ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 1 (500)

УДК 517.988:519.85

Л.Д. ПОПОВ

О СХЕМАХ ФОРМИРОВАНИЯ ВЕДУЩЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В РЕГУЛЯРИЗОВАННОМ ЭКСТРАГРАДИЕНТНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

1. Введение

Многие задачи математической физики, исследования операций, математической экономики и др. могут быть записаны в форме вариационных неравенств, для численного решения которых к настоящему времени предложено и исследовано большое количество методов [1]–[13], в частности, методов градиентного типа. Как хорошо известно, для сходимости наиболее простых из градиентных процедур необходимо, чтобы оператор, формирующий задачу, был потенциальным (что отвечает обычным оптимизационным постановкам) или удовлетворял усиленным свойствам монотонности [6], [8]. В последующих исследованиях ослабление условий сходимости шло главным образом по двум направлениям, одно из которых было связано с включением в исходную задачу регуляризирующих компонентов [9], [10], а другое опиралось на идею экстраполяции направления спуска [11], [14], что требовало параллельного отслеживания двух последовательностей приближений к искомому решению: основной и экстраполирующей (называемой также прогнозной или ведущей). В методах первого направления, получивших название методов итеративной регуляризации, успешно решались не только вопросы сходимости при слабых начальных предположениях относительно свойств монотонности исходного оператора, но и проблемы, возникающие в связи с некорректностью обсуждаемых задач и неточностью задания их исходных данных. Платой за это выступала необходимость постепенного и согласованного уменьшения (в пределе до нуля) от итерации к итерации значений двух основных параметров метода: шагового параметра и параметра регуляризации, что в целом предопределило невысокую скорость сходимости соответствующих алгоритмов. Второе направление привело к так называемым экстраградиентным методам решения вариационных неравенств. Для этих методов характерно использование хотя и малых, но конечных значений параметра шага. Однако чувствительность экстраградиентных методов к погрешностям вычислений существенно выше по сравнению с методами, применяющими регуляризацию исходной задачи. Наконец, в [12] был опубликован метод, сочетающий в себе идеи метода итеративной регуляризации с экстраградиентным методом определения направления спуска и тем самым объединивший лучшие стороны каждого из изученных выше подходов.

Способ формирования экстраполирующей (прогнозной) последовательности в экстраградиентных методах в том виде, как он был впервые предложен в [14], основан на повторном (двойном) вычислении направления спуска: один раз это направление вычисляется в точке основной последовательности и один раз — в прогнозной точке. Однако этот способ не является единственно возможным: при определенных условиях [15], [16] можно ограничиться однократным вычислением такого направления, которое затем используется дважды: один раз при пересчете основной точки, и второй раз — при пересчете прогнозной точки. Естественно, что однократное

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов №№ НШ-792.2003.1, 01-01-00563).

определение направления спуска существенно снижает вычислительные затраты на проведение одной итерации метода.

Как будет показано в первой части данной работы, аналогичные приемы можно сочетать с методом итеративной регуляризации, причем вычислительная эффективность результирующего метода только возрастает.

Вторая часть работы содержит дополнительное исследование свойств изучаемых методов в случае, когда исходная задача не имеет решения (является несобственной [17]). А именно, будет показано, что в этом случае экстраградиентный метод регуляризации доставляет некоторое квазирешение противоречивой постановки и вариант ее трансформации в разрешимую задачу за счет минимальных (в определенном смысле) поправок, вносимых в ее исходные данные. Исследование этого случая следует общему подходу [17] и опирается на результаты работ [13], [18].

Наконец, в завершающей части работы представлены предварительные результаты вычислительного эксперимента, подтверждающие эффективность предлагаемых автором схем формирования прогнозной последовательности.

2. Постановка задачи и описание алгоритма

Пусть заданы X — выпуклое замкнутое множество евклидова пространства E^n и $F(x)$ — оператор, действующий из X в E^n. Рассмотрим задачу решения вариационного неравенства, которая состоит в поиске точки x, удовлетворяющей условиям

$$x \in X, \quad \langle F(x),\, y-x\rangle \geq 0 \quad \forall y \in X. \tag{1}$$

Оператор F будем считать монотонным, что означает выполнение неравенств

$$\langle F(x)-F(y),\, x-y\rangle \geq 0 \qquad \forall x, y \in E^n,$$

и удовлетворяющим условию Липшица с константой L:

$$\|F(x)-F(y)\| \leq L\,\|x-y\| \quad \forall x, y \in E^n.$$

Наряду с исходным неравенством (1) выпишем его регуляризированный вариант: для заданного значения параметра регуляризации $\alpha > 0$ найти такую точку x_α, что

$$x_\alpha \in X, \quad \langle F(x_\alpha)+\alpha x_\alpha, y-x_\alpha\rangle \geq 0 \quad \forall y \in X. \tag{2}$$

