.2 множество критических точек функционала $\varphi(u)$ не пусто и любая точка u_0 из этого множества удовлетворяет включению (1.4). Отсюда, как было установлено при доказательстве теоремы 1.3, следует, что каждая критическая точка u_0 функции φ принадлежит $W^2_q(\Omega)$, удовлетворяет граничному условию (0.2) и включению (1.11). Предположим, что для уравнения (0.1) выполнено сильное $A1y$, u_0 удовлетворяет включению (1.11) и след $Bu_0(x)$ на Γ равен нулю. Докажем, что $u_0(x)$ — сильное решение задачи (0.1)–(0.2). Множество $\Omega(u_0)$ с точностью до множества меры нуль совпадает с объединением множеств $\Omega_+(u_0)$ и $\Omega_-(u_0)$ (обозначения те же, что и при доказательстве теоремы (1.3)). Сильное $A1y$ на падающие разрывы $g(x, u)$ по u накладывает те же ограничения, что и на прыгающие вверх. Поэтому доказательства того, что мера множества

$$\Omega^-_{11} = \{x \in \Omega_-(u_0) \mid Lu_0(x) + g(x, u_0(x)) - p(x) \neq 0\}$$

равна нулю и $\operatorname{mes} \Omega^+_{11} = 0$, одинаковы, и они повторяют рассуждения той части доказательства теоремы 1.3, где устанавливается равенство $\operatorname{mes} \Omega^+_{11} = 0$. Отсюда следует, что u_0 — сильное решение задачи (0.1)–(0.2). Если выполнено сильное Ay для уравнения (0.1), то с точностью до множества меры нуль $\Omega_+(u_0)$ и Ω_- совпадают с Ω^+_{11} и $\Omega^-_{11}(u_0)$ соответственно и, значит, u_0 — полуправильное решение задачи (0.1)–(0.2). $\square$

Замечание. Можно доказать, что выполнение сильного Ay для уравнения (0.1) в теореме 1.4 влечет сильную регулярность точек разрыва оператора Q. Соответствующие рассуждения подобны доказательству регулярности точек разрыва у оператора Q при доказательстве теоремы 1.3, если случай $\operatorname{mes} \Omega_+(u_0) = 0$ рассматривать аналогично ситуации, когда $\operatorname{mes} \Omega_+(u_0) \neq 0$. Последнее возможно, поскольку ограничения на “падающие” и “прыгающие вверх” разрывы нелинейностей $g(x, u)$ по u в сильном Ay одинаковы.

Литература

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1964. – 540 с.
2. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом.* – М.: Наука, 1983. – 272 с.
3. Landesman E., Lazer A. *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance* // J. Math. and Mech. – 1970. – V. 19. – № 7. – P. 609–623.
4. Ambrosetti A., Mancini G. *Existence and multiplicity results for nonlinear elliptic problems with linear part at resonance. The case of simple eigenvalue* // J. Different. Equat. – 1978. – V. 28. – № 2. – P. 220–245.
5. Rabinowitz P. *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations* // Nonlinear Analysis: A Collectionn of Papers in Honor of E.H. Roth. – 1978. – P. 161–177.
6. Скрыпник И.В. *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, 1990. – Т. 37. – С. 3–87.
7. Basile N., Mininni M. *Some solvability results for elliptic boundary value problems in resonace at the first eigenvalue with discontinuons nonlinearities* // Boll. UMI. – 1980. – V. 17-B. – № 3. – P. 1023–1033.
8. Massabo I. *Elliptic boundary value problems at resonance with discontinuons nonlinearities* // Boll. UMI. – 1980. – V. 17-B. – № 3. – P. 1308–1320.

9. Chang K.-C. *Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations* // J. Math. Anal. and Appl. – 1981. – V. 80. – № 1. – P. 102–129.
10. Chang K.-C. *Boundary problems and the set-valued mappings* // J. Different. Equat. – 1983. – V. 49. – P. 1–28.
11. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 226. – № 3. – С. 506–509.
12. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Об эллиптических уравнениях с разрывными нелинейностями* // Докл. РАН. – 1995. – Т. 342. – № 6. – С. 731–734.
13. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов.* – М.: Наука, 1972. – 416 с.
14. Павленко В.Н. *Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ. – 1973. – № 6. – С. 21–29.
15. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* – М.: Наука, 1988. – 280 с.
16. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1983. – 336 с.
17. Павленко В.Н. *О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнений параболического типа с разрывной немонотонной нелинейностью* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 3. – С. 520–526.
18. Павленко В.Н. *О существовании полуправильных решений задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями* // Укр. матем. журн. – 1989. – Т. 41. – № 12. – С. 1659–1664.
19. Ahmad S., Lazer A.C., Paul J.L. *Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problems at resonance* // Indiana Univ. J. – 1976. – V. 25. – P. 933–944.
20. Павленко В.Н. *Уравнения и вариационные неравенства с разрывными нелинейностями*: Автореф. дисс. ... докт. физ.-матем. наук. – Екатеринбург, 1995. – 35 с.
21. Павленко В.Н. *Управление распределенными системами эллиптического типа с разрывными нелинейностями* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 9. – С. 1586–1587.
22. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* – М.: Наука, 1988. – 424 с.
23. Павленко В.Н. *Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 8. – С. 1397–1402.
24. Павленко В.Н. *Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями* // Укр. матем. журн. – 1994. – Т. 46. – № 6. – С. 729–736.
25. Гилбарг Д., Трудингер М. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* – М.: Наука, 1989. – 464 с.

Челябинский государственный университет

Поступили
первый вариант 19.01.1999
окончательный вариант 30.06.2000