В отличие от исходной задачи регуляризированная постановка всегда имеет решение [3], и в случае разрешимости исходной задачи выполнены соотношения [9], [10]

$$\|x_\alpha\| \leq \|x_*\|, \quad \lim_{\alpha\to+0}\|x_\alpha - x_*\| = 0, \quad \|x_\alpha - x_\gamma\| \leq \frac{|\alpha-\gamma|}{\alpha}\|x_*\| \;\; \forall \alpha, \gamma > 0, \tag{3}$$

где x_* — нормальное (т. е. минимальное по норме) решение (1). Если же исходная постановка (1) неразрешима (в других терминах — несобственная), то $\|x_\alpha\| \to \infty$ при $\alpha \to +0$, однако

$$\alpha\|x_\alpha\| \leq K_0, \quad \lim_{\alpha\to+0}\|\alpha\, x_\alpha - \overline{h}\| = 0, \quad \|x_\alpha - x_\gamma\| \leq \frac{|\alpha-\gamma|}{\alpha\gamma}\, K_0 \quad \forall \alpha, \gamma > 0, \tag{4}$$

где K_0 — некоторая константа, $\overline{h}$ — минимальный по норме вектор среди всех таких векторов h, для которых скорректированная задача (1) нахождения x из условий

$$x \in X, \quad \langle F(x)+h,\; y-x\rangle \geq 0 \quad \forall y \in X \tag{5}$$

разрешима [13], [18]. Задача (5) при $h = \overline{h}$ может рассматриваться в качестве аппроксимирующей для несобственной (неразрешимой в обычном смысле) исходной задачи, а ее решение — как некоторое обобщенное решение для (1).

Обратимся к основной цели исследования. Итерационный процесс, свойства которого предлагаем рассмотреть, определяется следующими соотношениями:

$$x_{k+1} = \pi_X(x_k - \mu(F_k(\overline{x}_k) + \alpha_k x_k)), \quad \overline{x}_{k+1} = \pi_X(x_{k+1} - \mu(F_k(\overline{x}_k) + \alpha_{k+1} x_{k+1})); \tag{6}$$

здесь π_X — операция проектирования на множество X, $\{x_k\}$ — основная последовательность, $\{\overline{x}_k\}$ — последовательность прогнозных точек, $\mu > 0$ и $\alpha_k > 0$ — числовые параметры,

$$\|F_k(x) - F(x)\| \le \delta_k(1 + \|x\|), \quad \delta_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots \tag{7}$$

Начальные приближения x_0, $\overline{x}_0$ выбираются в X произвольно, например равными друг другу.

Выписанный процесс сочетает в себе идеи экстраградиентного спуска и итеративной регуляризации. Но в отличие от своего прототипа из [12] метод (6), (7) на каждом шаге вычисляет значение оператора F только один раз, хотя использует это значение дважды: при переопределении как точки x_k основной последовательности, так и точки $\overline{x}_k$ последовательности, осуществляющей экстраполяцию направления спуска. Второстепенные отличия связаны с выбором точек, в которых задача подвергается регуляризации, и с тем, что параметр шага фиксирован на протяжении всего хода вычислений; последнее обстоятельство, впрочем, несущественно и нацелено лишь на упрощение последующих выкладок.

3. Анализ сходимости в разрешимом случае

Пусть задача (1) разрешима и x_* — ее минимальное по норме решение. Анализ сходимости итерационного процесса (8) будем проводить при стандартных условиях согласования значений его параметров, а именно, будем предполагать, что

$$0 < \alpha_k, \quad 0 < \delta_k, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0, \quad 0 < \mu < \frac{1}{L(1+\sqrt{2})}, \tag{8}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\delta_k + \delta_{k-1}}{\alpha_k} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{\alpha_k^2} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty. \tag{9}$$

В качестве примера подходящих последовательностей $\{\alpha_k\}$ и $\{\delta_k\}$ приведем следующие:

$$\alpha_k = (1+k)^{-\sigma}, \quad \delta_k = (1+k)^{-\nu}; \quad \text{здесь} \quad \sigma > 0, \;\; \nu > 0, \;\; \sigma < \min\{\tfrac{1}{2}, \nu\}.$$

Замечание. Условие расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ играет существенную роль и потому фигурирует в общем перечне (8), (9), хотя не является независимым, а вытекает из предшествующих ему условий. В самом деле, сходимость последовательности α_k к нулю позволяет для любого натурального m определить номер $k(m) \ge m$ такой, что $\alpha_{k(m)} = \max\limits_{k\ge m}\{\alpha_k\}$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\alpha_k - \alpha_{k+1}}{\alpha_k^2} = 0$, то для достаточно больших m имеем $\alpha_k - \alpha_{k+1} < \alpha_k^2 \quad \forall k > m$, откуда

$$\alpha_{k+1} > \alpha_k(1-\alpha_k) \ge (1-\alpha_{k(m)})\alpha_k \quad \forall k > m.$$

Суммируя эти неравенства по k от m до произвольного $N > k(m)$, получаем

$$\alpha_{N+1} + \sum_{k=m}^{N} \alpha_k \; - \alpha_m > (1-\alpha_{k(m)}) \sum_{k=m}^{N} \alpha_k,$$

т. е.

$$\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k > \sum_{k=k(m)}^{N} \alpha_k > 1 - \frac{\alpha_{N+1}}{\alpha_{k(m)}} \to 1 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Последнее соотношение, ввиду произвольности m, противоречит известному свойству сходящихся рядов — стремлению к нулю остатка ряда.

Сформулируем основной результат о сходимости предлагаемого алгоритма.

Теорема 1. *Пусть задача* (1) *разрешима и параметры метода* (6), (7) *связаны условиями* (8), (9). *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_*\| = \lim_{k\to\infty} \|\overline{x}_k - x_*\| = 0, \tag{10}$$

где x_* — *нормальное (минимальное по норме) решение задачи* (1).

Доказательство. В виду свойств (3) достаточно показать, что последовательность $\{x_k\}$, генерируемая соотношениями (6), (7), обладает свойством

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_{\alpha_k}\| = 0,$$

где x_{α_k} — решение регуляризированного неравенства (2) при $\alpha = \alpha_k$.

Как и в [12], выпишем очевидное тождество

$$\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 = \|x_k - \overline{x}_k\|^2 + \|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2 + \|x_{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 + 2\langle x_k - \overline{x}_k, \overline{x}_k - x_{k+1}\rangle + \\ + 2\langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - x_{\alpha_k}\rangle,$$

которое преобразуем к виду

$$\|x_{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 = \|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 - \|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_k - \overline{x}_k\|^2 - \\ - 2\langle x_{k+1} - x_k + \mu(F_k(\overline{x}_k) + \alpha_k x_k),\, x_{\alpha_k} - x_{k+1}\rangle - \\ - 2\langle \overline{x}_k - x_k + \mu(F_{k-1}(\overline{x}_{k-1}) + \alpha_k x_k),\, x_{k+1} - \overline{x}_k\rangle + \\ + 2\mu\langle F_k(\overline{x}_k) + \alpha_k x_k, x_{\alpha_k} - x_{k+1}\rangle + 2\mu\langle F_{k-1}(\overline{x}_{k-1}) + \alpha_k x_k, x_{k+1} - \overline{x}_k\rangle. \tag{11}$$

Далее, пользуясь характеристическим свойством проекции на выпуклое множество ([6], с. 183)

$$\langle \pi_X(x) - x, y - \pi_X(x)\rangle \geq 0 \quad \forall y \in X, \quad x \in E^n,$$

перепишем соотношения (6) в виде

$$\langle x_{k+1} - x_k + \mu(F_k(\overline{x}_k) + \alpha_k x_k),\, y_1 - x_{k+1}\rangle \geq 0 \quad \forall y_1 \in X,$$
$$\langle \overline{x}_k - x_k + \mu(F_{k-1}(\overline{x}_{k-1}) + \alpha_k x_k),\, y_2 - \overline{x}_k\rangle \geq 0 \quad \forall y_2 \in X,$$

где во втором соотношении индекс k заменен на $k-1$. Положим в выписанных соотношениях $y_1 = x_{\alpha_k}$ и $y_2 = x_{k+1}$. Получим

$$\langle x_{k+1} - x_k + \mu(F_k(\overline{x}_k) + \alpha_k x_k),\, x_{\alpha_k} - x_{k+1}\rangle \geq 0,$$
$$\langle \overline{x}_k - x_k + \mu(F_{k-1}(\overline{x}_{k-1}) + \alpha_k x_k),\, x_{k+1} - \overline{x}_k\rangle \geq 0.$$

Применим эти неравенства к правой части тождества (11):

$$\|x_{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 \leq \|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 - \|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_k - \overline{x}_k\|^2 + \\ + 2\mu\langle F_k(\overline{x}_k) + \alpha_k x_k, x_{\alpha_k} - x_{k+1}\rangle + 2\mu\langle F_{k-1}(\overline{x}_{k-1}) + \alpha_k x_k, x_{k+1} - \overline{x}_k\rangle = \\ = \|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 - \|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2 - \|x_k - \overline{x}_k\|^2 + \\ + 2\mu\langle F_k(\overline{x}_k) + \alpha_k x_k, x_{\alpha_k} - \overline{x}_k\rangle + 2\mu\langle F_k(\overline{x}_k) - F_{k-1}(\overline{x}_{k-1}),\, \overline{x}_k - x_{k+1}\rangle. \tag{12}$$

Оценим отдельно скалярные произведения, стоящие в правой части (12). Начнем со второго из них как с более простого. Опираясь на неравенство Коши–Буняковского, липшицевость оператора F и условие (7), получим

$$\begin{aligned}
&2\mu\langle F_k(\overline{x}_k) - F_{k-1}(\overline{x}_{k-1}), \overline{x}_k - x_{k+1}\rangle = \\
&\qquad = 2\mu\langle F_k(\overline{x}_k) - F(\overline{x}_k),\, \overline{x}_k - x_{k+1}\rangle + 2\mu\langle F(\overline{x}_k) - F(x_k),\, \overline{x}_k - x_{k+1}\rangle \ + \\
&\qquad + 2\mu\langle F(x_k) - F(\overline{x}_{k-1}),\, \overline{x}_k - x_{k+1}\rangle + 2\mu\langle F(\overline{x}_{k-1}) - F_{k-1}(\overline{x}_{k-1}),\, \overline{x}_k - x_{k+1}\rangle \le \\
&\qquad \le 2\mu\delta_k(1 + \|\overline{x}_k\|)\|\overline{x}_k - x_{k+1}\| + 2\mu L(\sqrt{m_1}\|x_k - \overline{x}_k\|)\frac{\|\overline{x}_k - x_{k+1}\|}{\sqrt{m_1}} + \\
&\qquad + 2\mu L(\sqrt{m_2}\|x_k - \overline{x}_{k-1}\|)\frac{\|\overline{x}_k - x_{k+1}\|}{\sqrt{m_2}} + 2\mu\delta_{k-1}(1 + \|\overline{x}_{k-1}\|)\|\overline{x}_k - x_{k+1}\|. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Здесь $m_1, m_2 > 0$ — параметры, значения которых определим позже. А пока, используя очевидные неравенства

$$\begin{aligned}
\|\overline{x}_k\| &\le \|\overline{x}_k - x_k\| + \|x_k - x_{\alpha_k}\| + \|x_{\alpha_k}\| \le \|\overline{x}_k - x_k\| + \|x_k - x_{\alpha_k}\| + \|x_*\|, \\
\|\overline{x}_{k-1}\| &\le \|x_k - \overline{x}_{k-1}\| + \|x_k - x_{\alpha_k}\| + \|x_{\alpha_k}\| \le \|x_k - \overline{x}_{k-1}\| + \|x_k - x_{\alpha_k}\| + \|x_*\|
\end{aligned} \qquad (14)$$

и элементарное неравенство $2|ab| \le a^2 + b^2$, приводим оценку (13) к виду

$$\begin{aligned}
&2\mu\langle F_k(\overline{x}_k) - F_{k-1}(\overline{x}_{k-1}),\, \overline{x}_k - x_{k+1}\rangle \le \\
&\qquad \le \mu\delta_k\left((1 + \|x_*\|)^2 + \|x_k - \overline{x}_k\|^2 + \|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + 3\|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2\right) + \\
&\qquad + \mu L\left(m_1\|x_k - \overline{x}_k\|^2 + m_2\|x_k - \overline{x}_{k-1}\|^2 + (m_1^{-1} + m_2^{-1})\,\|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2\right) + \\
&\qquad + \mu\delta_{k-1}\left((1 + \|x_*\|)^2 + \|x_k - \overline{x}_{k-1}\|^2 + \|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + 3\|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2\right). \qquad (15)
\end{aligned}$$

Теперь вернемся к первому скалярному произведению. В силу монотонности оператора F и ограничения на точность его вычисления, а также в силу определения (2) точек x_{α_k} имеем

$$\begin{aligned}
&2\mu\langle F_k(\overline{x}_k) + \alpha_k x_k, x_{\alpha_k} - \overline{x}_k\rangle = \\
&\qquad = 2\mu\langle F_k(\overline{x}_k) - F(\overline{x}_k),\, x_{\alpha_k} - \overline{x}_k\rangle + 2\mu\langle F(\overline{x}_k) + \alpha_k x_k, x_{\alpha_k} - \overline{x}_k\rangle \le \\
&\qquad \le 2\mu\delta_k(1 + \|\overline{x}_k\|)\,\|x_{\alpha_k} - \overline{x}_k\| + 2\mu\langle F(x_{\alpha_k}) + \alpha_k x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k} - \overline{x}_k\rangle + 2\alpha_k\mu\langle x_{\alpha_k} - x_k, \overline{x}_k - x_{\alpha_k}\rangle \le \\
&\qquad \le 2\mu\delta_k(1 + \|\overline{x}_k\|)\|x_{\alpha_k} - \overline{x}_k\| + 2\alpha_k\mu\langle x_{\alpha_k} - x_k, \overline{x}_k - x_{\alpha_k}\rangle.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части этой оценки удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned}
2\mu\delta_k(1 + \|\overline{x}_k\|)\,\|x_{\alpha_k} - \overline{x}_k\| &\le 2\mu\delta_k(1 + \|\overline{x}_k - x_k\| + \|x_k - x_{\alpha_k}\| + \|x_*\|)(\|x_{\alpha_k} - x_k\| + \|x_k - \overline{x}_k\|) \le \\
&\le \mu\delta_k\left[2(1 + \|x_*\|)^2 + 5\|x_k - \overline{x}_k\|^2 + 5\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2\ \right],
\end{aligned}$$

что вытекает из первого неравенства (14), неравенства треугольника и все того же элементарного неравенства $2|ab| \le a^2 + b^2$. Для второго слагаемого имеем

$$\begin{aligned}
&2\alpha_k\mu\langle x_{\alpha_k} - x_k, \overline{x}_k - x_{\alpha_k}\rangle = -2\alpha_k\mu\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + 2\alpha_k\mu\langle x_{\alpha_k} - x_k, \overline{x}_k - x_k\rangle \le \\
&\qquad \le -2\alpha_k\mu\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + 2\alpha_k\mu\|x_k - x_{\alpha_k}\|\,\|x_k - \overline{x}_k\| \le -\alpha_k\mu\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + \alpha_k\mu\|x_k - \overline{x}_k\|^2.
\end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned}
2\mu\langle F_k(\overline{x}_k) + \alpha_k x_k, x_{\alpha_k} - \overline{x}_k\rangle &\le \mu\delta_k\left[2(1 + \|x_*\|)^2 + 5\|x_k - \overline{x}_k\|^2 + 5\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2\ \right] - \\
&- \alpha_k\mu\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + \alpha_k\mu\|x_k - \overline{x}_k\|^2. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Объединим теперь соотношения (12) и (15), (16). Получим

$$\|x_{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 \le A_k\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 - B_k\|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2 - C_k\|x_k - \overline{x}_k\|^2 + D_k\|x_k - \overline{x}_{k-1}\|^2 + E_k, \quad (17)$$

где

$$A_k = 1 - \alpha_k\mu + \mu(6\delta_k + \delta_{k-1}), \quad B_k = 1 - \mu\, L(m_1^{-1} + m_2^{-1}) - 3\mu(\delta_k + \delta_{k-1}),$$
$$C_k = 1 - \mu\, Lm_1 - \alpha_k\mu - 6\mu\delta_k, \quad D_k = \mu(Lm_2 + \delta_{k-1}),$$
$$E_k = \mu(3\delta_k + \delta_{k-1})(1 + \|x_*\|)^2.$$

Теперь отойдем от стандартных выкладок [12], [15] и свяжем величины $\|x_{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2$ и $\|x_{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2$ при помощи элементарного векторного неравенства

$$\|x + y\|^2 \geq (\|x\| - \|y\|)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\,\|y\| \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 - \varepsilon\|x\|^2 - \frac{\|y\|^2}{\varepsilon} =$$
$$= (1-\varepsilon)\|x\|^2 + \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}\|y\|^2,$$

которое верно для любых векторов x, y и скаляра $\varepsilon > 0$. Полагая здесь $x = x_{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}$, $y = x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}$, получим

$$\|x_{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 \geq (1 - \varepsilon_k)\|x_{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 + \frac{(\varepsilon_k - 1)}{\varepsilon_k}\|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2.$$

Пусть $\varepsilon_k = \frac{1}{2}\alpha_k\mu$, $k = 0, 1, \ldots$, тогда в силу правил согласования (8), (9) при больших k имеем $1 - \varepsilon_k > 0$. С учетом этого из соотношений (3), (17) выводим заключительное рекурсивное неравенство

$$\|x_{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 + \frac{D_{k+1}}{A_{k+1}}\|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2 \leq \frac{A_k}{1-\varepsilon_k}\left(\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + \frac{D_k}{A_k}\|x_k - \overline{x}_{k-1}\|^2\right) -$$
$$- \left(\frac{B_k}{1-\varepsilon_k} - \frac{D_{k+1}}{A_{k+1}}\right)\|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{C_k}{1-\varepsilon_k}\|x_k - \overline{x}_k\|^2 + \frac{E_k}{1-\varepsilon_k} + \frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1})^2}{\varepsilon_k\alpha_k^2}\|x_*\|^2, \quad (18)$$

которое используем для обоснования сходимости метода. Начиная с этого места, будем считать $m_1 = 1 + \sqrt{2}$, $m_2 = 1$. Заметим, что это обеспечивает легко проверяемое равенство $m_1 = m_1^{-1} + m_2^{-1} + m_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Рассмотрим подробнее коэффициенты в соотношении (18). Во-первых,

$$A_k = 1 - \alpha_k\mu + o(\alpha_k), \quad C_k = 1 - \mu L(1 + \sqrt{2}) + O(\alpha_k),$$

в силу чего правила согласования параметров (8), (9) обеспечивают положительность этих коэффициентов при всех достаточно больших k. Во-вторых, в силу тех же причин положительной будет разность

$$\frac{B_k}{1-\varepsilon_k} - \frac{D_{k+1}}{A_{k+1}} = \frac{A_{k+1}B_k - (1-\varepsilon_k)D_{k+1}}{(1-\varepsilon_k)A_{k+1}}.$$

Действительно, как ранее убедились, знаменатель дроби справа положителен, а положительность числителя при достаточно больших k вытекает из разложения

$$A_{k+1}B_k - (1-\varepsilon_k)D_{k+1} = 1 - \mu L(m_1^{-1} + m_2^{-1} + m_2) + O(\alpha_k) = 1 - \mu L(1 + \sqrt{2}) + O(\alpha_k)$$

и правил согласования параметров (8), (9).

Сказанное позволяет оставить в правой части соотношения (18) только первое и два последних слагаемых, сохранив первоначальный знак неравенства. Результат можно записать кратко в виде

$$0 \leq \omega_{k+1} \leq (1 - \theta_k)\omega_k + \sigma_k \quad \text{при всех} \quad k > N, \quad (19)$$

где N — достаточно большое число, и использованы обозначения

$$\omega_k = \|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + \frac{D_k}{A_k}\|x_k - \overline{x}_{k-1}\|^2, \quad \theta_k = \frac{1 - A_k - \varepsilon_k}{1 - \varepsilon_k}, \quad \sigma_k = \frac{E_k}{1-\varepsilon_k} + \frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1})^2}{\varepsilon_k\alpha_k^2}\|x_*\|^2.$$

В силу (8), (9) при достаточно больших k имеем $\mu(6\delta_k + \delta_{k-1}) < \frac{1}{4}\,\alpha_k\mu$, а значит,

$$\theta_k = \frac{1 - A_k - \varepsilon_k}{1 - \varepsilon_k} > 1 - A_k - \varepsilon_k = \frac{1}{2}\alpha_k\mu - \mu(6\delta_k + \delta_{k-1}) > \frac{1}{4}\,\alpha_k\mu.$$

Это вместе с предположением о расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ влечет расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \theta_k$. Кроме того, из тех же условий следует

$$0 \le \frac{\sigma_k}{\theta_k} \le 4\left(\frac{\mu(3\delta_k + \delta_{k-1})(1 + \|x_*\|)^2}{(1 - \varepsilon_k)\alpha_k\mu} + \frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1})^2}{\varepsilon_k\alpha_k^2\alpha_k\mu}\|x_*\|^2\right) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Остается сослаться на известный результат ([6], с. 90), согласно которому последовательность $\{\omega_k\}$, удовлетворяющая (19) при условии расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \theta_k$ и сходимости к нулю отношения $r_k = \frac{\sigma_k}{\theta_k}$, сходится к нулю. Вместе с этой последовательностью сходятся к нулю и последовательности $\|x_k - x_{\alpha_k}\|$, $\|x_k - \overline{x}_{k-1}\|$, что с учетом соотношений (3) влечет искомые равенства (10). $\square$

4. Анализ несобственного случая

Пусть теперь задача (1) неразрешима. Рассмотрим параметрическое семейство возмущенных задач отыскания точек x, удовлетворяющих условиям

$$x \in X, \quad \langle F(x) + h,\, y - x\rangle \ge 0 \quad \forall y \in X; \tag{20}$$

здесь h — параметр, описывающий постоянное возмущение при вычислении значения оператора F. Как известно, множество H всех таких значений параметра h, при которых возмущенная задача (20) имеет хотя бы одно решение, не пусто и почти выпукло [13], [16]. Последнее означает, что его замыкание $\overline{H}$ выпукло и удовлетворяет условию

$$\mathbf{ri}\,\overline{H} \subseteq H \subseteq \overline{H},$$

где **ri** обозначает операцию взятия относительной внутренности выпуклого множества.

Среди возмущенных задач вида (20), обладающих решением, естественно попытаться выбрать задачу, наиболее близкую к исходной, и считать ее обычное решение некоторым обобщенным решением (или квазирешением) исходной неразрешимой (несобственной) постановки. Близость исходной и возмущенной задачи можно измерять нормой вектора h, например, евклидовой нормой $\|h\|$.

Обозначим $\|\overline{h}\| = \min\limits_{h\in\overline{H}} \|h\|$. Такой элемент очевидно существует и является единственным в силу выпуклости и замкнутости $\overline{H}$. Хотя, строго говоря, $\overline{h}$ может не лежать в H, свойство почти выпуклости множества H гарантирует существование в нем элементов, сколь угодно близких к $\overline{h}$. Это служит хорошей мотивировкой для изучения задачи поиска $\overline{h}$. Следующая теорема устанавливает связь между этой задачей и экстраградиентным методом регуляризации.

Теорема 2. *Пусть задача* (1) *неразрешима и x_α — решение регуляризированной задачи* (2), *отвечающее некоторому $\alpha > 0$. Тогда*

(a) $\alpha x_\alpha \in H$,

(b) *x_α является решением возмущенной задачи* (20) *при $h = \alpha x_\alpha$,*

(c) $\lim\limits_{\alpha\to+0} \|\alpha x_\alpha - \overline{h}\| = 0$,

где $\overline{h}$ — минимальный по норме элемент множества $\overline{H}$.

Если (в дополнение к предыдущему) параметры метода (6), (7) *связаны условиями* (8), (9) *и значения α_k не возрастают, то также*

(d) $\lim\limits_{k\to\infty} \|\alpha_k x_k - \overline{h}\| = 0$, *т.е. последовательность* $\{\alpha_k x_k\}$ *сходится к оптимальному параметру коррекции* $\overline{h}$.

Доказательство. Первые три пункта теоремы доказаны в [13], [18]. Обоснуем последний ее пункт. С этой целью проследим последовательность рассуждений, выполненную при выводе неравенства (18) в доказательстве теоремы 1. Предположение о неразрешимости исходной задачи меняет только два звена этой последовательности. Первое звено связано с оценкой $\|x_{\alpha_k}\| \le \|x_*\|$, которая благодаря (4) теперь приобретает вид $\|x_{\alpha_k}\| \le K_0 \alpha_k^{-1}$. Соответственно следует заменить $\|x_*\|$ на $K_0\alpha_k^{-1}$ в соотношениях (14)–(16) и в их следствиях. Второе звено касается оценки

$$\|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\| \le \frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1})}{\alpha_k}\|x_*\|,$$

которая применялась в (18) и теперь имеет вид

$$\|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\| \le \frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1})}{\alpha_k \alpha_{k+1}} K_0.$$

С учетом этих изменений перепишем соотношение (18):

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 + \frac{D_{k+1}}{A_{k+1}}\|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2 \le \frac{A_k}{1-\varepsilon_k}\left(\|x_k - x_{\alpha_k}\|^2 + \frac{D_k}{A_k}\|x_k - \overline{x}_{k-1}\|^2\right) - \\ - \left(\frac{B_k}{1-\varepsilon_k} - \frac{D_{k+1}}{A_{k+1}}\right)\|\overline{x}_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{C_k}{1-\varepsilon_k}\|x_k - \overline{x}_k\|^2 + \frac{\mu(3\delta_k + \delta_{k-1})(1 + K_0\alpha_k^{-1})^2}{1-\varepsilon_k} + \\ + \frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1})^2}{\varepsilon_k \alpha_k^2\, \alpha_{k+1}^2} K_0^2. \quad (21)\end{aligned}$$

Умножим левую и правую части выписанного неравенства на α_{k+1}^2. Оставляя справа только неотрицательные слагаемые и опираясь на то, что значения α_k не возрастают, получим аналог оценки (19):

$$\begin{aligned}0 \le \omega'_{k+1} \le \frac{A_k}{1-\varepsilon_k}\,\omega'_k + \frac{\mu(3\delta_k + \delta_{k-1})(K_0 + \alpha_k)^2}{1-\varepsilon_k} + \frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1})^2}{\varepsilon_k \alpha_k^2} K_0^2 = \\ = (1-\theta_k)\,\omega'_k + \sigma'_k \quad \forall k > N, \quad (22)\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\omega'_k = \|\alpha_k x_k - \alpha_k x_{\alpha_k}\|^2 + \alpha_k^2 \frac{D_k}{A_k}\|x_k - \overline{x}_{k-1}\|^2, \quad \sigma'_k = \frac{\mu(3\delta_k + \delta_{k-1})(K_0 + \alpha_k)^2}{1-\varepsilon_k} + \frac{(\alpha_k - \alpha_{k+1})^2}{\varepsilon_k \alpha_k^2} K_0^2,$$

и где N — номер, начиная с которого второе и третье слагаемые в правой части неравенства (21) можно считать неположительными.

Нетрудно убедиться, что условия согласования параметров итерационного процесса (6) при всех достаточно больших k обеспечивают неравенство

$$0 \le r'_k = \frac{\sigma'_k}{\theta_k} < \frac{\sigma'_k}{1 - A_k - \varepsilon_k} = \frac{\sigma'_k}{O(\alpha_k)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Кроме того те же условия, как было показано ранее, обеспечивают расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \theta_k$, что позволяет вновь применить, но уже к последовательности $\{\omega'_k\}$, утверждение ([6], с. 90), в силу которого эта последовательность сходится к нулю. По определению вместе с этой последовательностью сходится к нулю и последовательность $\|\alpha_k x_k - \alpha_k x_{\alpha_k}\|$, что с учетом соотношений (4) завершает доказательство последнего пункта теоремы 2. □

5. Результаты вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент проводился на линейных задачах о дополнительности с кососимметричной матрицей коэффициентов. Напомним, что для заданной квадратной матрицы A линейная задача о дополнительности состоит в поиске пары векторов x, y, удовлетворяющих условиям

$$y = Ax + b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \langle x, y \rangle = 0.$$

Линейные задачи о дополнительности с кососимметричными матрицами, т. е. матрицами, удовлетворяющими условию $A = -A^T$, являются наиболее простым примером вариационных неравенств [1], [4], чей оператор $F(x) = Ax + b$ удовлетворяет условию монотонности в наиболее слабой форме

$$\langle F(x) - F(y),\ x - y \rangle = \langle A(x - y), x - y \rangle = 0 \quad \forall x, y.$$

Все тестовые примеры имели заранее известное решение. Погрешности вычисления моделировались датчиком случайных чисел с равномерным распределением. Величина шагового параметра выбиралась таким образом, чтобы обеспечить наибольшую скорость сходимости каждого из алгоритмов при фиксированных стратегиях выбора значений других параметров. Эти стратегии определялись соотношениями

$$\alpha_k = \alpha_0 (1 + k)^{-1/2}, \quad \delta_k = \delta_0 (1 + k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

В эксперименте участвовали три метода: метод итеративной регуляризации из [9], экстраградиентный метод регуляризации из [12] и предлагаемый в данной работе модифицированный экстраградиентный метод с альтернативной схемой формирования прогнозной последовательности. Во всех случаях начальное приближение к искомому решению выбиралось одинаковым. Типичные результаты расчетов представлены ниже в таблице, где в крайней левой колонке помещен номер итерации, а в остальных — показатели достигнутой к этому моменту точности (т. е. отклонение текущего приближения от решения тестовой задачи) в логарифмической шкале.

Точность, достигаемая разными методами за одинаковое число шагов

№ итерации	Метод итеративной регуляризации	Экстраградиентный метод регуляризации	Модифицированный экстраградиентный метод
0	1.36956	1.36956	1.36956
3000	−0.99844	−2.13194	−2.05402
6000	−1.62098	−2.71738	−2.46219
9000	−1.62454	−3.30334	−2.86882
12000	−1.64115	−3.89139	−3.27424
15000	−1.62102	−4.45678	−3.67904
18000	−1.63893	−4.99480	−4.08608
21000	−1.64986	−5.72244	−4.50322
36000	−1.67753	−5.91552	−5.83104

Из приведенных данных видно, что оба экстраградиентных метода регуляризации превосходят по скорости сходимости метод итеративной регуляризации и вполне сопоставимы в этом плане друг с другом. Вместе с тем, затрачивая на достижение одной и той же точности решения примерно одинаковое число итераций, эти два метода разнятся по общему времени вычислений, т. к. итерация второго из них выполняется на компьютере примерно в два раза быстрее, чем у первого. Таким образом, предварительные результаты тестирования показали существенное преимущество новой схемы формирования прогнозной последовательности в экстраградиентном методе регуляризации.

Литература

1. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. *Введение в вариационные неравенства и их приложения.* – М.: Мир, 1983. – 256 с.
2. Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р. *Численное исследование вариационных неравенств.* – М.: Мир, 1979. – 574 с.
3. Байокки К., Капело А. *Вариационные и квазивариационные неравенства.* – М.: Наука, 1988. – 488 с.
4. Harker P.T., Pang J.-S. *Finite-dimensional variational inequalities and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applications* // Math. Program. – 1990. – V. 48. – P. 161–220.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1974. – 223 с.
6. Васильев Ф.П. *Методы оптимизации.* – М.: Факториал, 2002. – 823 с.
7. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. *Нелинейные некорректные задачи.* – М.: Наука, 1995. – 307 с.
8. Бакушинский А.Б., Поляк Б.Т. *О решении вариационных неравенств* // ДАН СССР. – 1974. – Т. 219. – № 5. – С. 1038–1041.
9. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1989. – 127 с.
10. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Некорректные задачи. Численные методы и приложения.* – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 197 с.
11. Антипин А.С. *Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании.* – М.: Изд-во ВЦ РАН, 2002. – 86 с.
12. Антипин А.С., Васильев Ф.П. *Регуляризованный экстраградиентный метод для решения вариационных неравенств* // Вычисл. методы и программиров. – 2002. – Т. 3. – № 2. – С. 144–150.
13. Кокурин М.Ю. *Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач.* – Йошкар-Ола: Изд-во Марийск. ун-та, 1998. – 292 с.
14. Корпелевич Г.М. *Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач* // Экономика и матем. методы. – 1976. – Т. 12. – Вып. 4. – С. 747–756.
15. Попов Л.Д. *Модификация метода Эрроу–Гурвица поиска седловых точек* // Матем. заметки. – 1980. – Т. 28. – Вып. 5. – С. 777–784.
16. Попов Л.Д. *Об одной модификации метода Эрроу–Гурвица поиска седловых точек с адаптивной процедурой определения итерационного шага* / В кн. Классификация и оптимизация в задачах управления. – Свердловск: Уральск. НЦ АН СССР. – 1981. – С. 52–56.
17. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* – М.: Наука, 1983. – 336 с.
18. Попов Л.Д. *О применении метода проекции для нахождения аппроксимационных корней монотонных отображений* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 12. – С. 74–80.

Институт математики и
механики Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
07.08.2003